

С. А. Назаров, Я. Таскинен

**МОДЕЛЬ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ С  
МЕЛКИМИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ  
УЧАСТКАМИ ЗАЩЕМЛЕНИЯ КРАЯ**

**1. Постановка задачи и предварительное описание результатов.** Пусть  $\Omega$  – область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которая представляет собой двумерное изображение тонкой цилиндрической пластины (рис. 1), находящейся в условиях плоской деформации и изготовленной из однородного изотропного материала с постоянными Ламе  $\lambda \geq 0$  и  $\mu > 0$ . Уравнения равновесия пластины имеют вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{j1}(u; x) - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{j2}(u; x) = f_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)$  и  $f = (f_1, f_2)$  – векторы смещений и массовых сил,  $\sigma_{jk}(u)$  – декартовы компоненты тензора напряжений,

$$\sigma_{jk}(u) = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \quad j, k = 1, 2, \quad (1.2)$$

а  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера.

Границу  $\Gamma = \partial\Omega$ , т.е. одномерное изображение края пластины, считаем гладкой (класса  $C^\infty$  для простоты; ср. п. 8, 2°) простым замкнутым контуром. Масштабированием сведем длину контура  $\Gamma$  к единице и тем самым сделаем декартову систему координат  $x = (x_1, x_2)$  и все геометрические параметры безразмерными. Точками

$$P_0, P_1, \dots, P_{J-1}, P_J = P_0$$

разобьем  $\Gamma$  на дуги  $\Gamma_0^h, \dots, \Gamma_{J-1}^h$  длиной  $h = 1/J$  (рис. 1), причем  $J$  – большое натуральное число и соответственно  $h$  – малый положительный параметр. В окрестности  $\mathcal{U}$  контура  $\Gamma$  введем криволинейную систему координат  $(n, s)$ , где  $n$  – ориентированное расстояние до  $\Gamma$ ,  $n < 0$  в  $\Omega \cap \mathcal{U}$ , а  $s$  – длина дуги на  $\Gamma$ , отмеренная против часовой стрелки

*Ключевые слова:* изотропное плоское упругое тело, малые зоны защемления, краевые условия Винклера–Робэна, асимптотика, сходимость.

Работа выполнена в рамках гранта 342957 Академии Финляндии.

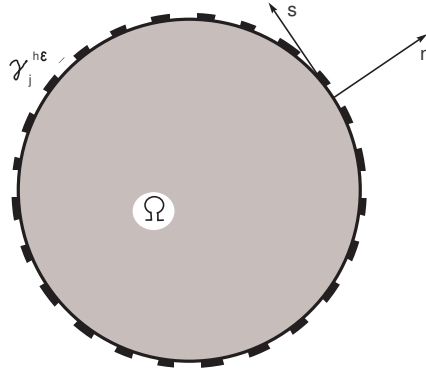


Рис. 1. Пластина с периодическими участками жесткого условия Дирихле, выделенными полужирными линиями.

от начала координат  $\mathcal{O} = P_0 = P_J$ . Обозначив  $\varepsilon > 0$  еще один малый параметр, определим дуги

$$\gamma_j^{h\varepsilon} = \{x \in \Gamma : \varepsilon^{-1}(s - s_j) \in v(a_{\pm}(s_j)) := (a_-(s_j), a_+(s_j)) \subset \mathbb{R}\},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad (1.3)$$

где  $s_j = hj$  и  $a_{\pm} \in C^{\infty}(\Gamma)$  – профильные функции, подчиненные ограничениям

$$a_{\pm}(s) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad a(s) := a_+(s) - a_-(s) > 0, \quad s \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Замкнем систему дифференциальных уравнений (1.1) краевыми условиями

$$u_j(x) = 0, \quad x \in \gamma^{h,\varepsilon} := \bigcup_{j=1}^J \gamma_j^{h,\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \quad (1.5)$$

$$\sigma_j^{(n)}(u; x) = 0, \quad x \in \zeta^{h,\varepsilon} := \Gamma \setminus \overline{\gamma^{h,\varepsilon}}, \quad j = 1, 2, \quad (1.6)$$

где  $\sigma^{(n)}(u) = (\sigma_1^{(n)}(u), \sigma_2^{(n)}(u))$  – вектор нормальных напряжений на границе  $\Gamma$  с декартовыми компонентами

$$\sigma_j^{(n)}(u) = n_1 \sigma_{j1}(u) + n_2 \sigma_{j2}(u), \quad j = 1, 2, \quad (1.7)$$

а  $n = (n_1, n_2)$  – единичный вектор внешней нормали. Далее соотношения (1.5) и (1.6) называем краевыми условиями Дирихле и Неймана соответственно.

Вариационная постановка задачи (1.1), (1.5), (1.6) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E(u, \psi; \Omega) = (f, \psi)_\Omega, \quad \psi \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2, \quad (1.8)$$

где  $\frac{1}{2}E(u, u; \Omega)$  – упругая энергия, запасенная пластиной, т.е.

$$\begin{aligned} E(u, u; \Omega) &= \frac{1}{2\mu} \sum_{j,k=1,2} \|\sigma_{jk}(u); L^2(\Omega)\|^2 - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \|\sigma_{11}(u) \\ &+ \sigma_{22}(u); L^2(\Omega)\|^2 \geq \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \sum_{j,k=1,2} \|\sigma_{jk}(u); L^2(\Omega)\|^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$E(u, \psi; \Omega) = \frac{1}{4}(E(u + \psi, u + \psi; \Omega) - E(u - \psi, u - \psi; \Omega)), \quad (1.10)$$

$H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})$  – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на  $\gamma^{h,\varepsilon}$ , а  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  – скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Omega)^m$ , скалярном ( $m = 1$ ) или векторном ( $m > 1$ ). Последний верхний индекс 2 в формуле (1.8) указывает количество компонент у пробной вектор-функции  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ , но такой индекс не пишется в обозначениях скалярных произведений и норм.

Квадратичная форма (1.10) упругой энергии обладает полиномиальным свойством [3, 4]: для любой области  $\Xi \subset \mathbb{R}^2$  с липшицевой границей  $\partial\Xi$  и компактным замыканием  $\bar{\Xi} = \Xi \cup \partial\Xi$  справедливо высказывание

$$u \in H^1(\Xi)^2, \quad E(u, u; \Xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{R}|_\Xi. \quad (1.11)$$

Здесь  $\mathcal{R}$  – трехмерное линейное пространство жестких смещений, содержащее два поступательных смещения (коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$ ) и поворот (коэффициент  $b_0$ ),

$$\mathcal{R} = \{(b_1 - b_0x_2, b_2 + b_0x_1) \mid b_1 \in \mathbb{R}, q = 0, 1, 2\}. \quad (1.12)$$

Кроме того, выполнено неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Xi)\|^2 \leq c_\Xi(a(u, u; \Xi) + \|u; L^2(\Xi)\|^2). \quad (1.13)$$

При выполнении условия Дирихле на дуге  $\Upsilon \subset \partial\Xi$  положительной длины или трех условий ортогональности

$$\int_{\Xi} u_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \quad \int_{\Xi} (x_1 u_2(x) - x_2 u_1(x)) dx = 0 \quad (1.14)$$

последнюю лебегову норму можно удалить из неравенства (1.13).

Постановка условий Дирихле хотя бы на одной дуге положительной длины делает вариационную задачу (1.8) однозначно разрешимой, однако множитель  $c(h, \varepsilon)$  в соответствующей оценке ее решения

$$\|u; H^1(\Omega)\| \leq c(h, \varepsilon) \|f; L^2(\Omega)\| \quad (1.15)$$

зависит от геометрических параметров, и вывод соотношения

$$c(h, \varepsilon) \leq c_0(1 + |\ln \varepsilon|)^2 \quad (1.16)$$

с коэффициентом  $c_0$ , общим для всех малых  $h$  и  $\varepsilon$ , будет приведен в п. 5.

Один из первичных вопросов анализа эллиптических задач в областях с быстроосциллирующими границами или часто перемежающимися краевыми условиями разных типов – выяснить, к каким краевым условиям приводит предельный переход к нулевым значениям малых геометрических параметров. Исследованию подобных сингулярно возмущенных задач, скалярных или векторных и спектральных или статических, посвящено большое количество публикаций – упомянем книги [5–7] и статьи [8–22], в которых подобные и родственные краевые задачи изучались в разнообразных формулировках.

После определения предельной краевой задачи возникают вопросы о нахождении и оправдании асимптотики решений или собственных чисел и (вектор)-функций, которые в совокупности оказываются зачастую более трудными, например, из-за сложно устроенных разномасштабных пограничных слоев около периодически возмущенных границ и краевых условий. Особенно запутанным может оказаться асимптотический анализ класса задач с несколькими малыми параметрами в случае систем дифференциальных уравнений с частными производными, к которому относится и рассматриваемая задача теории упругости (1.1), (1.5), (1.6). Как правило, осложнения возникают из-за того, что предельные задачи, возникающие при разных соотношениях между параметрами, отличаются одна от другой, т.е. соответствующие асимптотические конструкции для решений исходной разнятся,

причем иногда в значительной степени. Так, далее в п. 2 и п. 3 возникают пограничные слои двух типов: экспоненциальный в  $ch$ -окрестности границы  $\Gamma$  и степенной в  $Ch\epsilon$ -окрестностях точек  $P_0, \dots, P_{J-1}$ .

Помимо построения асимптотики решения исходной задачи в настоящей работе реализуется иной подход, общепризнанный к механике (см. монографии [23, 24] и др.), но редко употребляемый в математике (ср. статьи [11] и [17] соответственно для скалярной и векторной краевых задач). В полученной далее модели задачи (1.1), (1.5), (1.6) с перемежающимися краевыми условиями Дирихле и Неймана понятные уравнения равновесия

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{j1}(\mathbf{u}; x) - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{j2}(\mathbf{u}; x) = f_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, \quad (1.17)$$

снабжаются краевыми условиями Винклера-Робэна<sup>1</sup> (ср. публикации [20, 22])

$$\mathbf{u}(0, s) = \mathbf{K}^{h,\epsilon}(s)\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s), \quad s \in \Gamma, \quad (1.18)$$

связывающими вектор смещений  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_s)$  с вектором нормальных напряжений

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; n, s) = (\sigma_{nn}(\mathbf{u}; n, s), \sigma_{sn}(\mathbf{u}; n, s)) \quad (1.19)$$

посредством симметричной и положительно определенной матрицей

$$\mathbf{K}^{h,\epsilon}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{nn}^{h,\epsilon}(s), & \mathbf{K}_{ns}^{h,\epsilon}(s) \\ \mathbf{K}_{sn}^{h,\epsilon}(s), & \mathbf{K}_{ss}^{h,\epsilon}(s) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Упомянутые векторы интерпретируются как столбцы и вместе с матрицей (1.20) (тензором второго ранга) записаны в локальных криволинейных координатах  $n, s$ , хотя декартовы компоненты вектора (1.19) имеют вид (1.7). Отвечающий задаче (1.17), (1.18) функционал упругой энергии

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \Omega) = \frac{1}{2}E(u, u; \Omega) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{K}^{h,\epsilon})^{-1} \mathbf{u} ds, \quad (1.21)$$

оказывается положительно определенной квадратичной формой в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)^2$  согласно неравенству Корна (1.13) при  $\Xi = \Omega$  и соотношению

$$\|\mathbf{u}; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c_{h,\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \Omega).$$

<sup>1</sup>Условиями упругой заделки в механической терминологии.

В последнем интеграле из (1.21) и далее точкой обозначено евклидово скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, вариационная постановка задачи (1.17), (1.18) сводится к интегральному тождеству

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, \psi; \Omega) = (f, \psi)_\Omega, \quad \psi \in H^1(\Omega)^2, \quad (1.22)$$

однозначно разрешимому в силу теоремы Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве. Таким образом, в силу локальных оценок решений эллиптических краевых задач (см. [25–27] и др.) единственное решение  $\mathbf{u}$  задачи (1.17), (1.18) с правой частью  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})^2$  является бесконечно дифференцируемым в области  $\Omega$  вплоть до ее границы. В частности, верны первичные оценки

$$\|\mathbf{u}; H^{s+1}(\Omega)\| \leq c_{h,\varepsilon}^s \|f; H^{s-1}(\Omega)\|, \quad s \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (1.23)$$

однако множители  $c_{h,\varepsilon}^s$  зависят от малых параметров  $h$  и  $\varepsilon$ . Уточнение оценки (1.23) при помощи подхода [28] приведено в предложении 5.1.

Основные трудности в построении модели (1.17), (1.18) составляют вывод явной формулы для матрицы (1.20) и оценивание разности решений  $u$  и  $\mathbf{u}$ , истинного и приближенного. Первый вопрос осложнен наличием двух разномасштабных пограничных слоев, а второй – применением соболевских норм с разнокалиберными весовыми множителями, необходимыми для достижения приемлемой точности оценок.

Обрисует кратко содержание статьи. В п. 2 и п. 3 представлена информация о краевых задачах, описывающих два пограничных слоя – экспоненциального, периодического в полуполосе  $\Pi$ , т.е. быстроосциллирующего, и локализованного в  $ch$ -окрестности края  $\Gamma$ , а также степенно-логарифмического в полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2$ , проявляющегося в  $Ch\varepsilon$ -окрестностях дуг  $\gamma_j^{h\varepsilon}$  и способствующего соблюдению условия Дирихле (1.5). В п. 4 производится сращивание этих пограничных слоев на расстоянии  $O(h\sqrt{\varepsilon})$  от точек  $P_0, \dots, P_{J-1}$  и выясняются энергетические характеристики первого из них (леммы 2.1, 3.2 и теорема 4.1). Эти и другие характеристики предельных задач в  $\Pi$  и  $\mathbb{R}_-^2$  востребованы в п. 5 при построении двучленной асимптотики решения задачи (1.1), (1.5), (1.6), составлении модели (1.17), (1.18) (теорема 7.3) и рассмотрении ее частных случаев (следствия 7.2 и 7.3) в двух ситуациях, а именно, при степенной зависимости параметров

$$\varepsilon = \varepsilon_0 h^{-m}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad m \geq 0, \quad (1.24)$$

для которой условие (1.18) трансформируется в условие Дирихле

$$\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.25)$$

и экспоненциальной зависимости

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-m/h}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad m > 0, \quad (1.26)$$

при которой условия Винклера–Робэна (1.18) приобретают постоянную матрицу  $\mathbf{K}^0 > 0$ , не зависящую от  $h$  и  $\varepsilon$ .

Обоснование асимптотики, в частности, оценка погрешности построенной модели посвящены два очередных пункта статьи. В п. 6 выводятся несколько весовых оценок, основанных на разнообразных вариантах одномерного неравенства Харди (см., например, лемму 6.4) и выводится априорная весовая оценка (6.25) решения задачи (1.1), (1.5), (1.6) (теорема 6.2), из которой, в частности, вытекают упрощенные соотношения (1.15), (1.16). В п. 7 конструируется глобальное асимптотическое приближение к решению исходной задачи, обрабатывается порожденная им невязка в интегральном тождестве (1.8) и, наконец, на основе априорной оценки (6.25) доказывается основная теорема 7.3 и ее следствия.

В заключительном п. 8 приводятся доступные обобщения и обсуждаются родственные вопросы, в частности, способы применения введенной модели и утверждения о сходимости решения  $u$  при  $h \rightarrow +0$  в ситуациях (1.24) и (1.26).

**2. Задача об экспоненциальном пограничном слое.** В полуполосе (см. рис. 2, а)

$$\Pi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_2| < 1/2, \xi_1 < 0\} \quad (2.1)$$

рассмотрим задачу теории упругости, состоящую из однородных (массовые силы отсутствуют) уравнений равновесия

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_1} \sigma_{j1}(w; \xi) - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \sigma_{j2}(w; \xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

с краевыми условиями на торце  $\varpi = \{\xi : |\xi_2| < 1/2, \xi_1 = 0\}$

$$w_j(0, \xi_2) = 0, \quad \xi \in v^\varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{j2}(w; 0, \xi_2) = g_j(\xi_2), \quad \xi \in \varsigma^\varepsilon = \varpi \setminus \overline{v^\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \quad (2.4)$$

и с условиями периодичности на боковых сторонах

$$\frac{\partial^p w}{\partial \xi_2} \left( \xi_1, \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial^p w}{\partial \xi_2} \left( \xi_1, -\frac{1}{2} \right), \quad \xi_2 < 0, \quad p = 0, 1. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) означают, что малый участок

$$v^\varepsilon := v^\varepsilon(a_\pm) = \{ \xi : \xi_2 \in (a_-\varepsilon, a_+\varepsilon), \xi_1 = 0 \} \quad (2.6)$$

жестко заземлен, а на остальной части  $\xi^\varepsilon$  торца  $\varpi$  задана внешняя нагрузка  $g = (g_1, g_2)$ . Эти краевые условия унаследованы от (1.5) и (1.6), но условия периодичности (2.5) назначены искусственно – они позволяют построить периодический экспоненциальный пограничный слой около края  $\Gamma$  пластины  $\Omega$ . Уравнения (2.2) получены из уравнений (1.1) в результате растяжения локальных координат

$$(n, s) \mapsto (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}n, h^{-1}s) \quad (2.7)$$

и, что особенно важно, интерпретации системы координат  $\xi$  как декартовой. Компоненты вектора смещений и тензора напряжений в криволинейных координатах имеют вид

$$u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2, \quad u_s = -n_2 u_1 + n_1 u_2,$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}(u) &= (\lambda + 2\mu) \partial_n u_n + \lambda \frac{1}{D} (\partial_s u_s + \varkappa u_n), \\ \sigma_{ss}(u) &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{D} (\partial_s u_s + \varkappa u_n) + \lambda \partial_n u_n, \\ \sigma_{ns}(u) &= \sigma_{sn}(u) = \mu \left( \partial_n u_s + \frac{1}{D} (\partial_s u_n - \varkappa u_s) \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $D(n, s) = 1 + n\varkappa(s)$  – якобиан, а  $\varkappa(s)$  – кривизна контура в точке  $s \in \Gamma$ . Кроме того, уравнения равновесия (1.1) в координатах  $n$  и  $s$  выглядят так:

$$\begin{aligned} -\partial_n \sigma_{nn}(u) - \frac{1}{D} (\partial_s \sigma_{ns}(u) + \varkappa (\sigma_{nn}(u) - \sigma_{ss}(u))) &= f_n, \\ -\partial_n \sigma_{sn}(u) - \frac{1}{D} (\partial_s \sigma_{nn}(u) + 2\varkappa \sigma_{sn}(u)) &= f_s. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следовательно, замена (2.7) и формальный переход к  $\varepsilon = 0$ , во-первых, сохраняют формулы (1.2) для напряжений  $\sigma_{jk}(w; \xi)$  и, во-вторых, не изменяют строения уравнений равновесия в новых координатах.



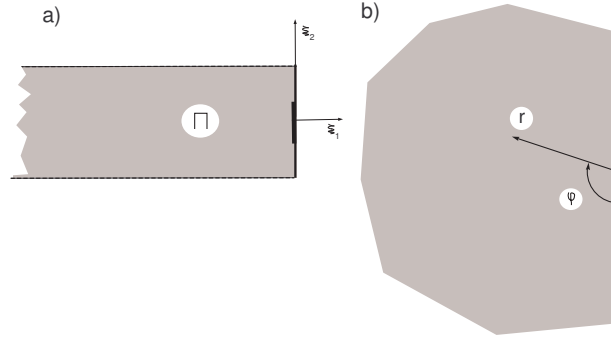


Рис. 2. Полуполоса (а) и полуплоскость (b), на границах которых участки Дирихле выделены полужирными линиями.

Из общих результатов [4] вытекает, что благодаря постановке условий Дирихле на отрезке (2.6) при любой нагрузке  $g \in L^2(\zeta^\varepsilon)^2$  задача (2.2)–(2.4) в вариационной постановке

$$E(w, \varphi; \Pi) = (g, \psi)_{\zeta^\varepsilon}, \quad \varphi \in \mathcal{E}_{0, \text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2,$$

имеет единственное решение  $w$  в энергетическом пространстве  $\mathcal{E}_{0, \text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$ , полученном как пополнение по норме

$$E(w, w; \Pi)^{1/2} \quad (2.10)$$

(см. формулу (1.9)) линейного множества  $C_{c, \text{per}}^\infty(\overline{\Pi} \setminus \overline{v^\varepsilon})^2$  (бесконечно дифференцируемые 1-периодические по переменной  $\xi_2$  вектор-функции с компактными носителями, обращающиеся в нуль около отрезка (2.6)). Неравенство Корна (1.13) на квадрате  $\Xi = (-1/2, 1/2) \times (-1, 0)$ , принимающее вид

$$\|w; H^1(\Xi)\|^2 \leq c_\varepsilon E(w, w; \Xi) \quad (2.11)$$

в силу условия Дирихле (2.3), и одномерное неравенство Харди

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} |W(t)|^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} \left| \frac{dW}{dt}(t) \right|^2 dt, \quad W \in C_c^1(0, +\infty), \quad (2.12)$$

примененное к произведению  $W(-\xi_1) = (1 - \chi(\xi_1))w(\xi_1, \xi_2)$  и проинтегрированное по  $\xi_2 \in (-1/2, 1/2)$ , показывают, что норма (2.10) эквивалентна весовой норме

$$\|w; \mathcal{E}(\Pi)\| = (\|\nabla_\xi w; L^2(\Pi)\|^2 + \|(1 + \xi_1^2)^{-1/2}w; L^2(\Pi)\|^2)^{1/2}. \quad (2.13)$$

При этом ограничение  $W(0) = 0$ , затребованное в (2.12), обеспечено введением срезающей функции  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , для которой

$$\chi(t) = 1 \quad \text{при } |t| < 1/2, \quad \chi(t) = 0 \quad \text{при } |t| > 1. \quad (2.14)$$

Подчеркнем, что постоянная эквивалентности для обсуждаемых норм зависит от малого параметра  $\varepsilon$  – см. следствие 6.1.

Пространство  $\mathcal{E}_{\text{per}}(\Pi)^2$  с нормой (2.13) (без условий Дирихле (2.3), но с первым ( $p = 0$ ) условием периодичности (2.5)) включает постоянные векторы – для них конечна норма (2.13) и их можно приблизить вектор-функциями из  $C_{c,\text{per}}^\infty(\overline{\Pi})^2$  по полунорме (2.10).

Локальные оценки решений эллиптических задач (см. [25, 26] и [27]) показывают, что решение  $w \in \mathcal{E}_{0,\text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$  оказывается бесконечно дифференцируемым вне окрестностей концов  $(a_\pm \varepsilon, 0)$  отрезка  $v^\varepsilon$ . Кроме того, теория Кондратьева [29] (см. также [30, гл. 5, §1] и [4, §3 и пример 1.12]) предоставляет разложение

$$w(\xi) = b + \tilde{w}(\xi), \quad (2.15)$$

где  $b \in \mathbb{R}^2$ , а для остатка  $\tilde{w}$  справедливо включение  $e^{-\kappa \xi_1} w \in H^l(\Pi \setminus \Pi(\varrho))^2$  при некотором  $\kappa > 0$  и любых  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\varrho \in \mathbb{R}_+$ , т.е. вектор-функция (2.15) стабилизируется к постоянному вектору  $b$  с экспоненциальной скоростью.

Далее будут востребованы два специальных решения  $\mathbf{w}^1$  и  $\mathbf{w}^2$  однородной ( $g = 0$ ) задачи (2.2)–(2.5) с линейным ростом на бесконечности. Ищем их в виде

$$\mathbf{w}^j(\xi) = \xi_1 e_{(j)} + \widehat{\mathbf{w}}^j(\xi), \quad j = 1, 2, \quad (2.16)$$

где  $e_{(1)} = (1, 0)$  и  $e_{(2)} = (0, 1)$ , а  $\widehat{\mathbf{w}}^j \in \mathcal{E}_{0,\text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$  – решение задачи (2.2)–(2.5) с правыми частями

$$\mathbf{g}^1(\xi_2) = -(\lambda + 2\mu, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{g}^2(\xi_2) = -(0, \mu). \quad (2.17)$$

Нужные решения (2.16) существуют и допускают представления

$$\mathbf{w}^q(\xi) = \xi_1 e_{(q)} - \mathcal{W}^q + \tilde{\mathbf{w}}^q(\xi) \quad (2.18)$$

с экспоненциально затухающими остатками (ср. формулу (2.15)) и столбцами  $\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2$ , из которых составим числовую матрицу  $\mathcal{W}$  размером  $2 \times 2$ .

Вектор-функции (2.16) и (3.1) бесконечно дифференцируемы вне любой окрестности замыкания отрезка (2.6). Более того, верны неравенства

$$\left| \nabla_{\xi}^p \tilde{\mathbf{w}}^q(\xi) \right| \leq c_{p,\delta} e^{\kappa \xi_1}, \quad \xi_1 \leq -\delta, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad (2.19)$$

где  $\kappa$  – некоторый зафиксированный в дальнейшем положительный показатель, а  $\delta > 0$  – любое число.

**Лемма 2.1.** *Матрица  $\mathcal{W}\Lambda$  симметрична и положительно определена; здесь  $\Lambda = \text{diag}\{\mu, \lambda + 2\mu\}$  – диагональная  $(2 \times 2)$ -матрица.*

**Доказательство.** В формулу Грина на длинном  $(R \rightarrow +\infty)$  прямоугольнике  $\Pi(R) = (-R, 0) \times (-1/2, 1/2)$  подставим вектор-функции  $\widehat{\mathbf{w}}^p$  и  $\mathbf{w}^q$ . Переходя к пределу при  $R \rightarrow +\infty$ , получаем равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_{qq} \mathcal{W}_q^p &= \sum_{j=1,2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{W}_j^p(0, \xi_2) \sigma_{j1}(\xi_1 e_{(q)}) d\xi_2 \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{j=1,2} \int_{-1/2}^{1/2} (\mathbf{w}_j^q(\xi) \sigma_{j1}(\widehat{\mathbf{w}}^p; \xi) - \widehat{\mathbf{w}}_j^p(\xi) \sigma_{j1}(\widehat{\mathbf{w}}^q; \xi)) \Big|_{\xi_1 = -R} d\xi_2 \\ &= \sum_{j=1,2} \int_{-1/2}^{1/2} (\mathbf{w}_j^q(\xi) \sigma_{j2}(\widehat{\mathbf{w}}^p; \xi) - \widehat{\mathbf{w}}_j^p(\xi) \sigma_{j2}(\mathbf{w}^q; \xi)) \Big|_{\xi_1 = 0} d\xi_2 \\ &= \sum_{j=1,2} \int_{\zeta^\varepsilon} \widehat{\mathbf{w}}_j^q(0, \xi_2) \sigma_{j2}(\widehat{\mathbf{w}}^p; 0, \xi_2) d\xi_2 = a(\widehat{\mathbf{w}}^q, \widehat{\mathbf{w}}^p; \Pi). \end{aligned}$$

В конце цепочки возникли элементы симметричной матрицы Грама, построенной по линейно независимым (в силу различия правых частей (2.17) краевых условий ()) вектор-функциям  $\widehat{\mathbf{w}}^1, \widehat{\mathbf{w}}^2 \in \mathcal{E}_{0,\text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$  и потому положительно определенная.  $\square$

Матрица  $\mathcal{W}$ , как и отрезок (2.6), на котором поставлены условия Дирихле (2.3), зависит от параметров  $a_{\pm}$  и  $\varepsilon > 0$ . Для выяснения этой зависимости согласно общим асимптотическим процедурам [7, гл. 5] нужно построить пограничный слой около короткого отрезка  $v^\varepsilon$ .

**3. Степенной пограничный слой.** Растяжение координат

$$\xi \mapsto \eta = \varepsilon^{-1}\xi \quad (3.1)$$

и формальный переход к  $\varepsilon = 0$  трансформирует полуполосу (2.1) в нижнюю полуплоскость (рис. 2, b)

$$\mathbb{R}_-^2 = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_2 \in \mathbb{R}, \eta_1 < 0\},$$

а задачу (2.2)–(2.5) – в смешанную краевую задачу для системы уравнений теории упругости

$$-\frac{\partial}{\partial \eta_1} \sigma_{j1}(v; \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \sigma_{j2}(v; \eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}_-^2, \quad j = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$v_j(0, \eta_2) = 0, \quad \eta_2 \in v^1 := (a_-, a_+), \quad j = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$\sigma_{j2}(v; 0, \eta_2) = 0, \quad \eta_2 \in \varsigma^1 := (-\infty, a_-) \cup (a_+, +\infty), \quad j = 1, 2. \quad (3.4)$$

Интерес представляют именно решения однородной задачи (3.2)–(3.4), которые обязательно приобретают рост при  $\rho = |\eta| \rightarrow +\infty$ , так как неоднородная задача, например, с гладкими финитными массовыми силами в дифференциальных уравнениях (3.2) однозначно разрешима в классе ограниченных вектор-функций. Для того чтобы проверить этот факт, введем энергетическое пространство  $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}_-^2; v^1)^2$  как пополнение линейного множества  $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_-^2} \setminus \overline{v^1})^2$  по норме  $a(v, v; \mathbb{R}_-^2)^{1/2}$ . В силу одномерного неравенства Харди с логарифмом<sup>2</sup>

$$\int_R^{+\infty} |V(\rho)|^2 \left( \ln \frac{\rho}{R} \right)^{-2} \frac{d\rho}{\rho} \leq 4 \int_R^{+\infty} \left| \frac{dV}{d\rho}(\rho) \right|^2 \rho d\rho, \quad V \in C_c^1(R, +\infty), \quad (3.5)$$

энергетическая норма эквивалентна весовой норме

$$\begin{aligned} \|v; \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)\| &= (\|\nabla_x v; L^2(\mathbb{R}_+^2)\|)^2 \\ &+ \|(1 + \rho)^{-1} (1 + \ln(1 + \rho))^{-1} v; L^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

При этом неравенство (3.5) применяется к произведению  $(1 - \chi(\frac{\rho}{4R}))v(\rho, \varphi)$ , где  $\chi$  – эталонная срезающая функция (2.14), и

<sup>2</sup>Оно получается из неравенства (2.12) при помощи замены  $t \mapsto \rho = e^t$ .

интегрируется по угловой переменной  $\varphi \in (0, \pi)$  при учете соотношений  $dx = \rho d\rho d\varphi$  и  $\nabla_x = (\partial_\rho, \rho^{-1}\partial_\varphi)$  для системы полярных координат  $(\rho, \varphi)$ . Кроме того, используется неравенство Корна (2.11) в полукруге  $\{\xi \in \mathbb{R}_-^2 : \rho < 2R\}$  с радиусом  $2R > 2 \max\{|a_+|, |a_-|\}$ , обеспеченное условием Дирихле (3.3). Постоянный вектор  $c \in \mathbb{R}^2$ , умноженный на срезку  $1 - \chi(\rho/4R)$ , попадает в пространство  $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}_-^2; v^1)^2$ . Наконец, теория Кондратьева [29], конкретизированная в [4, § 2 и пример 1.12] на основе полиномиального свойства (1.11), показывает, что, во-первых, главным членом асимптотики на бесконечности решения  $v \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}_-^2; v^1)^2$  задачи (3.2)–(3.4) с правой частью  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_-^2)^2$  служит постоянный вектор и, во-вторых, около концов отрезка  $v^1$  напряжения  $\sigma_{jk}(v; \xi)$  приобретают корневые сингулярности, но сами смещения  $v_j(\xi)$  остаются ограниченными.

Упругая изотропная полуплоскость с разнообразными краевыми условиями, имитирующими штамп, трещину и пр., – классический объект исследований в двумерной теории упругости. К сожалению, авторы не нашли явного решения рассматриваемой задачи (3.2)–(3.4). Вместе с тем нетрудно предсказать, что растущее слагаемое  $\Phi^q(\eta)$  на бесконечности – решение задачи Фламанна<sup>3</sup> о сосредоточенных нормальной ( $j = 1$ ) или касательной ( $j = 2$ ) силах в точке  $\eta = 0$  на границе  $\partial\mathbb{R}_-^2$ . Решения Фламанна характеризуются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\Phi^1; \eta) &= -\frac{2 \sin \varphi}{\pi} \frac{\varphi}{\rho}, & \sigma_{\rho\rho}(\Phi^2; \eta) &= \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \frac{\varphi}{\rho}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\Phi^j; \eta) &= 0, & \sigma_{\rho\varphi}(\Phi^j; \eta) &= \sigma_{\varphi\rho}(\Phi^j; \eta) = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \varphi)$  – система полярных координат (рис. 2,b), а компоненты тензора напряжений и вектора смещений соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(v) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \lambda \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_\rho \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(v) &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\rho}{\rho} \right) + \lambda \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}, \\ \sigma_{\rho\varphi}(v) &= \sigma_{\varphi\rho}(v) = \mu \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \right), \end{aligned}$$

и

$$v_\rho = -v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad v_\varphi = v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi. \quad (3.7)$$

<sup>3</sup>Частный случай тензора Буссинеска–Чарутти; см. книги [24, 31].

Приведенные равенства показывают, что, во-первых,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}_R^-} ((e_{(q)})_\rho \sigma_{\rho\rho}(\Phi^p; \eta) + (e_{(q)})_\varphi \sigma_{\rho\varphi}(\Phi^p; \eta)) ds_\eta \\ &= \int_{\mathbb{S}_R^-} (e_{(q)})_\rho \sigma_{\rho\rho}(\Phi^p; \eta) ds_\eta = \delta_{p,q}, \quad p, q = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\mathbb{S}_R^- = \{\eta : \rho = R, \varphi \in (0, \pi)\}$  — полуокружность, и во-вторых,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_\rho^1(\eta) &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\sin \varphi}{2\pi\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_\rho^2(\eta) &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{\cos \varphi}{2\pi\rho}, \end{aligned}$$

а значит,

$$\begin{aligned} \Phi_\rho^1(\eta) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \ln \rho \sin \varphi - \Phi_\rho^{0,1}(\varphi), \\ \Phi_\rho^2(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \ln \rho \cos \varphi + \Phi_\rho^{0,2}(\varphi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Соотношения (3.8) и (3.6), (3.7) означают, что в самом деле  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$  —  $(2 \times 2)$ -матрица Грина задачи теории упругости с особенностью в начале координат  $\mathcal{O}$  на границе полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2$ .

Благодаря полиномиальному свойству (1.11) формулы из [4, § 2 и пример 1.12] обеспечивают равенство

$$\Phi(\eta) = A \ln \rho + \Phi^0(\varphi), \quad (3.10)$$

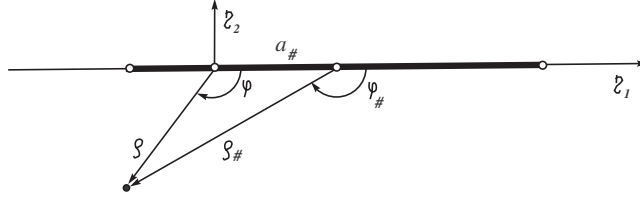
в котором  $A$  — какая-то числовая матрица размером  $2 \times 2$ , а  $\Phi^0$  — гладкая матрица-функция угловой переменной  $\varphi \in [0, \pi]$  того же размера. В согласии с формулами (3.9) и (3.7) находим, что

$$A = A_0 \mathbb{I}_2, \quad \text{где} \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \in \mathbb{R}_+, \quad (3.11)$$

причем  $\mathbb{I}_m$  — единичная  $(m \times m)$ -матрица. Явное выражение для  $\Phi^0(\varphi)$  востребовано не будет.

Далее понадобятся решения задачи (3.2)–(3.4), обладающие логарифмическим ростом на бесконечности и допускающее представление

$$\mathbf{v}^q(\eta) = (1 - \chi_v(\eta))(\Phi^q(\eta) + \mathcal{V}^q) + \tilde{\mathbf{v}}^q(\eta), \quad q = 1, 2, \quad (3.12)$$

Рис. 3. Связь систем полярных координат  $(\rho, \varphi)$  и  $(\rho\#, \varphi\#)$ .

где  $\mathcal{V}^q \in \mathbb{R}^2$  – столбцы, зависящие от параметров  $a_{\pm}$ , для остатков выполнены неравенства

$$|\nabla_{\eta}^k \tilde{\mathbf{v}}^q(\eta)| \leq c_k \rho^{-1-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \rho > R, \quad (3.13)$$

а  $\chi_v \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$  – срезающая функция, равная нулю при  $|\eta| < 1/2$  и единице в окрестности замкнутого отрезка

$$\left\{ \eta : \eta_2 = 0, \eta_1 \in \left[ \min_{s \in \Gamma} a_-(s), \max_{s \in \Gamma} a_+(s) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

содержащего отрезки  $v^1(a_{\pm}(s))$  при всех  $s \in \Gamma$  (см. формулы (2.6) и (1.4)). Известно, что производные порядка  $q$  вектор-функции (3.12) имеют сингулярности в концах  $Q_{\pm} = (a_{\pm}, 0)$  отрезка  $v^1$ , т.е.

$$|\nabla_{\eta}^p \mathbf{v}^q(\eta)| = O(|\eta - Q_{\pm}|^{-p+1/2}) \quad \text{при } \xi \rightarrow Q_{\pm}, \quad p \in \mathbb{N},$$

и сделанный выбор радиуса  $R > \max\{|a_+|, |a_-|\}$  исключает окрестности точек  $Q_{\pm}$  из оценок (3.13). Впрочем, далее будет использован тот факт, что

$$\eta_1 \nabla_{\eta}^2 \mathbf{v}^q, \nabla_{\eta} \mathbf{v}^q \in H^1(\mathcal{B}_R)^2. \quad (3.15)$$

Опишем зависимость числовой  $(2 \times 2)$ -матрицы  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2)$  от параметров  $a_{\pm}$ . Сделаем аффинную замену координат

$$\eta \mapsto \eta^{\#} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \eta_1, \eta_2 - a_{\#} \end{pmatrix}, \quad a = a_+ - a_- > 0, \quad a_{\#} = \frac{a_+ + a_-}{2}$$

переводящую отрезок  $v^1$  в единичный отрезок  $\{\eta^{\#} : |\eta_2^{\#}| < 1/2, \eta_1^{\#} = 0\}$ , и заметим, что полярные координаты, исходные  $(\rho, \varphi)$  и новые  $(\rho\#, \varphi\#)$ , находятся в отношении

$$\rho = a\rho\#(1 + O(\rho\#^{-1})), \quad \varphi = \varphi\# + O(\rho\#^{-1})$$

(см. рис. 3). В результате получаем, что

$$\Phi(\eta) = \Phi(\eta^\#) + A \ln a + O(\rho_\#^{-1})$$

и

$$\mathcal{V}(a_\pm) = A \ln a + \mathcal{V}_0 \quad (3.16)$$

где  $\mathcal{V}_0 = (\mathcal{V}_0^1, \mathcal{V}_0^2)$  и  $\mathcal{V}_0^j$  – столбец в разложении решений (3.12) при  $a_\pm = \pm 1/2$ . Матрица  $\mathcal{V}_0$  является диагональной ввиду симметрии задачи относительно оси ординат.

**Лемма 3.2.** *Матрица  $\mathcal{V}(a_\pm) = (\mathcal{V}^1(a_\pm), \mathcal{V}^1(a_\pm))$  коэффициентов в разложениях решений (3.12) задачи (3.2)–(3.4) с условиями Дирихле на отрезке  $v^1 = \{\eta : \eta_2 \in (a_-, a_+), \eta_1 = 0\} \subset \partial\mathbb{R}_-^2$  является диагональной и принимает вид (3.16), т.е. зависит только от длины  $a = a_+ - a_-$  отрезка и постоянных Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ .*

**4. Процедура сращивания.** Для того чтобы закончить построение асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow +0$  матрицы  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^\varepsilon(a_\pm)$  в представлении (2.18) решений (2.16) однородной задачи (2.2)–(2.4) нужно задействовать еще одну матрицу Грина  $G = (G^1, G^2)$ , столбцы которой суть решения системы уравнений равновесия (2.2) в полуполосе  $\Pi$  с условиями периодичности (2.5) на ее боковых сторонах и сингулярными условиями на торце

$$\sigma_{j2}(G^k; 0, \xi_2) = \delta_{j,k} \delta(\xi_2), \quad \xi_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, 2, \quad (4.1)$$

в которых фигурирует символ Кронекера  $\delta_{j,k}$ , но и дельта-функция Дирака  $\delta$ . В рамках теории распределений задача (2.2), (4.1), (2.5) имеет решение, которое в силу соотношений (3.6) и (3.8) допускает представление

$$G^k(\xi) = \Phi^k(\xi) + \widehat{G}^k(\xi) = \Phi^k(\xi) + \mathcal{G}^k + \widetilde{G}^k(\xi), \quad (4.2)$$

где  $\widehat{G}^k$  – гладкая в окрестности начала координат вектор-функция и  $\mathcal{G}^k = \widehat{G}^k(\mathcal{O})$ ,

$$\left| \widetilde{G}^k(\xi) \right| = O(r), \quad \left| \nabla_\xi \widetilde{G}^k(\xi) \right| = O(1), \quad r = |\xi| \rightarrow +0.$$

Кроме того, учитывая, что решение  $G^k$  определено с точностью до постоянного столбца, назначаем представление

$$G^k(\xi) = -B^k \xi_2 + \widetilde{G}^k(\xi), \quad \xi_1 \rightarrow -\infty, \quad (4.3)$$



с некоторым столбцом  $B^k$  и экспоненциально затухающим остатком  $\tilde{G}^k$ . Отсутствие в (4.3) постоянного слагаемого однозначно фиксирует как матрицу-функцию  $G$ , так и числовые матрицы  $B$  и  $\mathcal{G}$ .

**Лемма 4.3.** *Матрица  $B = (B^1, B^2)$ , составленная из столбцов в представлениях (4.3) совпадает с матрицей  $\Lambda^{-1}$ , обратной для матрицы  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda + 2\mu, \mu\}$  из леммы 2.1.*

**Доказательство.** В формулу Грина на множестве

$$\Pi_{\subset}(R) = \{\xi \in \Pi : \xi_2 > -R, r > 1/R\}$$

подставим вектор-функции  $G^k$  и  $e_{(p)}$ . Выполнив предельный переход при  $R \rightarrow +\infty$ , получаем при учете соотношений (2.16) и (3.8) нужную цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \Lambda_{pj} B_j^k &= - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{1q}(G^k, R - \xi_2) d\xi_2 \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_{1/R}^-} \sigma_{\rho\rho}(G^k; \xi)(e_{(q)})_{\rho} ds_{\xi} = \delta_{k,q}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

□

Отметим, что благодаря симметрии задачи (2.2), (4.1), (2.5) относительно оси  $\eta_2$ , средней линии полуполосы (2.1), матрица  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2)$  со столбцами из разложений (4.2) оказывается диагональной, так как  $G_1^1, G_2^2$  – четные, а  $G_2^1, G_1^2$  – нечетные функции переменной  $\xi_1$ .

Матрицы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{V}_0$ , появившиеся в (4.2) и (3.16), зависят только от постоянных Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , однако, к сожалению, их явный вид остался неизвестным. Более того, не удастся выяснить их знакоопределенность.

Приступим к построению асимптотики симметричной и положительно определенной матрицы  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\varepsilon}(a_{\pm})$  из леммы 2.1. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [32, 33], [7, гл. 2] и др. монографии). В качестве внешнего, справедливого на удалении от мелкого отрезка (2.6), разложение матрицы-функции  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2)$ , составленной из решений (2.18) однородной задачи (2.2)–(2.5), возьмем сумму

$$\mathbf{w}(\xi) = -G(\xi)\Lambda + C^{\varepsilon} + \dots, \quad (4.5)$$

где  $C^\varepsilon = (C_{jk}^\varepsilon)_{j,k=1}^2$  – числовая матрица, подлежащая определению, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе. В силу формулы (4.3) и леммы 4.3 первое слагаемое в правой части (4.5) растет на бесконечности как  $V\Lambda\xi_1 = \mathbb{I}_2\xi_1$ , что согласуется с представлениями (2.18).

Внутреннее разложение, пригодное в непосредственной близости к исчезающе малому отрезку  $v^\varepsilon$ , ищем в виде

$$\mathbf{w}(\xi) = -\mathbf{v}(\eta)\Lambda + \dots, \quad (4.6)$$

причем решения (3.12) задачи (3.2)–(3.4) объединены в матрицу  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ . Согласно представлениям (4.2) и (3.12) логарифмические сингулярности в главных членах разложений (4.5) при  $r \rightarrow +0$  и (4.6) при  $\rho \rightarrow +\infty$  совпадают.

Согласуем постоянные члены разложений. При учете замены координат (3.1) имеем  $\rho = \varepsilon^{-1}r$ , а значит, в силу формул (3.12) и (3.10) находим, что

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}(\eta)\Lambda &= -(\Phi(\eta) + \mathcal{V}(a_\pm) + \dots)\Lambda \\ &= -(\Phi(\xi) - A \ln \varepsilon + \mathcal{V}(a_\pm) + \dots)\Lambda \end{aligned} \quad (4.7)$$

и, следовательно, процедура сращивания разложений (4.5), (4.2) и (4.6), (4.7) дает равенство

$$C^\varepsilon - \mathcal{G}\Lambda = A\Lambda \ln \varepsilon - \mathcal{V}(a_\pm)\Lambda.$$

Теперь, сравнивая представления (2.18) и (4.5), приходим к соотношению

$$\mathcal{W}^\varepsilon(a_\pm) = (A|\ln \varepsilon| + \mathcal{V}(a_\pm) - \mathcal{G})\Lambda + \widetilde{\mathcal{W}}^\varepsilon(a_\pm). \quad (4.8)$$

Малость остатка  $\widetilde{\mathcal{W}}^\varepsilon(a_\pm)$  в асимптотике (4.8) выводится по стандартной схеме (см. [7, гл. 5]) при помощи оценки (6.10) из следствия 6.1.

**Теорема 4.1.** *Остаток в асимптотической формуле (4.8) для матрицы коэффициентов из представлений (2.18) линейно растущих решений  $\mathbf{w}^j$  однородной задачи (2.2)–(2.5) допускает оценку*

$$\|\widetilde{\mathcal{W}}^\varepsilon(a_\pm); \mathbb{R}^{2 \times 2}\| \leq c\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|),$$

в которой множитель с не зависит от параметра  $\varepsilon \in (0, 1]$ .

**5. Вывод асимптотической модели.** Для построения асимптотики решения  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  задачи (1.1), (1.5), (1.6) опять применим метод сращиваемых разложений. В качестве главного члена внешнего

разложения, приемлемого вне малой окрестности границы  $\Gamma = \partial\Omega$ , возьмем гладкое в  $\bar{\Omega}$  поле смещений  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющее прежним уравнениям равновесия (1.1). Применим формулу Тейлора относительно переменной  $n$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(0, s) + n\partial_n \mathbf{u}(0, s) + \tilde{\mathbf{u}}(n, s), \quad \tilde{\mathbf{u}}(n, s) = O(n^2), \quad (5.1)$$

которое перепишем в растянутых координатах  $\xi$  из формулы (2.7):

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(0, s) + h\xi_2\partial_n \mathbf{u}(0, s) + O(h^2\xi_2^2). \quad (5.2)$$

Воспользовавшись процедурой сращивания, заключаем, что первое внутреннее разложение около края  $\Gamma$ , но на удалении от мелких дуг (1.3) имеет вид

$$u(x) = \mathbf{u}(0, s) - hG\left(\frac{n}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon}\right)\Lambda\partial_n \mathbf{u}(0, s) + hw'\left(\frac{n}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon}; s\right) + \dots \quad (5.3)$$

Эта формула нуждается в пояснениях. Во-первых, векторы смещений записаны в локальной системе координат  $(n, s)$ . Во-вторых, матрица  $\Lambda = B^{-1} = \text{diag}\{\lambda + 2\mu, \mu\}$  приписана множителем при матрице Грина  $G = (G^1, G^2)$  для того, чтобы согласовать линейные члены в разложениях (5.2) и (5.3) при учете представления (4.3) и леммы 4.3. В-третьих, последний отделенный член  $hw'$  требуется для компенсации невязок, оставленных главным членом  $\mathbf{u}(0, s)$ , причем величина  $w'(\xi; s)$  должна затухать при  $\xi_2 \rightarrow -\infty$ . Упомянутые невязки в уравнениях равновесия суть  $O(1)$ , а значит, периодическая по переменной  $\xi_1$  вектор-функция удовлетворяет однородной системе (2.2) в полуполосе  $\Pi$ , однако невязки того же порядка в краевых условиях (1.6) приводят к неоднородным условиям Неймана на торце полуполосы

$$\sigma_{j1}(w'; 0, \xi_2; s) = -g'_j(s), \quad \xi_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (5.4)$$

где  $g' = (g'_1, g'_2)$  и

$$\begin{aligned} g'_1(s) &= \lambda(\partial_s \mathbf{u}_s(0, s) + \varkappa(s)\mathbf{u}_n(0, s)), \\ g'_2(s) &= \mu(\partial_s \mathbf{u}_n(0, s) - \varkappa(s)\mathbf{u}_s(0, s)). \end{aligned} \quad (5.5)$$

В краевых условиях (5.4) начало координат исключено из торца  $\varpi$ , а значит, в этих условиях допускается дельта-функция Дирака (ср. формулу (4.1)), коэффициенты при которых подбираем так, чтобы обеспечить затухание решения задачи (2.2), (5.4), (2.5). Поскольку величины (5.5) не зависят от переменной  $\xi_1$ , положим

$$w'(\xi; s) = -\Lambda^{-1}\xi_1 g'(s) - G(\xi)g'(s). \quad (5.6)$$

При этом согласно формуле (4.3) и связи матриц  $\Lambda$  и  $B$ , указанной леммой 4.3, линейный рост слагаемых в правой части (5.6) взаимно уничтожается, т.е. вектор-функция  $w'$  действительно приобретает экспоненциальное затухание при  $\xi_1 \rightarrow -\infty$ .

Теперь произведем сращивание разложения (5.3) с разложениями около точек  $P_0, \dots, P_{J-1}$ , записанными при помощи “сверхбыстрых” переменных (ср. замену координат (3.1))

$$\eta^j = (h\varepsilon)^{-1}(n, s - s_j), \quad (5.7)$$

а именно,

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(\eta^j)\mathbf{c} + \dots \quad (5.8)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) - (2 \times 2)$ -матрица, составленная из решений  $\mathbf{v}^j$  задачи (3.2)–(3.4), а  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) -$  столбец, подлежащий определению. Обратная для (5.7) замена придает разложению (5.8) следующий вид:

$$\mathbf{u}(x) = (\Phi(\xi) + A|\ln \varepsilon| + \mathcal{V}(a_{\pm}(s_j)) + \dots)\mathbf{c}. \quad (5.9)$$

При этом  $\mathcal{V}(a_{\pm}) -$  матрица коэффициентов в разложениях (3.12), зависящая от размеров  $a_{\pm}$  участка Дирихле (2.6). Согласно формулам (5.6) и (4.2) превращаем разложение (5.3) в такое:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(0, s) - h(\Phi(\xi) + \mathcal{G}) \underbrace{(\Lambda \partial_n \mathbf{u}(0, s) + g'(s))}_{\dots} + \dots \quad (5.10)$$

Заметим, что в силу соотношений (2.8) и (5.5) выражение, отмеченное в (5.10) фигурной скобкой снизу, – вектор нормальных напряжений (1.19) с декартовыми компонентами (1.7). Сравнивая в (5.9) и (5.10) множители при сингулярной составляющей  $\Phi(\xi)$ , а затем и постоянные векторы, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= -h\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s), \\ (A|\ln \varepsilon| + \mathcal{V})\mathbf{c} &= \mathbf{u}(0, s) - h\mathcal{G}\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Исключая из системы (5.11) столбец  $\mathbf{c}$ , приходим к краевому условию Винклера–Робэна (1.18), в котором матрица (1.20) имеет вид

$$\mathbf{K}^{h,\varepsilon}(s) = h(A|\ln \varepsilon| + \mathcal{V}(a_{\pm}(s)) + \mathcal{G}), \quad (5.12)$$

являясь симметричной и при малом  $\varepsilon > 0$  положительно определенной.

Итак, модель (1.17), (1.18) задачи (1.1), (1.5), (1.6) построена. Границы ее при применимости будут установлены в следующем пункте. Осталось упомянуть, что в ситуации (1.24) матрица (5.12) приобретает

порядок  $h$ , а значит, в пределе при  $h \rightarrow +0$  краевое условие (1.18) превращается в условие Дирихле (1.25), однако в ситуации (1.26) согласно формуле (3.11) тот же предельный переход приводит к условию

$$\mathbf{u}(0, s) + \frac{m}{2\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s) = 0, \quad s \in \Gamma, \quad (5.13)$$

с множителем  $m = \lim_{h \rightarrow +0} h^{-1} |\ln \varepsilon| > 0$ .

Если оценки

$$\|\mathbf{u}; H^{s+1}(\Omega)\| \leq c_s \|f; H^{s-1}(\Omega)\|, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (5.14)$$

для решений задач (1.17), (1.25) и (1.17), (5.13), не зависящих от параметров  $h$  и  $\varepsilon$ , очевидны, то те же оценки для решений задачи (1.17), (1.18) с матрицей (5.12), для которой выполнено неравенство

$$b \cdot \mathbf{K}^{h, \varepsilon}(s)^{-1} b \geq c_k h^{-1} (1 + |\ln \varepsilon|^{-1}) |b|^2, \quad b \in \mathbb{R}^2, \quad c_k > 0, \quad (5.15)$$

нуждаются в уточнении, так как требуется еще выяснить зависимость множителей  $c_s$  от параметров  $h$  и  $\varepsilon$ . Сформулируем неравенство, которое можно вывести при помощи разработанного в статье [28] приема в случае

$$\mathbf{h} := h(1 + |\varepsilon|) \leq \mathbf{h}_0 \text{ при } h \in (0, h_0], \quad (5.16)$$

где  $\mathbf{h}_0$  и  $h_0$  – некоторые положительные величины. В этой статье выведена априорная оценка решения уравнения Пуассона с краевым условием Робэна, содержащего малый параметр при нормальной производной. Поскольку в [28] использовались только локальные оценки решений эллиптических краевых задач и регуляризаторы для них, представленные общими результатами [25, 26], упомянутые приемы приспособляются, в частности, к системе уравнений теории упругости с условиями Винклера–Робэна, содержащими малый параметр.

**Предложение 5.1.** *Если выполнено ограничение (5.16) и  $f \in H^s(\Omega)^2$  при  $s \in \mathbb{N}$ , решение  $\mathbf{u} \in H^{s+2}(\Omega)^2$  задачи (1.17), (1.18) с матрицей (5.12) удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{h} \|\mathbf{u}; H^{s+2}(\Omega)\| + \|\mathbf{u}; H^{s+1}(\Omega)\| \leq c_s (\mathbf{h} \|f; H^s(\Omega)\| + \|f; H^{s-1}(\Omega)\|), \quad (5.17)$$

причем множитель  $c_s$  не зависит от параметра  $\mathbf{h}$ .

Формула (5.17) гарантирует, что решение задачи (1.17), (1.18) с правой частью  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$  оказывается гладким в области  $\Omega$  вплоть до

ее границы, причем все производные оказываются равномерно ограниченными относительно параметра  $\mathbf{h} \in (0, \mathbf{h}_0]$ .

Дополним неравенство (5.17) весовой оценкой, показывающей, в частности, что решение  $\mathbf{u}$  становится малым около границы  $\Gamma$  при  $\mathbf{h} \rightarrow +0$ .

**Предложение 5.2.** Пусть параметр  $\varepsilon = \varepsilon(h)$  таков, что выполнено ограничение (5.16). Тогда для решения  $u \in H^1(\Omega)^2$  задачи (1.21) с квадратичной формой (1.22) и матрицей (5.12) выполнено неравенство

$$\|\nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2 + \|\rho_{\mathbf{h}}^{\perp} u; L^2(\Omega)\|^2 \leq c \|\rho_{\mathbf{h}} f; L^2(\Omega)\|^2, \quad (5.18)$$

где  $\rho_{\mathbf{h}}(x) = \text{dist}(x, \Gamma) + \mathbf{h}$  – введенная в теореме 6.2 функция, а множитель  $c$  не зависит от  $\mathbf{h} = h(1 + |\ln \varepsilon|) \in (0, \mathbf{h}_0]$  и  $f \in L^2(\Omega)^2$ .

**Доказательство.** При учете соотношения (5.15) находим, что

$$\|\mathbf{u}; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c \mathbf{h}^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \Omega).$$

Как и при доказательстве теоремы 6.2, применим неравенство (6.1) с параметром  $d = \mathbf{h}$  и при помощи прежних манипуляций получим, что левая часть оценки (5.18) мажорируется величиной  $c \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \Omega)$ , т.е. утверждение стало очевидным.  $\square$

**6. Вспомогательные неравенства.** Начнем с простого следствия одномерного неравенства Харди (2.12).

**Лемма 6.4.** При любых положительных  $d$  и  $D$  для функции  $W \in C^1[0, d]$  выполнено неравенство

$$\int_0^D \frac{|W(t)|^2}{(t+d)^2} dt \leq \frac{2}{d} |W(0)|^2 + 4 \int_0^D \left| \frac{dW}{dt}(t) \right|^2 dt \quad (6.1)$$

**Доказательство.** Формулу Ньютона–Лейбница

$$|W(t)|^2 = |W(0)|^2 + 2 \int_0^t W(\tau) \frac{dW}{d\tau}(\tau) d\tau$$

умножим на  $(t+d)^{-2}$  и проинтегрируем по  $(0, D) \ni t$ . Простые преобразования приводят к нужному результату:

$$\begin{aligned}
& \int_0^D (t+d)^{-2} |W(t)|^2 dt = |W(0)| \int_0^D (t+d)^{-2} dt \\
& + 2 \int_0^D (t+d)^{-2} \int_0^t W(\tau) \frac{dW}{d\tau}(\tau) d\tau dt \leq |W(0)|^2 \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D+d} \right) \\
& + 2 \int_0^D |W(\tau)| \left| \frac{dW}{d\tau}(\tau) \right| \int_t^D (t+d)^{-2} dt d\tau \leq \frac{1}{d} |W(0)|^2 \\
& + 2 \int_0^D |W(\tau)| \left| \frac{dW}{d\tau}(t) \right| \left( \frac{1}{\tau+d} - \frac{1}{D+d} \right) d\tau \leq \frac{1}{d} |W(0)|^2 \\
& + 2 \int_0^D \left| \frac{dW}{d\tau}(\tau) \right|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^D (\tau+d)^{-2} |W(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

□

Следующее неравенство обеспечивает использованную в п. 2 оценку (6.10) (см. далее следствие 6.1).

**Предложение 6.3.** Для вектор-функции  $w \in \mathcal{E}_{0,\text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$ , периодической по переменной  $\xi_1$  и удовлетворяющей условию Дирихле (2.3), справедлива оценка

$$\|w; H^1(\square)\|^2 + \|w; L^2(\varpi)\|^2 \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(w, w; \square),$$

где  $\square$  – квадрат  $(-1/2, 1/2) \times (-1, 0)$ , а множитель  $c$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $w$ .

**Доказательство.** В представлении

$$w(\xi) = \bar{w} + w^\perp(\xi) \quad (6.2)$$

столбец  $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$  подобран так, что вектор-функция  $w^\perp \in H^1(\square)^2$  подчинена условиям ортогональности

$$\int_{\square} w^\perp(\xi) d\xi = 0 \in \mathbb{R}^2. \quad (6.3)$$

□

Поскольку периодичность по  $\xi_1$  исключает поворот  $b_0(-x_2, x_1)$  из линейала жестких смещений (1.12), два условия ортогональности (6.3) устраняют и поступательные смещения, т.е. неравенство Корна (1.13) при  $\Xi = \square$  принимает вид

$$\|w^\perp; H^1(\square)\|^2 \leq c_\square E(w^\perp, w^\perp; \square) = c_\square E(w, w; \square). \quad (6.4)$$

Несложные манипуляции с неравенством Харди (3.5) дают соотношение

$$\|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1}w^\perp; L^2(\square)\| \leq c\|w^\perp; H^1(\square)\|. \quad (6.5)$$

Кроме того, растяжение координат (3.1) и обычное следовое неравенство [1, гл. 1] обеспечивают оценку

$$\varepsilon^{-1}\|w^\perp; L^2(v^\varepsilon)\|^2 \leq c(\|\nabla_x w^\perp; L^2(\square^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2}\|w^\perp; L^2(\square^\varepsilon)\|^2), \quad (6.6)$$

в которой  $\square^\varepsilon = (-\varepsilon R, \varepsilon R) \times (-\varepsilon R, 0)$  – прямоугольник, верхнее основание которого содержит отрезок (2.6). Поскольку

$$r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1} \geq c_R \varepsilon^{-1}(1 + |\ln \varepsilon|)^{-1} \text{ на } \square^\varepsilon, \quad c_R > 0, \quad (6.7)$$

выводим из неравенств (6.4)–(6.6), что

$$\begin{aligned} \|w^\perp; L^2(v^\varepsilon)\|^2 &\leq c\varepsilon(\|\nabla_\xi w^\perp; L^2(\square^\varepsilon)\|^2 \\ &+ (1 + |\ln \varepsilon|)^2\|w^\perp; L^2(\square^\varepsilon)\|^2) \leq c\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^2\|w^\perp; H^1(\square)\|^2 \\ &\leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(w, w; \square). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Теперь при помощи формул (6.2) и (2.3) обрабатываем столбец  $\bar{w}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} |\bar{w}| &= \frac{1}{|v^\varepsilon|} \left| \int_{v^\varepsilon} w^\perp(\xi_1, 0) d\xi_1 \right| \leq \frac{1}{|v^\varepsilon|^{1/2}} \left( \int_{v^\varepsilon} |w^\perp(\xi_1, 0)|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^2 \right)^{1/2} E(w, w; \square)^{1/2} \\ &= c(1 + |\ln \varepsilon|) E(w, w; \square)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Здесь  $|v^\varepsilon| = \varepsilon a$  – длина отрезка  $v^\varepsilon$ , а в конце выкладки использована оценка (6.8).

Представление (1.5) и соотношения (6.4), (6.9), а также обычное следовое неравенство заканчивают доказательство предложения.  $\square$



**Следствие 6.1.** Для вектора-функции  $w \in \mathcal{E}_{0,\text{per}}(\Pi; v^\varepsilon)^2$  выполнено неравенство

$$\|w; \mathcal{E}(\Pi)\|^2 \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(w, w; \Pi), \quad (6.10)$$

левая часть которого содержит весовую норму (2.13), а правая – множитель  $c$ , не зависящий от  $\varepsilon$  и  $w$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что упомянутая в п. 2 необходимость введения срезки (2.14) перед применением неравенства (6.1) вынуждает пользоваться предложением 6.3 и начинать с оценки

$$E((1 - \chi)w, (1 - \chi)w; \Pi) \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(w, w; \Pi).$$

□

Теперь рассмотрим поле смещений  $u$  в области  $\Omega$ , удовлетворяющее условиям Дирихле (1.5). Представим вектор-функцию  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  как сумму

$$u(x) = \bar{u} + u_\theta \theta(x) + u^\perp(x), \quad (6.11)$$

включающую поступательное смещение  $\bar{u}$  и поворот  $\theta(x) = (-x_2, x_1)$ . Составляющую  $u^\perp$  подчиним трем условиям ортогональности (ср. условия (1.14))

$$\int_{\Omega} u^\perp(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \int_{\Omega} (u_2^\perp(x)x_1 - u_1^\perp(x)x_2) dx = 0, \quad (6.12)$$

означающих, что она ортогональна в пространстве  $L^2(\Omega)^3$  всем жестким смещениям из линейного множества (1.12). В результате получаем такое неравенство Корна:

$$\|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 \leq c_\Omega E(u^\perp, u^\perp; \Omega) = c_\Omega E(u, u; \Omega). \quad (6.13)$$

Заметим, что согласно формулам (1.3) и (1.6) матрица Грама, построенная по векторам  $e_{(1)}$ ,  $e_{(2)}$  и  $\theta$  при помощи скалярного произведения в пространстве  $L^2(\gamma^{h,\varepsilon})^2$ , является положительно определенной, а норма обратной для нее не превосходит  $c\varepsilon^{-1}$ , так как

$$\int_{\gamma^{h,\varepsilon}} ds_x \geq c_0 = Jh\varepsilon = c_0\varepsilon, \quad \int_{\gamma^{h,\varepsilon}} |\theta(x)|^2 ds_x \geq c_\theta\varepsilon, \quad c_0, c_\theta > 0.$$

Интегрируя по объединению дуг  $\gamma_1^{h,\varepsilon}, \dots, \gamma_J^{h,\varepsilon}$  представление (6.11), умноженное на упомянутые векторы, и учитывая равенства (1.5) и

(6.12), приходим к алгебраической системе, из которой выводим соотношения

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}| + |u_\theta| &\leq c\varepsilon^{-1} \int_{\gamma^{h,\varepsilon}} |u^\perp(\xi)| ds_x \leq c\varepsilon^{-1/2} \|u^\perp; L^2(\gamma^{h,\varepsilon})\| \\
 &\leq c\varepsilon^{-1/2} \|u^\perp; L^2(\Gamma)\| \leq c\varepsilon^{-1/2} \|u^\perp; H^1(\Omega)\| \\
 &\leq c\varepsilon^{-1/2} E(u, u; \Omega)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Из формул (6.13) и (6.14) вытекает, что

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leq c(\|u^\perp; H^1(\Omega)\|^2 + |\bar{u}|^2 + |u_\theta|^2) \leq c\varepsilon^{-1} E(u, u; \Omega). \tag{6.15}$$

Вместе с тем оценку (6.15) можно улучшить посредством более тщательного анализа поля  $u$  вблизи коротких дуг (1.3).

От тонкой пограничной полоски  $\Omega \cap \mathcal{U}^h$ , где  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  —  $Ch$ -окрестность контура  $\Gamma$ , отсечем ячейку  $\omega_p^h$  перпендикулярами к  $\Gamma$ , восстановленными из точек с координатами  $s = h(p - 1/2)$  и  $s = h(p + 3/2)$ . На основании  $\partial\omega_p^h \cap \Gamma$  ячейки попадают две точки  $P_p, P_{p+1}$  и соответственно две дуги (1.3) с номерами  $j = p, p + 1$ . Внутри  $\omega_p^h$  выделим круг  $\mathcal{B}_p^h$  с радиусом  $ch$  и сделаем растяжение координат в  $h^{-1}$  раз относительно центра круга. Полученные координаты обозначим через  $\xi^p$ , а сужение поля  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  на ячейку  $\omega_p^h$ , переписанное в новых координатах, — через  $u^p(\xi^p)$ . Указанная замена координат переводит ячейку в прямоугольник  $\omega_p^1$  со слабо деформированными сторонами, но при достаточно малом  $h$  множество  $\omega_p^1$  звездно относительно круга  $\mathcal{B}_p^1 = \{\xi^p : |\xi^p| < c\}$ , на котором поле  $u^p$  представим в аналогичном (6.11) виде

$$u^p(\xi^p) = \bar{u}^p + u_\theta^p \theta(\xi^p) + u^{p\perp}(\xi^p), \tag{6.16}$$

а составляющую  $u^{p\perp}$  подчиним аналогичным (1.14) и (6.12) условиям ортогональности

$$\int_{\omega_p^1} u^{p\perp}(\xi^p) d\xi^p = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \int_{\omega_p^1} (u_2^{p\perp}(\xi^p) \xi_1^p - u_1^{p\perp}(\xi^p) \xi_2^p) d\xi^p = 0.$$

Благодаря упомянутой звездности  $\omega_p^1$  относительно  $\mathcal{B}_p^1$  примечательный результат работы [34] предоставляет неравенство Корна

$$\|u^{p\perp}; H^1(\omega_p^1)\|^2 \leq c E(u^{p\perp}, u^{p\perp}; \omega_p^1) = c E(u^p, u^p; \omega_p^1), \tag{6.17}$$

в котором множитель  $c$  зависит только от отношения диаметров ячейки и круга. Иными словами, этот множитель можно взять общим для всех  $p = 1, \dots, J$ . Обратный переход к координатам  $\xi$  и формулы (1.2), (1.9) показывают, что правая часть соотношения (6.17) равна  $cE(u, u; \omega_p^h)$ . Кроме того, одномерное неравенство Харди (3.5) с логарифмом дает похожие на (6.5) оценки

$$\|r_q^{-1}(1 + |\ln r_q|)^{-1}u^{p\perp}; L^2(\omega_p^1)\| \leq c\|u^{p\perp}; H^1(\omega_p^1)\|, \quad q = p, p+1,$$

где  $r_q$  – расстояние до точки  $P_q^p$ , т.е. образе точки  $P_q$  при замене  $x \mapsto \xi^p$ . Наконец, аналогичные (6.7) и (6.8) соотношения приводят к неравенству

$$\|u^{p\perp}; L^2(\gamma_q^{1,\varepsilon})\| \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|)\|u^{p\perp}; H^1(\omega_p^1)\|. \quad (6.18)$$

В его левой части стоит лебегова норма на дуге  $\gamma_q^{1,\varepsilon} \subset \partial\omega_p^1$ , полученной из дуги  $\gamma_q^{h,\varepsilon}$  растяжением координат и потому имеющей длину  $\varepsilon a(s_q)$ .

Теперь воспользуемся условиями Дирихле на дугах  $\gamma_p^{1,\varepsilon}$  и  $\gamma_{p+1}^{1,\varepsilon}$  для поля смещений  $u^p$ . Именно, умножим представление (6.16) скалярно на векторы  $e_{(1)}, e_{(2)}, \theta(\xi^p)$  и, проинтегрировав результат по  $\gamma_q^{1,\varepsilon}$ , придем к системе трех уравнений

$$M_{(q)}^{p\varepsilon}U^p = F_{(q)}^{p\varepsilon} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.19)$$

для столбца  $U^p = (\bar{u}^p, u_\theta^p) \in \mathbb{R}^3$ . При этом в силу (6.18) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|F_{(q)}^{p\varepsilon}; \mathbb{R}^3\| &\leq c|\gamma_q^{1,\varepsilon}|^{1/2}\|u^{p\perp}; L^2(\gamma_q^{1,\varepsilon})\| \\ &\leq c\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)\|u^{p\perp}; H^1(\omega_p^1)\|, \\ \|M_{(q)}^{p\varepsilon} - \varepsilon\mathcal{M}(P_q^p)^\top \mathcal{M}(P_q^p); \mathbb{R}^{3 \times 3}\| &\leq c\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где  $\mathcal{M}(P_q^p) = (e_{(1)}, e_{(2)}, \theta(P_q^p))$  – матрица размером  $2 \times 3$ . Сама матрица  $M_{(q)}^0 = \mathcal{M}(P_q^p)^\top \mathcal{M}(P_q^p)$  симметричная и неотрицательная, но вырожденная, однако, как нетрудно убедиться, сумма  $M_{(p)}^0 + M_{(p+1)}^0$  – положительно определенная  $(3 \times 3)$ -матрица. Таким образом, из соотношений (6.19) и (6.20) выводим, что

$$\|U^p; \mathbb{R}^3\| \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)\|u^{p\perp}; H^1(\omega_p^1)\|. \quad (6.21)$$

В итоге формулы (6.16) и (6.17), (6.21) дают оценку

$$\|u^p; H^1(\omega_p^1)\|^2 + \|u^p; L^2(\partial\omega_p^1)\|^2 \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u^p, u^p; \omega_p^1),$$

которую при помощи обратной замены  $\xi^p \rightarrow x$  превращаем в оценку

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x u; L^2(\omega_p^h)\|^2 + h^{-2}\|u; L^2(\omega_p^h)\|^2 + h^{-1}\|u; L^2(\Gamma_p^h \cup \Gamma_{p+1}^h)\|^2 \\ & \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \omega_p^h). \end{aligned}$$

Учитывая двукратное покрытие полосы  $\Omega \cap \mathcal{U}^h$  ячейками  $\omega_1^h, \dots, \omega_J^h$ , суммируем неравенства (6.11) по  $p = 1, \dots, J$  и получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x u; L^2(\Omega \cap \mathcal{U}^h)\|^2 + h^{-2}\|u; L^2(\Omega \cap \mathcal{U}^h)\|^2 + \\ & h^{-1}\|u; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \Omega \cap \mathcal{U}^h). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Умножим поле  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{\varepsilon, h})^2$  на срезающую функцию  $X^h \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$X^h(x) = 1 \text{ при } x \in \Omega \setminus \mathcal{U}, \quad X^h(x) = 1 - \chi(h^{-1}n) \text{ при } x \in \Omega \cap \mathcal{U}.$$

При этом  $\chi$  – эталонная срезка (2.14), а  $\mathcal{U}$  – окрестность контура  $\Gamma$ , где в п. 1 были введены криволинейные координаты  $n$  и  $s$ . Поскольку  $|\nabla_x X^h(x)| \leq ch^{-1}$  и  $\text{supp}|\nabla_x X^h| \subset \mathcal{U}^h$ , в силу оценки (6.22) для  $L^2(\Omega \cap \mathcal{U}^h)$ -нормы поля  $u$  имеем

$$\begin{aligned} & E(X^h u, X^h u; \Omega) \leq c(E(u, u; \Omega) + h^{-2}\|u; L^2(\Omega \cap \mathcal{U}^h)\|^2) \\ & \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \Omega). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Следовательно, благодаря условию  $X^h u = 0$  на контуре  $\Gamma$  неравенство Корна (1.13) в области  $\Xi = \Omega$  принимает вид

$$\|X^h u; H^1(\Omega)\| \leq cE(X^h u, X^h u; \Omega) \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \Omega)$$

Теперь применим неравенство (6.1), в котором возьмем  $W(-n) = u(n, s)$ ,  $d = h$ , а размер  $D > 0$  выберем так, чтобы  $D$ -окрестность  $\mathcal{U}_D$  контура  $\Gamma$  содержалась в окрестности  $\mathcal{U}$ . Проинтегрируем это неравенство по  $s \in \Gamma$  и введем под интеграл якобиан  $1 + n\kappa(s)$ , равномерно отделенный от нуля. В итоге приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{U}_D} (n+h)^{-2} |u(x)|^2 dx \leq c \left( \frac{1}{h} \int_{\Gamma} |u(x)|^2 ds_x + \int_{\mathcal{U}_D} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right|^2 dx \right) \\ & \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \mathcal{U}_D). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Сформулируем вытекающий из формул (6.23) и (6.24) результат.

**Теорема 6.2.** *Справедливо неравенство*

$$\|\nabla_x u; L^2(\Omega)\|^2 + \|\rho_h^{-1} u; L^2(\Omega)\|^2 \leq c(1 + |\ln \varepsilon|)^2 E(u, u; \Omega), \quad (6.25)$$

где  $\rho_h(x) = \text{dist}(x, \Gamma) + h$ , множитель  $c$  не зависит от параметров  $h \in (0, h_0]$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  и вектор-функции  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h\varepsilon})$ , причем  $h_0$  и  $\varepsilon_0$  – некоторые положительные величины.

Известные приемы вывода следовых неравенств (см., например, [1, гл. 1]) обеспечивают очередное утверждение.

**Предложение 6.4.** В условиях теоремы 6.2 выполнено соотношение

$$\|u; L^2(\Omega)\| \leq ch^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|) E(u, u; \Omega)^{1/2}. \quad (6.26)$$

Наконец, еще одно простое неравенство, обеспеченное условиями Дирихле (1.6), вытекает из неравенства Корна на “полукруге”  $\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon} = \{x \in \Omega : n^2 + (s - s_j)^2 < R^2 h^2 \varepsilon^2\}$ , “диаметр”  $\mathcal{D}_j^{h,\varepsilon}$  которого включает дугу  $\gamma_j^{h,\varepsilon}$ , и следового неравенства, примененными к вектор-функции  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  в растянутых координатах

$$\eta^j = ((h\varepsilon)^{-1}n, (h\varepsilon)^{-1}(s - s_j)).$$

**Предложение 6.5.** В условиях теоремы 6.2 выполнено соотношение

$$(h\varepsilon)^{-1}\|u; L^2(\mathcal{D}_j^{h,\varepsilon})\|^2 + (h\varepsilon)^{-2}\|u; L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\|^2 \leq c E(u, u; \mathcal{B}_j^{h,\varepsilon}). \quad (6.27)$$

**7. Глобальное асимптотическое приближение и теоремы об асимптотике.** Для того чтобы построить глобальное асимптотическое приближение к решению  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  вариационной (1.8) или дифференциальной (1.1), (1.5), (1.6) задачи понадобятся несколько срезающих функций. Прежде всего, срезка  $\chi_\Gamma \in C_c^\infty(\mathcal{U})$  служит для локализации экспоненциального пограничного слоя, так как  $\chi_\Gamma = 0$  внутри подобласти  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{U}}$  и

$$\chi_\Gamma(x) = 1 \quad \text{при} \quad \text{dist}(x, \Gamma) \leq D/2. \quad (7.1)$$

Еще два набора ( $j = 0, \dots, J - 1$ ) срезов

$$\begin{aligned} \chi_j^h(x) &= \chi_v(h^{-1}n, h^{-1}(s - s_j)), \\ \chi_j^{h,\varepsilon}(x) &= \chi_v((h\varepsilon)^{-1}n, (h\varepsilon)^{-1}(s - s_j)), \end{aligned} \quad (7.2)$$

имеющих носители в  $ch$ - и  $Ch\varepsilon$ -окрестностях дуг  $\overline{\gamma_j^{h,\varepsilon}}$  соответственно, используются для соблюдения условий Дирихле (1.5); при этом введенная в представление (3.12) срезка  $\chi_v$  аннулируется вне полосы  $\mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$  и  $\chi_v = 1$  в окрестности замкнутого отрезка (3.14), т.е.

$\chi_j^{h,\varepsilon} = 1$  и  $\chi_j^h = 1$  на отрезке  $v^\varepsilon(a_\pm(s_j))$ ,  $j = 0, \dots, J-1$ . Наконец, последняя из срезающих функций

$$\mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{J-1} \chi_j^{h,\varepsilon}(x) \quad (7.3)$$

обращается в нуль в  $Ch\varepsilon$ -окрестностях точек  $P_0, \dots, P_{J-1}$  и на множестве  $\gamma^{h,\varepsilon}$ .

Глобальное асимптотическое приближение возьмем таким:

$$\begin{aligned} u_{as}(x) = & \mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) \left( \mathbf{u}(x) - \chi_\Gamma(x) h \left( \tilde{G} \left( \frac{n}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon} \right) \Lambda \partial_s \mathbf{u}(0, s) \right. \right. \\ & \left. \left. - w' \left( \frac{n}{\varepsilon}, \frac{s}{\varepsilon}; s \right) \right) \right) + h \sum_{j=0}^{J-1} \chi_j^h(x) \tilde{\mathbf{v}}_{(j)} \left( \frac{n}{h\varepsilon}, \frac{s-s_j}{h\varepsilon} \right) \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь  $\tilde{G}$  – матрица остатков в представлениях (4.3), которые, как и заданная формулами (5.6) и (5.5) вектор-функция  $w'$ , экспоненциально затухают на бесконечности в полуполосе  $\Pi$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}$  – матрица остатков в представлениях (3.12) решений задачи (3.2)–(3.4) с параметрами  $a_\pm = a_\pm(s_j)$ , которые (остатки) исчезают при  $\rho_j = |\eta^j| \rightarrow +\infty$  со степенной скоростью  $O(\rho_j^{-1})$ .

Благодаря присутствию множителя (7.3) и условиям (3.3) для  $\tilde{\mathbf{v}}^q$  конструкция (7.4) удовлетворяет условию Дирихле (1.5) и потому попадает в пространство  $H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$ . Следовательно, для разности

$$u_{\text{rem}} = u - u_{as} \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$$

истинного и приближенного решений задачи (1.1), (1.5), (1.6) справедливо равенство

$$E(u_{\text{rem}}, u_{\text{rem}}; \Omega) = (f, u_{\text{rem}})_\Omega - E(u_{as}, u_{\text{rem}}; \Omega). \quad (7.5)$$

Обработаем последнее выражение в (7.5).

Обозначим  $\mathcal{L}(\nabla_x)$  и  $\mathcal{B}(x, \nabla_x)$  матрицы дифференциальных операторов второго и первого порядков из системы уравнений (1.1) и краевых условий Неймана (1.6). Коммутатор оператора  $\mathcal{L}(\nabla_x)$  и срезки (7.3) обозначим  $[\mathcal{L}(\nabla_x), \mathcal{X}^\varepsilon]$ ,

$$[\mathcal{L}, \mathcal{X}^{h,\varepsilon}]u = \mathcal{L}(\mathcal{X}^{h,\varepsilon}u) - \mathcal{X}^{h,\varepsilon}\mathcal{L}u. \quad (7.6)$$

Он является дифференциальным оператором первого порядка, коэффициенты при производных в котором суть  $O((h\varepsilon)^{-1})$ , а свободный

член  $-O((h\varepsilon)^{-2})$ . Аналогичные обозначения используются для всех введенных операторов и срезающих функций, а свойства их коэффициентов вполне очевидны. Например, коммутатор

$$[\mathcal{N}, \mathcal{X}^{h,\varepsilon}]u = \mathcal{N}(\mathcal{X}^{h,\varepsilon}u) - \mathcal{X}^{h,\varepsilon}\mathcal{N}u = (\mathcal{N}\mathcal{X}^{h,\varepsilon})u \quad (7.7)$$

является оператором умножения на  $(2 \times 2)$ -матрицу-функцию  $\mathcal{N}\mathcal{X}^{h,\varepsilon}$  с элементами порядка  $(h\varepsilon)^{-1}$ .

Применим формулу Грина и прокоммутируем дифференциальные матрицы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{B}$  со введенными в (7.4) срезками. В равенстве

$$E(u_{as}, u_{\text{rem}}; \Omega) = (\mathcal{L}u_{as}, u_{\text{rem}})_{\Omega} + (\mathcal{B}u_{as}, u_{\text{rem}})_{\Gamma}$$

сначала рассмотрим слагаемые, порожденные составляющей  $\mathcal{X}^{h\varepsilon}\mathbf{u}$ . Имеем

$$(\mathcal{L}\mathcal{X}^{h,\varepsilon}\mathbf{u}, u_{\text{rem}})_{\Omega} = (f, u_{\text{rem}})_{\Omega} + \sum_{j=0}^{J-1} \left( I_j^f(u_{\text{rem}}) + I_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) \right). \quad (7.8)$$

При этом, во-первых,

$$\begin{aligned} I_j^f(u_{\text{rem}}) &= -(\chi_j^{h,\varepsilon}f, u_{\text{rem}})_{\Omega}, \\ |I_j^f(u_{\text{rem}})| &\leq c\|f; C(\Omega)\|(\text{mes}_2 \text{supp } \chi_j^{h,\varepsilon})^{1/2} \left( \max_{x \in \text{supp } \chi_j^{h,\varepsilon}} \rho_h(x) \right) \\ &\times \|\rho^{-1}u_{\text{rem}}; L^2(\text{supp } \chi_j^{h,\varepsilon})\| \leq ch\varepsilon(h\varepsilon + h)\|\rho_h^{-1}u_{\text{rem}}; L^2(\text{supp } \chi_j^{h,\varepsilon})\|, \\ \left| \sum_{j=0}^{J-1} I_j^f(u_{\text{rem}}) \right| &\leq ch^2\varepsilon J^{1/2}\|\rho_h^{-1}u_{\text{rem}}; L^2(\Omega)\| \leq ch^{3/2}\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)\mathcal{N}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где учтены неравенство (6.25) из теоремы 6.2 и соотношение  $h = J^{-1}$ , а также введено обозначение

$$\mathcal{N} = E(u_{\text{rem}}, u_{\text{rem}}; \Omega)^{1/2}. \quad (7.10)$$

Во-вторых, в согласии с формулой Тейлора (5.1) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} I_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) &= I_j^{\mathbf{u}^0}(u_{\text{rem}}) + \tilde{I}_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}), \\ I_j^{\mathbf{u}^0}(u_{\text{rem}}) &= -([\mathcal{L}(\nabla_x), \chi_j^{h,\varepsilon}](\mathbf{u}(0, s) + n\partial_n \mathbf{u}(0, s)), u_{\text{rem}})_{\Omega}, \\ \tilde{I}_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) &= -([\mathcal{L}(\nabla_x), \chi_j^{h,\varepsilon}]\tilde{\mathbf{u}}, u_{\text{rem}})_{\Omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{I}_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) \right| &\leq c \left( \max_{x \in \text{supp} \chi_j^{h,\varepsilon}} \left( |\nabla_x^2 \chi_j^{h,\varepsilon}(x)| n^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \max_{x \in \text{supp} \chi_j^{h,\varepsilon}} \left( |\nabla_x \chi_j^{h,\varepsilon}(x)| |n| \right) \right) \left( \text{mes}_2 \text{supp} \chi_j^{h,\varepsilon} \right)^{1/2} \\
 &\times (h\varepsilon + h) \|\rho_h^{-1} \mathbf{u}_{\text{rem}}; L^2(\text{supp} \chi_j^{h,\varepsilon})\| \\
 &\leq ch^2 \varepsilon \|\rho_h^{-1} \mathbf{u}_{\text{rem}}; L^2(\text{supp} \chi_j^{h,\varepsilon})\|, \\
 \left| \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{I}_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) \right| &\leq ch^{3/2} \varepsilon (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N}. \tag{7.11}
 \end{aligned}$$

Функционал  $I_j^{\mathbf{u}^0}$  из списка (7.11) будет принят во внимание в последующих выкладках, которые относятся и к скалярным произведениям

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_j}^{\sigma(\mathbf{u})}(u_{\text{rem}}) &= (\sigma^{(n)}(\mathbf{u}), \chi_j^{h,\varepsilon} u_{\text{rem}})_{\Gamma}, \\
 I_{\Gamma_j}^{\mathbf{u}^0}(u_{\text{rem}}) &= ([\mathcal{B}, \chi_j^{h,\varepsilon}](\mathbf{u}(0, s) + n \partial_n \mathbf{u}(0, s)), u_{\text{rem}})_{\Gamma} \tag{7.12}
 \end{aligned}$$

из представления

$$(\mathcal{B}(\mathcal{X}^{h,\varepsilon} \mathbf{u}), u_{\text{rem}})_{\Gamma} = I^{\sigma(\mathbf{u})}(u_{\text{rem}}) + \sum_{j=0}^{J-1} \left( I_{\Gamma_j}^{\mathbf{u}^0}(u_{\text{rem}}) + \tilde{I}_{\Gamma_j}^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) \right). \tag{7.13}$$

Последние слагаемые в (7.13)

$$\tilde{I}_{\Gamma_j}^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}}) = ([\mathcal{B}, \chi_j^{h,\varepsilon}] \tilde{\mathbf{u}}, u_{\text{rem}})_{\Gamma} = 0, \quad j = 0, \dots, J-1,$$

обращаются в нуль в силу формулы Тейлора (5.1) и того обстоятельства, что коммутатор (7.7) – оператор умножения на матрицу-функцию. По той же причине из второго выражения (7.12) можно удалить величину  $n \partial_n \mathbf{u}(0, s)$ .

Теперь изучим невязки, которые порождены членами первого пограничного слоя, умноженными на срезающие функции (7.1) и (7.3).



Имеем

$$\begin{aligned}
& h \left( \mathcal{L}(\chi_\Gamma \mathcal{X}^{h,\varepsilon}(\tilde{G}\Lambda\partial_s \mathbf{u} - w')), u_{\text{rem}} \right)_\Omega = h \left( [\mathcal{L}, \chi_\Gamma](\tilde{G}\Lambda\partial_s \mathbf{u} - w'), u_{\text{rem}} \right)_\Omega \\
& - h \sum_{j=0}^{J-1} \left( [\mathcal{L}, \chi_j^{h,\varepsilon}](\tilde{G}\Lambda\partial_s \mathbf{u} - w'), u_{\text{rem}} \right)_\Omega + h \left( \mathcal{L}(\tilde{G}\Lambda\partial_s \mathbf{u} - w'), \chi_\Gamma \mathcal{X}^{h,\varepsilon} u_{\text{rem}} \right)_\Omega \\
& =: I'_\chi(u_{\text{rem}}) + \sum_{j=0}^{J-1} I'_{\mathcal{U}_j}(u_{\text{rem}}) + I'_{\mathcal{U}}(u_{\text{rem}}). \tag{7.14}
\end{aligned}$$

Производные срезки  $\chi_\Gamma$  обращаются в нуль при  $\text{dist}(x, \Gamma) < D/2$ , а значит, ввиду экспоненциального затухания вектор-функций  $\tilde{G}^q$  и  $w'$  при  $\xi_2 = h^{-1}n \rightarrow -\infty$  (см. поточечные оценки (2.19)) получаем, что

$$\begin{aligned}
|I'_\chi(u_{\text{rem}})| & \leq ch \left( h^{-2} \int_{-D}^{-D/2} (h + |n|)^2 e^{2\kappa n/h} dn \right)^{1/2} \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\Omega \cap \mathcal{U})\| \\
& \leq ch^{3/2} e^{-\kappa D/2h} (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N}, \quad \kappa > 0.
\end{aligned}$$

Упомянутые вектор-функции удовлетворяют однородным уравнениям равновесия (2.2) в растянутых координатах (2.7), однако оператор  $\mathcal{L}(\nabla_x)$ , переписанный в системе криволинейных координат  $(n, s)$ , приобретает переменные коэффициенты согласно формулам (2.8) и (2.9), а значит, отличается от  $h^2 \mathcal{L}(\nabla_\xi)$  слагаемыми вида

$$n\mathcal{L}^{(2)}(n, s, \partial_n, \partial_s) \text{ и } \mathcal{L}^{(1)}(n, s, \partial_n, \partial_s); \tag{7.15}$$

здесь  $\mathcal{L}^{(q)}$  – какая-то матрица дифференциальных операторов порядка  $q = 1, 2$  с гладкими коэффициентами. В результате выводим соотношение

$$\begin{aligned}
|I'_{\mathcal{U}}(u_{\text{rem}})| & \leq ch \left( \int_{-D}^0 (h^2 h^{-4} + h^{-2})(|n| + h)^2 e^{2\kappa n/h} dn \right)^{1/2} \\
& \times \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\Omega \cap \mathcal{U})\| \leq ch^{3/2} (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N}.
\end{aligned}$$

Слагаемые  $I_j^{\mathbf{u}}(u_{\text{rem}})$  из (7.8) и

$$\begin{aligned}
& I_{\mathcal{U}_j}^{0r}(u_{\text{rem}}) \\
& = h \left( [\mathcal{L}, \chi_j^{h,\varepsilon}](\Phi(h^{-1}n, h^{-1}(s - s_j)) + \mathcal{G})(\Lambda\partial_n \mathbf{u}(0, s_j) + g'(s_j)), u_{\text{rem}} \right)_\Omega \tag{7.16}
\end{aligned}$$

будут рассмотрены совместно с невязками, порожденными мелкими степенными пограничными слоями. Оставшаяся часть выражения  $I'_{U_j}(u_{\text{rem}})$  из (7.14) допускает оценку

$$|I'_{U_j}(u_{\text{rem}}) - I_{U_j}^{0r}(u_{\text{rem}})| \leq ch^2(1 + \ln |\varepsilon|)\mathcal{N} \quad (7.17)$$

благодаря малости остатков в представлении (4.2) столбцов матрицы Грина  $G$  и гладкости поля  $\mathbf{u}$  на контуре  $\Gamma$  (см. предложение 5.1).

Нужно еще рассмотреть выражение

$$\begin{aligned} h \left( \mathcal{B}(\mathcal{X}^{h\varepsilon}(\tilde{G}\Lambda\partial_n \mathbf{u} - w')), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} &= h \left( \sigma^{(n)}(\tilde{G}\Lambda\partial_n \mathbf{u} - w'), \mathcal{X}^{h\varepsilon} u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} \\ - h \sum_{j=0}^{J-1} \left( [\mathcal{B}, \chi_j^{h\varepsilon}](\tilde{G}\Lambda\partial_n \mathbf{u} - w'), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} &=: I'_{\Gamma}(u_{\text{rem}}) + \sum_{j=0}^{J-1} I'_{\Gamma_j}(u_{\text{rem}}). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Последние слагаемые, обработанные аналогично (7.16) и (7.17), а именно,

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_j}^{0r}(u_{\text{rem}}) &= h \left( [\mathcal{B}, \chi_j^{h,\varepsilon}](\Phi(h^{-1}n, h^{-1}(s - s_j)) + \mathcal{G})(\Lambda\partial_n \mathbf{u}(0, s_j) + g'(s_j)), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma}, \\ |I'_{\Gamma_j}(u_{\text{rem}}) - I_{\Gamma_j}^{0r}(u_{\text{rem}})| &\leq ch^2(1 + \ln |\varepsilon|)\mathcal{N}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

примем во внимание ниже, а по поводу первого заметим, что согласно формулам (2.8) для напряжений в криволинейных координатах вектор  $h\sigma^{(n)}(w'; x)|_{n=0}$  отличается от вектора

$$(\sigma_{11}(w'; \xi, s)|_{\xi_1=0}, \sigma_{12}(w'; \xi, s)|_{\xi_1=0}),$$

вычисленного в растянутых координатах  $\xi$ , рассматриваемых как декартовы, слагаемыми вида  $l_q^0(s)w'_q(0, \xi_2; s)$  и  $l_q^1(s)\partial_s w'_q(0, \xi_2; s)$ . Таким образом, вспоминая вычисления (5.10) и (5.11), а также формулы (4.3) для  $\tilde{G}^k$  и (5.6), (5.5) для  $w'$ , обнаруживаем, что вектор-функции  $\sigma^{(n)}(\mathbf{u})$  и  $-h\sigma^{(n)}(\tilde{G}\Lambda\partial_n \mathbf{u} - w')$  различаются умноженными на  $h$  слагаемыми указанного вида, а значит, для величин  $I_{\Gamma}^{\sigma(\mathbf{u})}(u_{\text{rem}})$  из (7.13) и  $I'_{\Gamma}(u_{\text{rem}})$  из (7.18) находятся в отношении

$$\left| I_{\Gamma}^{\sigma(\mathbf{u})}(u_{\text{rem}}) - I'_{\Gamma}(u_{\text{rem}}) \right| \leq ch \|u_{\text{rem}}; L^2(\Gamma)\| \leq ch^{3/2}(1 + |\ln \varepsilon|)\mathcal{N}.$$

При этом использовано следовое неравенство (6.26).

Осталось обработать невязки, оставленные последней суммой из формулы (7.9). Аналогично предыдущим преобразованиям имеем

$$\begin{aligned} h \left( \mathcal{L}(\chi_j^h \tilde{\mathbf{v}}_{(j)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u})), u_{\text{rem}} \right)_{\Omega} &= h \left( \mathcal{L} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}), \chi_j^h u_{\text{rem}} \right)_{\Omega} \\ &+ h \left( [\mathcal{L}, \chi_j^h] \tilde{\mathbf{v}}_{(j)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}), u_{\text{rem}} \right)_{\Omega} =: I_j^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}) + \tilde{I}_j^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

По определению (7.2) срезающей функции  $\chi_j^h$  носитель ее производных расположен на половине кольца  $\mathbb{A}_j^h = \{x \in \overline{\Omega} : |n|^2 + |s - s_j|^2 \in [ch^2, Ch^2]\}$  с некоторыми положительными постоянными  $c$  и  $C$ , на котором в силу соотношений (3.13) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\eta^j)| &\leq c|\eta^j|^{-1} \leq ch\varepsilon, \\ |\nabla_x \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\eta^j)| &\leq c(h\varepsilon)^{-1} |\nabla_{\eta^j} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\eta^j)| \leq c(h\varepsilon)^{-1} |\eta^j|^{-2} \leq ch\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая порядки роста при  $h \rightarrow +0$  модулей коэффициентов дифференциального оператора (7.6), а также предложение 5.1 и комментарий к нему, находим, что

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_j^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}) \right| &\leq ch \left( h^{-2} \max_{x \in \mathbb{A}_j^h} |\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\xi^j)| + h^{-1} \max_{x \in \mathbb{A}_j^h} |\nabla_x \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\xi^j)| \right) \\ &\times \max_{s \in [s_j - h/2, s_j + h/2]} \left| \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s) \right| \times (\text{mes}_2 \mathbb{A}_j^h)^{1/2} \\ &\times \max_{x \in \mathbb{A}_j^h} \rho_h(x) \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\mathbb{A}_j^h)\| \leq ch^2 \varepsilon \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\mathbb{A}_j^h)\|, \end{aligned}$$

а значит, предложение 6.3 приводит к оценке

$$\sum_{j=0}^{J-1} \left| \tilde{I}_j^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}) \right| \leq ch^{3/2} \varepsilon (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N}.$$

Рассмотрим слагаемое  $I_j^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}})$  из (7.20) и сделаем в нем подстановку  $\mathcal{L}(\nabla_x) \mapsto (h\varepsilon)^{-2} \mathcal{L}(\nabla_{\eta^j})$ . Эти операторы отличаются один от другого дифференциальными выражениями (7.15) и при оценивании погрешности такой замены используем поточечные оценки (3.13) на искривленном полукольце  $\mathcal{A}_j^{h,\varepsilon} = \{x \in \overline{\Omega} : n^2 + (s - s_j)^2 \in [ch^2\varepsilon^2, Ch^2]\}$  и простые оценки соболевских норм вектор-функций (3.15) на “полукольце”  $\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon} = \{x \in \overline{\Omega} : n^2 + (s - s_j)^2 < ch^2\varepsilon^2\} \subset \gamma_j^{h,\varepsilon}$ . Кроме того, отщепим слагаемое

$$I_j^{\sigma}(u_{\text{rem}}) := h^{-1} \varepsilon^{-2} (\mathcal{L}(\nabla_{\eta^j}) \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\eta^j) (\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s) - \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j)), u_{\text{rem}})_{\Omega}, \quad (7.21)$$

которое примем во внимание в формуле (7.22), но в очередной выкладке обозначим его вклад через  $\mathbf{n}_j^{h,\varepsilon}$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| I_j^\nu(u_{\text{rem}}) - h^{-1}\varepsilon^{-2} \left( \mathcal{L}(\nabla_{\eta^j} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}) \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j), \chi_j^h u_{\text{rem}} \right)_{\mathbb{R}_-^2} \right| \\
 & \leq ch \left( \left( \max_{x \in \mathcal{A}_j^{h,\varepsilon}} (\rho_h(x) |n| |\nabla_x^2 \tilde{\mathbf{v}}(\eta^j)|) + \max_{x \in \mathcal{A}_j^{h,\varepsilon}} (\rho_h(x) |\nabla_x \tilde{\mathbf{v}}(\eta^j)|) \right) \right. \\
 & \times (\text{mes}_2 \mathcal{A}_j^{h,\varepsilon})^{1/2} + \|\rho_h n \nabla_x^2 \tilde{\mathbf{v}}; L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| + \|\rho_h \nabla_x \tilde{\mathbf{v}}; L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| + \mathbf{n}_j^{h,\varepsilon} \left. \right) \\
 & \times \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\mathcal{A}_j^{h,\varepsilon} \cup \mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| \leq ch \left( h \max_{x \in \mathcal{A}_j^{h,\varepsilon}} (|n| |\eta_j|^{-3} + |\eta_j|^{-2}) h\varepsilon \right. \\
 & \left. + h \|\eta_1^j \nabla_{\eta^j}^2 \tilde{\mathbf{v}}; L^2(\mathcal{B}_R)\| + h \|\nabla_{\eta^j} \tilde{\mathbf{v}}; L^2(\mathcal{B}_R)\| + \mathbf{n}_j^{h,\varepsilon} \right) \\
 & \times \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\mathcal{A}_j^{h,\varepsilon} \cup \mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| \leq ch(h + \mathbf{n}_j^{h,\varepsilon}) \|\rho_h^{-1} u_{\text{rem}}; L^2(\mathcal{A}_j^{h,\varepsilon} \cup \mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| \\
 & \leq ch(h + \mathbf{n}_j^{h,\varepsilon}) (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N}.
 \end{aligned}$$

Для обработки величины (7.21) заметим, что, во-первых, в силу предложения 5.1 и комментария к нему справедливо неравенство

$$\left| \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s) - \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j) \right| \leq ch \quad \text{при } |s - s_j| \leq \frac{h}{2}$$

и, во-вторых, согласно определению (3.12) столбцов матрицы  $\tilde{\mathbf{v}}(\eta^j)$  носитель вектор-функции  $x \mapsto \mathcal{L}(\nabla_{\eta^j} \tilde{\mathbf{v}}(\eta^j))$  содержится в  $Rh\varepsilon$ -окрестности точки  $P_j$ , где выполнено неравенство (6.27). Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \left| I_j^\sigma(u_{\text{rem}}) \right| \leq ch(h\varepsilon)^{-2} \|\mathcal{L} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}; L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon})\| \\
 & \times \max_{s \in [s_j - h/2, s_j + h/2]} \left| \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s) - \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j) \right| \times \|u_{\text{rem}}\| \\
 & \times L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon}) \leq ch \|\mathcal{L} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}; L^2(\mathcal{B}_R)\| (h\varepsilon)^{-1} \|u_{\text{rem}}\| \\
 & \times L^2(\mathcal{B}_j^{h,\varepsilon}) \leq ch^2 E(u_{\text{rem}}, u_{\text{rem}}; \Omega)^{1/2}. \tag{7.22}
 \end{aligned}$$

В итоге, как обычно, после суммирования получаем, что

$$\sum_{j=0}^{J-1} \left| I_j^\nu(u_{\text{rem}}) - I_{L_j}^{\text{match}}(u_{\text{rem}}) \right| \leq ch^{3/2} (1 + |\ln \varepsilon|) \mathcal{N},$$

где

$$I_{L_j}^{\text{match}}(u_{\text{rem}}) = \left( \mathcal{L} \tilde{\mathbf{v}}_{(j)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j), u_{\text{rem}} \right)_\Omega. \tag{7.23}$$

Настало время воспользоваться результатом применения процедуры сращивания в п. 5, а именно, заметить, что в силу соотношений (5.11) и (1.18), (5.12), а также определения (3.12) матрицы  $\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}$  члены  $I_j^{\mathbf{u}0}(u_{\text{rem}})$ ,  $I_{U_j}^{0r}(u_{\text{rem}})$  и  $I_{L_j}^{\text{match}}(u_{\text{rem}})$ , появившиеся в (7.11), (7.16) и (7.23), обращается в нуль. Точно также слагаемое

$$I_{B_j}^{\text{match}}(u_{\text{rem}}) = \left( \mathcal{B}\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; 0, s_j), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma}$$

из аналогичного (5.12) представления

$$\begin{aligned} h \left( \mathcal{B}(\chi_j^h \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}\sigma^{(n)}(\mathbf{u})), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} &= h \left( \mathcal{B}\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}\sigma^{(n)}(\mathbf{u}), \chi_j^h u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} \\ &+ h \left( [\mathcal{B}, \chi_j^h] \tilde{\mathbf{v}}_{(j)}\sigma^{(n)}(\mathbf{u}), u_{\text{rem}} \right)_{\Gamma} =: I_{\Gamma_j}^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}) + \tilde{I}_{\Gamma_j}^{\mathbf{v}}(u_{\text{rem}}). \end{aligned}$$

взаимно уничтожается с членами  $I_{\Gamma_j}^{\mathbf{u}0}$  и  $I_{\Gamma_j}^{0r}$  из (7.13) и (7.19) соответственно.

Подведем итог. Все слагаемые из правой части соотношения (7.5) обработаны и, собрав приведенные оценки для них при учете соотношений (6.25) и (7.10), выводим неравенства

$$E(u - u_{as}, u - u_{as}; \Omega)^{1/2} \leq Ch^{3/2}(1 + |\ln \varepsilon|) \quad (7.24)$$

и

$$\|u - u_{as}; H^1(\Omega)\| = \|u_{\text{rem}}; H^1(\Omega)\| \leq Ch^{3/2}(1 + |\ln \varepsilon|)^2. \quad (7.25)$$

**Теорема 7.3.** *Решение  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  смешанной краевой задачи (1.1), (1.5), (1.6) с правой частью  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})^2$  (или (1.8) в вариационной формулировке) и асимптотическое решение (7.4), построенное в п. 2, п. 3 и п. 5, связаны неравенствами (7.24) и (7.25).*

Асимптотическая конструкция (7.4) помимо “основного” решения  $\mathbf{u}$  предельной задачи (1.17), (1.18) содержит “лишние” элементы – пограничные слои и срезающие функции. Удалим их в двух ситуациях (1.24) и (1.26) для того, чтобы сравнить именно вектор-функции  $u$  и  $\mathbf{u}$ .

**Следствие 7.2.** *Пусть параметры  $h$  и  $\varepsilon$  связаны соотношением (1.24). Решение  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  исходной задачи (1.1), (1.5), (1.6) и решение  $\mathbf{u}$  предельной задачи Дирихле (1.17), (1.25) находятся в отношении*

$$\|u - \mathbf{u}; H^1(\Omega)\| \leq Ch^{3/2}(1 + m|\ln h|)^2. \quad (7.26)$$

**Доказательство.** Достаточно оценить соболевские нормы пограничных слоев и присоединить соответствующие члены асимптотического

решения (7.4) к остатку. Благодаря степенному затуханию матрицы-функции  $\tilde{v}_{(j)}$  на бесконечности находим:

$$h^2 \|\chi_j^h \tilde{v}_{(j)} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}); H^1(\Omega)\|^2 \leq ch^2,$$

$$h \left\| \sum_{j=0}^{J-1} \chi_j^h \tilde{v}_{(j)} \sigma^{(n)}(|bfu); H^1(\Omega) \right\| \leq chJ^{-1/2} = ch^{1/2}. \quad \boxtimes$$

Похожие вычисления, опирающиеся на экспоненциальное затухание вектор-функций  $\tilde{G}^q$  и  $w'$ , приводят к соотношению

$$h^2 \|\mathcal{X}^{h,\varepsilon} \chi_\Gamma(\tilde{C}\Lambda \partial_n \mathbf{u} - w'); H^1(\Omega)\|^2 \leq c \int_{-D/2}^0 e^{2\kappa n/h} dn \leq Ch^{1/2}.$$

Наконец, ввиду гладкости поля  $\mathbf{u}$  оценка вектор-функции  $(1 - \mathcal{X}^{h,\varepsilon})\mathbf{u}$ , носитель которой содержится в объединении  $ch\varepsilon$ -окрестностей точек  $P_0, \dots, P_{J-1}$  не отличается от приведенной в списке (7.9) величины  $I_j^f(u_{\text{rem}})$ .  $\square$

**Следствие 7.3.** Пусть параметры  $h$  и  $\varepsilon$  связаны соотношением (1.26). Решение  $u \in H_0^1(\Omega; \gamma^{h,\varepsilon})^2$  исходной задачи (1.1), (1.5), (1.6) и решение  $\mathbf{u}$  предельной задачи Дирихле (1.17), (5.13) находятся в отношении

$$E(u - \mathbf{u}, u - \mathbf{u}; \Omega) \leq Ch^{1/2}.$$

**Доказательство.** Обработка энергетической нормы пограничных слоев не отличается от приведенной при проверке следствия 7.2.  $\square$

**Замечание 7.1.** По причине вытекающей из (1.26) формулы  $|\ln \varepsilon| = O(m/h)$  пришлось в следствии 7.3 ограничиться применением оценки (7.24): неравенство (7.24) приобретает мажоранту, растущую при  $h \rightarrow +0$ . В ситуации (1.24) справедливо соотношение  $|\ln \varepsilon| = O(m|\ln h|)$ , что и объясняет появление множителя  $(1 + m|\ln h|)^2$  в оценке (7.26).  $\boxtimes$

**8. Обсуждение результатов.** 1°. *Геометрия.* Гладкость границы  $\Gamma = \partial\Omega$  по существу не нужна — из-за наличия точек встречи условий Дирихле и Неймана решение  $u$  задачи (1.1), (1.5), (1.6) все равно не попадает в пространство  $H^2(\Omega)^2$ . Например, результаты в основном сохраняются для диска циркулярной пилы с зубцами высотой  $h\varepsilon$  и

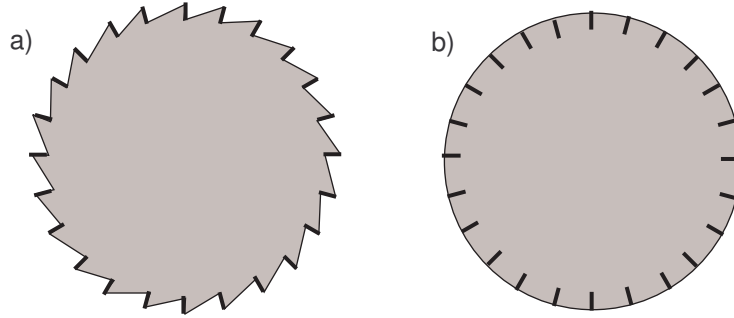


Рис. 4. Диск циркулярной пилы (а) и растрескавшееся по краю блюдце (b).

длиной  $O(h)$  или блюдца с  $h$ -периодическим семейством краевых трещин глубиной  $O(h\varepsilon)$  и жестко защемленными берегами (рис. 4,а и b).

$2^\circ$ . *Гладкость правой части системы уравнений.* Включение  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})^2$ , разумеется, избыточно. По существу использовалась только формула Тейлора (5.1), которая обеспечена условием  $\mathbf{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega)^2$  (пространство Гельдера с показателем  $\alpha \in (0, 1)$ ). Таким образом, ввиду присутствия (малых) множителей  $\mathbf{h}$  в оценке (5.17) достаточно предположить включение  $f \in C^{1,\alpha}(\Omega)^2$  и тем самым гарантировать, что малость  $O(n^{2+\alpha})$  остатка  $\tilde{\mathbf{u}}(x)$  в формуле Тейлора. Впрочем, при малом параметре  $\mathbf{h} = h(1 + |\ln \varepsilon|)$  из (5.16) требуется дополнительная гладкость правой части  $f \in C^{1,\alpha}(\Omega)^2$  из-за присутствия весового множителя  $\mathbf{h}$  в норме из левой части оценки (5.17).

Указанные ограничения нужны только в окрестности  $\mathcal{U}$  контура  $\Gamma$ , а внутри области  $\Omega$  хватает включения  $f \in L^2(\Omega \setminus \mathcal{U})^2$ .

Механически осмысленными являются две ситуации: постоянная сила тяжести

$$f(x) = f^0(e_{(2)} \cos \vartheta + e_{(2)} \sin \vartheta)$$

действует под углом  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  к оси абсцисс или внешнее воздействие прикладывается на удалении от зон защемления (1.3), т.е.  $f = 0$  в окрестности края пластины. В обеих ситуациях указанные требования гладкости выполнены.

При понятных изменениях функциональных пространств можно иметь дело с сосредоточенными силой или моментом внутри области  $\Omega$  – такие постановки задач часто встречаются в механике.

В принципе приложение нагрузки на малых участках  $\zeta^{h,\varepsilon}$  границы  $\Gamma$ , где были поставлены однородные условия Неймана (1.6), труднодостижимо в реальности, но в этом случае слагаемое  $w'(\xi; s)$  во внутреннем разложении (5.3) следует строить при учете правой части краевого условия

$$\sigma(n)(u; x) = g\left(\frac{s}{\varepsilon}, s\right), \quad x \in \zeta^{h,\varepsilon} = \Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{J-1} \overline{\gamma_j^{h,\varepsilon}},$$

1-периодической по “быстрой” переменной  $\xi_2 = \varepsilon^{-1}s$  и гладкой по “медленной” переменной  $s$ .

$\mathcal{L}^\circ$ . *Скалярная задача*. Смешанная краевая задача

$$-\Delta_x u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (8.1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \gamma^{h,\varepsilon}, \quad (8.2)$$

$$\partial_n u(x) = 0, \quad x \in \zeta^{\gamma,\varepsilon}, \quad (8.3)$$

элементарная в части построения пограничных слоев, не встречает дополнительных трудностей и в части обоснования асимптотики.

Значительно упрощаются предельные задачи. Именно, нужное логарифмически растущее на бесконечности решение  $\mathbf{v}$  смешанной краевой задачи в полуплоскости

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta \mathbf{v}(\eta) &= 0, \quad \eta \in \mathbb{R}_-^2, \\ \mathbf{v}(0, \eta_2) &= 0, \quad \eta_2 \in (a_-, a_+), \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta_1}(0, \eta_2) &= 0, \quad \eta_2 \in (-\infty, a_-) \cup (a_+, +\infty), \end{aligned} \quad (8.4)$$

есть не что иное, как удвоенный емкостной потенциал, т.е.

$$\mathbf{v}(\eta) = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{1}{|\eta|} + \ln c_{\log}(v(a_\pm)) \right) + O\left(\frac{1}{|\eta|}\right), \quad |\eta| \rightarrow +\infty, \quad (8.5)$$

где  $c_{\log}(v(s))$  – логарифмическая емкость замкнутого отрезка

$$\overline{v(a_\pm)} = \{\eta : \eta_1 = 0, \eta_2 \in [a_-, a_+]\}$$

длиной  $a = a_+ - a_- > 0$  (см. монографии [35, 36]). При этом функция  $\mathbf{v}$ , продолженная по четности через ось абсцисс, является решением задачи Дирихле по плоскости с разрезом  $\overline{v(a_\pm)}$ .



В асимптотических конструкциях также фигурирует функция Грина задачи в полуполосе

$$-\Delta_\xi G(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) = \delta(\xi_2), \quad \xi_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (8.7)$$

$$G\left(\xi_1, \frac{1}{2}\right) = G\left(\xi_1, -\frac{1}{2}\right), \quad \frac{\partial G}{\partial \xi_1}\left(\xi_1, \frac{1}{2}\right) - \frac{\partial G}{\partial \xi_1}\left(\xi_1, -\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \xi_1 < 0, \quad (8.8)$$

которая допускает представления

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} + G_0 + O(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow +0,$$

$$G(\xi) = \xi_1 + O(e^{\sqrt{\pi}\xi_1}), \quad \xi_1 \rightarrow -\infty \quad (8.9)$$

(ср. формулы (2.2), (4.1), (2.5) и (4.2),(4.3)). Функция  $G$  четная относительно переменной  $\xi_2$ , а значит, условия периодичности (8.8) можно заменить условиями Неймана

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_1}\left(\xi_1, \pm \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \xi_1 < 0. \quad (8.10)$$

Наконец, в асимптотической модели задачи (8.1)–(8.3) уравнение Пуассона

$$-\Delta_x \mathbf{u}(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

снабжается условием Робэна

$$\mathbf{u}(x) + \mathbf{K}^{h,\varepsilon}(a(s))\partial_n \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

с положительным при малом  $\varepsilon > 0$  коэффициентом

$$\mathbf{K}^{h,\varepsilon}(a(s)) = \frac{h}{\pi} (|\ln \varepsilon| + G_0 - c_{\log}(v(a_\pm(s)))) .$$

В отличие от задач теории упругости коэффициенты в представлениях (8.5) и (8.9) решений задач (8.4) и (8.6), (8.7), (8.10) вычисляются явно при помощи конформных преобразований, однако делать это не будем.

4°. *Сверхузкие участки с условиями Дирихле.* Предположим, что в определении (1.3)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-mh^{-1-\beta}}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad m > 0, \quad \beta > 0. \quad (8.11)$$

(ср. формулу (1.26), в которой  $\beta = 0$ ). В этом случае матрица (5.12) принимает вид

$$\mathbf{K}^{h,\varepsilon}(s) = h^{-\beta}(\mathbf{K}_m V_2 + O(h^{1+\beta})), \quad \mathbf{K}_m = \frac{m}{2\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}, \quad (8.12)$$

а значит, в пределе при  $h \rightarrow +0$  возникают краевые условия Неймана

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; x) = 0, x \in \Gamma. \quad (8.13)$$

Задача (1.17), (8.13) приобретает три условия разрешимости, а именно, должны обратиться в нуль интегралы

$$\mathbf{F}_j := \int_{\Omega} f_j(s) dx, j = 1, 2, \quad \mathbf{F}_{\theta} := \int_{\Omega} (x_1 f_2(x) - x_2 f_1(x)) dx. \quad (8.14)$$

Как нетрудно проверить, решение  $\mathbf{u}$  задачи (1.17), (1.18) с матрицей (8.12) принимает вид

$$\mathbf{u}(x) = h^{-\beta}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{\theta}\theta(x)) = \mathbf{u}^0(x) + \dots \quad (8.15)$$

Постоянные столбец  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$  и скаляр  $\mathbf{u}_{\theta} \in \mathbb{R}$  находятся из условий разрешимости системы дифференциальных уравнений (1.17) с краевым условием

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}^0; 0, s) = -\mathbf{K}_m^{-1}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{\theta}\theta(x)), \quad x \in \Gamma, \quad (8.16)$$

а именно, из системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}_m^{-1} \mathbf{M}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_{\theta}) = \mathbf{F} := (\bar{\mathbf{F}}, \mathbf{F}_{\theta}) \quad (8.17)$$

где столбец  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$  составлен из интегралов (8.14), а  $\mathbf{M}$  – матрица Грама размером  $3 \times 3$ , образованная из линейно независимых вектор-функций  $e_{(1)}$ ,  $e_{(2)}$  и  $\theta$  при помощи скалярного произведения в  $L^2(\Gamma)^2$ , а значит, симметричная и положительно определенная. Итак, главный член разложения (8.15) найден из системы (8.17), причем задачи (1.17), (8.16) стала разрешимой.

К сожалению, полученные в п. 7 оценки асимптотических остатков позволяют обосновать модель в рассматриваемой ситуации (8.11) только при  $\beta \in (0, 1/2)$ , а именно, вывести “энергетическое” неравенство

$$E(u - \mathbf{u}, u - \mathbf{u}; \Omega) \leq ch^{-\beta+1/2}.$$

При этом без изменений остается обработка пограничных слоев, приведенная в доказательстве следствия 7.2.

5°. *О сходимостях.* В ситуации (1.24) следствие 7.2 обеспечивает оценку соболевской нормы разности решений  $u$  и  $\mathbf{u}$  задач (1.1), (1.5), (1.6) и (1.17), (1.25), а значит, устанавливает сильную в  $H^1(\Omega)^2$  сходимость

$$u \rightarrow \mathbf{u} \text{ при } h \rightarrow +0 \quad (8.18)$$

и указывает ее скорость  $O(h^{1/2})$ .

В ситуации (1.26) следствие 7.3 гарантирует сходимость (8.18) только по “энергетической” метрике  $E(\cdot, \cdot; \Omega)^{1/2}$ . Согласно формулам (1.9) и (1.2) отсюда вытекает сильная в  $L^2(\Omega)^2$  сходимость компонент тензора напряжений

$$\sigma_{jk}(u) \rightarrow \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \text{ при } h \rightarrow +0, \quad j, k = 1, 2 \quad (8.19)$$

Следует отметить, что сходимости (8.19) легко предсказуемы, так как

$$\|\sigma_{jk}(u); L^2(\Omega)\|^2 \leq CE(u, u; \Omega).$$

Доказательству аналогичных сходимостей для компонент вектора смещений препятствует, например, присутствие большого множителя  $(1 + |\ln \varepsilon|)^2$  в неравенствах Корна (1.15), (1.16) и (6.25). Авторы не знают, можно ли устранить его.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. — Наука, М. 1973.
2. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*. — Мир, М. 1974.
3. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*. — Пробл. матем. анализ, вып. 16, СПб: изд-во СПбГУ. 1997. 167–192.
4. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
5. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*, Киев, Наукова думка, 1974.
6. J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Vibration and Coupling of Continuous System*, Asymptotic methods. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1989. 421 p.
7. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenevski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*, 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000)
8. E. Sanchez-Palencia, *Boundary value problems in domains containing perforated walls*, Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. III (Paris, 1980/1981), p. 309–325, Res. Notes in Math., 70, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.
9. F. Murat, *The Neumann sieve*, Nonlinear variational problems (Isola d'Elba, 1983), 24–32, Res. Notes in Math., 127, Pitman, Boston, MA, 1985.
10. M. Lobo, E. Perez, *Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions*. — Math. Modelling and Numer. Analysis. **22**, No. 4 (1988), 609–624.

11. С. А. Назаров, *Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями*. — *Мат. сб.* **181**, No. 3 (1990), 291–320.
12. M. Lobo, E. Perez, *Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies*. — *Bull. Math. Sci. 2 Ser.* **116** (1992), 399–426.
13. Г. А. Чечкин, *Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий*. — *Мат. сб.* **184**, No. 6 (1993), 99–150.
14. C. Constanda, M. Lobo, E. Perez, *On the bending of plate with transverse shear deformation and mixed boundary conditions*. — *Math. Meth. in Appl. Sci.* **18** (1995), 337–344.
15. M. Lobo, O. A. Oleinik, E. Perez, T. A. Shaposhnikova, *On homogenization of solutions of boundary value problems in domains, perforated along manifolds*. — *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4)*. **XXV** (1997), 611–629.
16. Y. Amirat, G. A. Chechkin, R. R. Gadyl'shin, *Asymptotics of simple eigenvalues and eigenfunctions for the Laplace operator in a domain with oscillating boundary*. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **46**, No. 1 (2006), 102–115.
17. С. А. Назаров, *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей*. — *Изв. РАН, Сер. матем.* **72**, No. 3 (2008), 103–158.
18. Y. Amirat, O. Bodart, G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, *Asymptotics of a spectral-sieve problem*. — *J. Math. Anal. Appl.* **435**, No. 2 (2016), 1652–1671.
19. А. Г. Чечкина, *Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова*. — *Изв. РАН, Сер. матем.* **81**, No. 1 (2017), 203–240.
20. D. Gomez, S. A. Nazarov, E. Perez, *Homogenization of Winkler–Steklov spectral conditions in three-dimensional linear elasticity*. — *Z. Angew. Math. Phys.* **69**, No. 2 35.
21. Р. Р. Гадильшин, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, *Об асимптотиках собственных значений краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова*. — *Изв. РАН, Сер. мат.* **82**, No. 6 (2018), 37–64.
22. D. Gómez, S. A. Nazarov, M.-E. Pérez-Martinez, *Asymptotics for spectral problems with rapidly alternating boundary conditions on a strainer Winkler foundation*. — *J. Elasticity*, **142** (2020), 89–120.
23. Г. П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*, Наука, М. 1974.
24. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела*, Наука, М. 1979.
25. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. — *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, No. 1 (1964), 35–92.
26. В. А. Солонников, *Об обших краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглица–Л. Ниренберга. I*. — *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **28**, No. 3 (1964), 665–706.
27. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М. 1971.
28. Н. Х. Арутюнян, С. А. Назаров, *Об особенностях функции напряжения в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием*. — *Прикл. матем. и мех.* **47**, No. 1 (1983), 122–132.

29. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Тр. Моск. мат. об-ва **16** (1963), 219–292.
30. S. A. Nazarov, V. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
31. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер, *Теория упругости*, 2-е изд. М.: Наука, 1979.
32. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*, М.: Мир, 1967.
33. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, М.: Наука, 1989.
34. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна*. — Усп. матем. наук. **43**, No. 5 (1988), 55–98.
35. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*. М.: Наука, 1966.
36. Г. Поля, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, М.: Физматгиз, 1962.

Nazarov S. A., Taskinen J. A model of a plane deformation state of a two-dimensional plate with small almost periodic clamped parts of the edge.

We construct asymptotics, as the small positive parameters  $h$  and  $\varepsilon$  tend to zero, of the displacement and stress fields in a planar isotropic body whose boundary is rigidly fixed at  $h$ -periodically posed boundary parts of length  $O(h\varepsilon)$ . We propose an asymptotic model that involves the Winkler–Robin boundary conditions connecting the displacement vector and the vector of normal stresses at the boundary, and provides acceptable approximation for the solution of the original problem for a wide range of the parameters  $h$  and  $\varepsilon$ . Error estimates are based on various weighted inequalities.

Институт Проблем машиноведения РАН  
199178. СПб. В. О. Большой пр., 61  
E-mail: [srgnazarov@yahoo.co.uk](mailto:srgnazarov@yahoo.co.uk)

Поступило 16 сентября 2021 г.

University of Helsinki, Department of  
Mathematics and Statistics  
Pietari Kalminkatu 5, P. O. Box 68, 00014  
Helsinki, Finland