Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

А. С. Михайлов, В. С. Михайлов

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ С ПОМОЩЬЮ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Посвящается юбилею Михаила Михайловича Попова

§1. Introduction

Полубесконечную цепочку Тоды можно записать [21, 22] как следующую бесконечномерную нелинейную систему:

$$\begin{cases} \dot{a}_n(t) = a_n(t)\left(b_{n+1}(t) - b_n(t)\right), \\ \dot{b}_n(t) = 2\left(a_n^2(t) - a_{n-1}^2(t)\right), \quad t \geqslant 0,\, n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

для которой ищется решение, удовлетворяющее начальному условию

$$a_n(0) = a_n^0, \quad b_n(0) = b_n^0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

где a_n^0, b_n^0– вещественные и $a_n^0 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Методы вычисления функций $a_n(t)$, $b_n(t)$ являются предметом многих исследований, см., например, [6, 21, 22] и ссылки там. В этих статьях авторы использовали метод обратной задачи рассеяния, который накладывает существенные ограничения на начальные данные. Наиболее часто используется предположение, что a_n^0, b_n^0 $n = 1, 2, \ldots$ ограничены. В то же время важен вопрос о возможности построения решения (1), (2) для "неограниченных"начальных данных [8, 9]. В данной статье мы показываем как можно построить решение (1), (2) для довольно общего класса неограниченных начальных последовательностей.

Введем два оператора, действующих в l^∞, с областями определения

$$D(H(t)) = D(P(t)) = \{\varkappa = (\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots) \,|\, \varkappa_n = 0, \text{ для } n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}\},$$

Ключевые слова: цепочка Тоды, проблема моментов, матрицы Якоби.

Михайлов А.С. и Михайлов В.С. были частично поддержаны РФФИ 18-01-00269 и проектом фонда Volkswagen “From Modeling and Analysis to Approximation”.

по правилам:

$$
\begin{aligned}
&(H(t)f)_1 = a_1(t)f_2 + b_1(t)f_1,\\
&(H(t)f)_n = a_n(t)f_{n+1} + a_{n-1}f_{n-1} + b_n(t)f_n, \quad n = 2, \dots,\\
&(P(t)f)_1 = a_1(t)f_2,\\
&(P(t)f)_n = a_n(t)f_{n+1} - a_{n-1}(t)f_{n-1}, \quad n = 2, \dots .
\end{aligned}
$$

Отметим, что оператор $H(t)$ задается полубесконечной матрицей Якоби (мы сохраняем для нее те же обозначения):

$$
H(t) = \begin{pmatrix}
b_1(t) & a_1(t) & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot\\
a_1(t) & b_2(t) & a_2(t) & \cdot & 0 & 0 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot\\
0 & 0 & 0 & a_{N-1}(t) & b_N(t) & a_N(t) & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_N(t) & b_{N+1}(t) & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}. \tag{3}
$$

Хорошо известен факт [21, 22], что система (1) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$
\frac{dH}{dt} = PH - HP. \tag{4}
$$

Пусть $d\rho^t(\lambda)$ обозначает спектральную меру оператора, соответствующего матрице Якоби $H(t)$ (см. [1, 20]) и заметим, что мера определена неоднозначно, если $H(t)$ находится в случае предельного круга. Моменты $d\rho^t(\lambda)$ вводятся по правилу

$$
s_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\rho^t(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}
$$

Мы отметим, что здесь мы хотим рассматривать моменты спектральной меры как «обратные данные» и изучать эволюцию моментов относительно параметра t. Это мотивировано тем, что в статьях [11, 12, 14–16] авторы исследовали прямую и обратную динамические задачи для динамической системы с дискретным временем, связанной с конечной и бесконечной матрицами Якоби.

Для вещественных b_k, $k = 1, 2, \ldots$ и $a_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ можно рассмотреть систему

$$\begin{cases} u_{n,t+1} + u_{n,t-1} - a_n u_{n+1,t} - a_{n-1} u_{n-1,t} - b_n u_{n,t} = 0, & n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{N}_0, \\ u_{n,-1} = u_{n,0} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_{0,t} = f_t,\ t \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{6}$$

Эта система является дискретным аналогом начально-краевой задачи для волнового уравнения с потенциалом на полупрямой с управлением Дирихле при $n = 0$. Решение (6) обозначается $u^f_{n,t}$. Зафиксируем некоторое натуральное число T и обозначим через $\mathcal{F}^T$ *внешнее пространство* системы (6), пространство элементов управления (входов): $\mathcal{F}^T := \mathbb{R}^T$, $f \in \mathcal{F}^T$, $f = (f_0, \ldots, f_{T-1})$. Соответствие вход-выход в системе (6) реализуется с помощью *оператора отклика*: $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ и определяется правилом

$$\left(R^T f\right)_t = u^f_{1,t}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Этот оператор (дискретная версия динамического отображения Дирихле–Неймана) играет роль обратных данных, и в [13, 14] было предложено несколько методов восстановления матрицы H по этому оператору. Для $f = (f_0, f_1, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, \ldots)$ свертка $c = f * g = (c_0, c_1, \ldots)$ определяется по формуле

$$c_t = \sum_{s=0}^{t} f_s g_{t-s}, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Было показано, что оператор отклика имеет вид

$$\left(R^T f\right)_t = r * f_{\cdot-1},$$

где ядро свертки R^T, называемое *вектором отклика*, допускает спектральное представление

$$r_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_k(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $d\rho(\lambda)$ - спектральная мера оператора, соответствующего матрице Якоби H в (6), а $\mathcal{T}_l(2\lambda)$, $l = 1, 2, \ldots$ - многочлены Чебышева второго рода, т.е. они получаются как решение следующей разностной задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{t+1} + \mathcal{T}_{t-1} - \lambda \mathcal{T}_t = 0, \\ \mathcal{T}_0 = 0,\ \mathcal{T}_1 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть для $K \in \mathbb{N}$ матрица $\Lambda_K \in \mathbb{M}^K$ определяется следующим правилом:

$$\Lambda_K = a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i+j \text{ нечетно}, \\ C^j_{\frac{i+j}{2}}(-1)^{\frac{i+j}{2}+j}, \end{cases} \tag{9}$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты. Формула (7) показывает, что элементы вектора отклика связаны с моментами соотношением

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{K-1} \end{pmatrix} = \Lambda_K \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_{K-1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В упомянутых выше статьях исследованы обратные динамические и спектральные задачи для (6), установлена связь метода граничного управления [3, 4] с методом де Бранжа [5] и предложен динамический подход к решению классических проблем моментов [2, 20]. Мотивация использовать набор моментов в качестве данных, эволюция которых может быть использована при решении системы Тоды (1), (2), исходит из формул (7) и (10). Эти формулы говорят, что знание вектора отклика r, т.е. динамических обратных данных для (6) эквивалентно знанию набора моментов. Другими словами, с учетом (7) набор моментов можно рассматривать как обратные динамические данные для системы (6). Основные результаты данной статьи касаются эволюции во времени моментов $s_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, задаваемых (5), с мерой $d\,\rho^t(\lambda)$ – спектральной мера $H(t)$.

Во втором параграфе мы даем необходимую информацию о конечномерных цепочках Тоды, а также переписываем некоторые результаты из [18] в форме, удобной для наших целей. В третьем параграфе мы напоминаем читателю некоторые основные факты о классических проблемах моментов и их связи с операторами Якоби и пространствами де Бранжа. В последнем параграфе мы выводим рекуррентные и точные формулы эволюции моментов $s_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ при потоке Тоды, с помощью которых можно построить решение (1), (2) для некоторых классов неограниченных начальных данных.

§2. Конечная цепочка Тоды. Формула Мозера.

Рассмотрим начальную задачу для конечной цепочки Тоды:

$$\begin{cases}\dot a_{N,\,n}(t) = a_{N,\,n}(t)\left(b_{N,\,n+1}(t) - b_{N,\,n}(t)\right), \\ \dot b_{N,\,n}(t) = 2\left(a^2_{N,\,n}(t) - a^2_{N,\,n-1}(t)\right),\end{cases} \qquad t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Ищется решение, удовлетворяющее начальному условию

$$a_{N,\,n}(0) = a^0_{N,\,n}, \quad b_{N,\,n}(0) = b^0_{N,\,n}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

где $a^0_{N,\,n}$, $b^0_{N,\,n}$ – вещественны и $a^0_{N,\,n} > 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Общеизвестный факт [21,22] что система (11) эквивалентна (4) с матрицей $H_N(t)$, заданной блоком $N \times N$ из (3) и $P_N(t)$ определенным как

$$\begin{aligned}&(P_N(t)f)_1 = a_1(t)f_2,\\ &(P_N(t)f)_n = a_n(t)f_{n+1} - a_{n-1}(t)f_{n-1}, \quad n = 2, \ldots, N-1,\\ &(P_N(t)f)_N = a_{N-1}(t)f_{N-1}.\end{aligned}$$

Через $\{\lambda_{N,\,k}(t),\, \phi_{N,\,k}(t)\}_{k=1}^N$ мы обозначаем собственные значения и собственные векторы $H_N(t)$:

$$H_N(t)\phi_{N,\,k}(t) = \lambda_{N,\,k}(t)\phi_{N,\,k}(t), \;\; \phi_{N,\,k}(t) \in \mathbb{R}^N, \;\; \{\phi_{N,\,k}(t)\}_1 = 1, \tag{13}$$

а через $\rho^t_N(\lambda)$, – спектральную меру $H_N(t)$, заданную формулой

$$d\rho^t_N(\lambda) = \sum_{k=1}^N \sigma^2_{N,\,k}(t)\delta(\lambda - \lambda_{N,\,k}(t)), \tag{14}$$

где

$$\sigma^2_{N,\,k}(t) = \frac{1}{(\phi_{N,\,k}(t), \phi_{N,\,k}(t))}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Ниже мы приведем некоторые результаты [18] (см. также [17]) к удобному для нас виду. Для простоты мы обычно опускаем аргумент t.

Утверждение 1. *Собственные значения матрицы $H_N(t)$ не зависят от t: $\lambda_{N,\,j}(t) = \lambda_{N,\,j}(0) = \lambda_{N,\,j}$.*

Этот факт следует из представления

$$\frac{dH_N}{dt} = i\,(H_N iP_N - (iP_N)H_N) = \{-iP_N, H_N\},$$

а значит $H_N(t) = e^{P_N t} H_N(0) e^{-P_N t}$.

Через $\|\cdot\|$ мы обозначаем норму в $\mathbb{R}^N$. Функция Вейля, связанная с H_N (см. [7, 10]), вводится правилом

$$m_N(\lambda) := (R(\lambda)e_1, e_1)\,,$$

где

$$R(\lambda) = (H_N(t) - \lambda I)^{-1}\,, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где 1 находится на $i-$м месте.

Утверждение 2. *Выполняется следующее соотношение*

$$\frac{d}{dt} m_N(\lambda) = 2a_{N,1} R_{21}(\lambda). \tag{15}$$

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -R\frac{dH}{dt}R = -RPHR + RHPR \\ &= -RP(I+\lambda R) + (I+\lambda R)PR = PR - RP.\end{aligned}$$

Используя это соотношение, получаем, что

$$\frac{d}{dt} m(\lambda) = ((PR - RP)\, e_1, e_1) = -2\,(RPe_1, e_1) = 2a_1 R_{21}. \qquad \square$$

Введем обозначение

$$B_N = H_N - \lambda I = \begin{pmatrix} b_{N,1} - \lambda & a_{,1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{N,1} & b_{N\,2} - \lambda & a_{N,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{N,2} & b_{N\,3} - \lambda & a_{,3} & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & b_{N,N} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Через B_k, $1 \leqslant k < N$ мы обозначаем блоки из B_N, заданные пересечением k строк $N-k+1, \dots, N-1, N$ и k столбцов. $N-k+1, \dots, N-1, N$. Введем обозначение $\Delta_k := \det B_k$, $k = 1, \dots, N$. Тогда, используя простейшие факты линейной алгебры, можно увидеть, что

$$\begin{aligned} m_N(\lambda) &= R_{11} = \frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N}, \\ R_{21}(\lambda) &= R_{12}(\lambda) = (R(\lambda)e_1, e_2) = -\frac{a_{N,1}\Delta_{N-2}}{\Delta_N}. \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют переписать (15) в следующем виде

$$\frac{d}{dt} m_N(\lambda) = 2\,(1 - (b_{N,1} - \lambda)\, m_N(\lambda))\,. \tag{16}$$

Из представлений функции Вейля [7, 10] и спектральной меры (14) следует, что

$$m_N(\lambda) = \int\limits_R \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma^2_{N,\,k}(t)}{\lambda - \lambda_{N,\,k}}.$$

Подстановка приведенного выше представления в (16) дает следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2\dot\sigma_{N,\,k}\sigma_{N,k}}{\lambda - \lambda_{N,\,k}} = 2\left(1 - (b_{N,\,1} - \lambda)\sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma^2_{N,\,k}}{\lambda - \lambda_{N,\,k}}\right),$$

где точкой обозначено дифференцирование по t. Умножая последнее равенство на $(\lambda - \lambda_{N,\,k})$ и полагая $\lambda = \lambda_{N,\,k}$, мы приходим к следующей системе:

$$\dot\sigma_{N,\,k}(t) = -(b_{N,\,1} - \lambda_{N,\,k})\sigma_{N,\,k}(t), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{17}$$

Утверждение 3. *Коэффициент $b_{N,\,1}$ допускает представление*

$$b_{N,\,1} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{N,\,k}\sigma^2_{N,\,k}.$$

Доказательство. Обозначим через C^k, $k = 1, \ldots, N$ собственные векторы H_N:

$$H_N C^k = \lambda_{N,\,k} C^k, \quad C^k = \begin{pmatrix} C^k_1 \\ C^k_2 \\ \ldots \\ C^k_N \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

такие что $\|C^k\| = 1$, $k = 1, \ldots, N$. Тогда, согласно спектральной теореме

$$C^* H_N C = \begin{pmatrix} \lambda_{N,\,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{N,\,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{N,\,N} \end{pmatrix}, \text{ где } C = \left(C^1 | C^2 | \ldots | C^N\right),$$

т.е. матрица C строится из столбцов C^k, $k = 1, \ldots, N$. Тогда

$$H_N = C \begin{pmatrix} \lambda_{N,\,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{N,\,2} & 0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{N,\,N} \end{pmatrix} C^*,$$

откуда, используя (3), получим что

$$b_{N,1} = \{H_N\}_{11} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{N,k} \left(C_1^k\right)^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{N,k} \left(\sigma_{N,k}\right)^2,$$

где мы использовали тот факт, что $C^k = C_1^k \phi_{N,k}$ (см. (13)). □

Вышеприведенное Утверждение позволяет нам переписать систему (17) в следующем виде:

$$\dot{\sigma}_{N,k}(t) = -\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,j}\sigma_{N,j}^2(t) - \lambda_{N,k}\right)\sigma_{N,k}(t), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Утверждение 4. *Решение* (18) *дается* формулой Мозера*:*

$$\sigma_{N,k}^2(t) = \frac{\sigma_{N,k}^2(0)e^{2\lambda_{N,k}t}}{\sum_{j=1}^{N}\sigma_{N,j}^2(0)e^{2\lambda_{N,j}t}}. \tag{19}$$

§3. Моменты спектральной меры конечных и полубесконечных операторов Якоби и пространств де Бранжа.

Для заданной последовательности положительных чисел $\{c_1, c_2, \ldots\}$ и действительных чисел $\{d_1, d_2, \ldots\}$ через A обозначим полубесконечную матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_1 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & c_2 & d_3 & c_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Для $N \in \mathbb{N}$, через A_N мы обозначаем матрицу Якоби $N \times N$, которая представляет собой блок из (20), состоящий из пересечения первых N столбцов и первых N строк A. Введем оператор $A_N : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ по правилу:

$$(A_N\psi)_n = \begin{cases} d_1\psi_1 + c_1\psi_2, \quad n = 1, \\ c_n\psi_{n+1} + c_{n-1}\psi_{n-1} + d_n\psi_n, \quad 2 \leqslant n \leqslant N-1, \\ c_{N-1}\psi_{N-1} + d_N\psi_N, \quad n = N. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть $d\mu_N(\lambda)$ обозначает спектральную меру A_N, построенную по формуле (14).

Полубесконечной матрице A сопоставим симметричный оператор A (сохраняем те же обозначения) в пространстве l_2, определенный на конечных последовательностях:

$$D(A) = \{\varkappa = (\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots) \,|\, \varkappa_n = 0, \text{ для } n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}\},$$

и заданный формулой

$$(A\theta)_1 = d_1\theta_1 + c_1\theta_2,$$
$$(A\theta)_n = c_n\theta_{n+1} + c_{n-1}\theta_{n-1} + d_n\theta_n, \quad n \geqslant 2.$$

Через $[\cdot\,,\,\cdot]$ мы обозначаем скалярное произведение в l_2. Для заданной последовательности $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots)$ мы определяем новую последовательность

$$(G\varkappa)_1 = d_1\varkappa_1 + c_1\varkappa_2,$$
$$(G\varkappa)_n = c_n\varkappa_{n+1} + c_{n-1}\varkappa_{n-1} + d_n\varkappa_n, \quad n \geqslant 2.$$

Сопряженный оператор $A^*\varkappa = G\varkappa$ определен в области

$$D\left(A^*\right) = \{\varkappa = (\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots) \in l_2 \,|\, (G\varkappa) \in l_2\}.$$

В случае предельной точки (т.е. когда A имеет индексы дефекта $(0,0)$), A в существенном самосопряжен. В случае предельного круга (т.е. когда A имеет индексы дефекта $(1,1)$) обозначим через

$$p(\lambda) = (p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots), \quad q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda), \ldots)$$

два решения разностного уравнения (мы положили здесь $c_0 = 1$):

$$c_n\phi_{n+1} + c_{n-1}\phi_{n-1} + d_n\phi_n = \lambda\phi_n, \quad n \geqslant 1, \tag{22}$$

удовлетворяющие данным Коши $p_1(\lambda) = 1$, $p_2(\lambda) = \frac{\lambda - d_1}{c_1}$, $q_1(\lambda) = 0$, $q_2(\lambda) = \frac{1}{c_1}$. Тогда [19, лемма 6.22]

$$D\left(A^*\right) = D(\overline{A}) \dot{+} \mathbb{R}p(0) \dot{+} \mathbb{R}q(0),$$

где $\dot{+}$ обозначает прямую сумму, а $\overline{A}$ – замыкание A. Все самосопряженные расширения A параметризованы $h \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, обозначаются $A_{\infty,h}$ и определены на области

$$D(A_{\infty,h}) = \begin{cases} D(\overline{A}) \dot{+} \mathbb{R}(q(0) + hp(0)), & h \in \mathbb{R} \\ D(\overline{A}) \dot{+} \mathbb{R}p(0), & h = \infty. \end{cases}$$

Все подробности можно найти в [19, 20]. Введем меру $d\mu_{\infty,h}(\lambda) = \left[dE_\lambda^{A_{\infty,h}} e_1, e_1\right]$, где $dE_\lambda^{A_{\infty,h}}$ - это проекционно-значная спектральная мера $A_{\infty,\,h}$ такая, что $E_{\lambda-0}^{A_{\infty,\,h}} = E_{\lambda}^{A_{\infty,\,h}}$. Из результатов [2] и [20, параграф 5] следует, что $d\mu_N \to d\mu_{\infty,\,\alpha}$ $*-$слабо при $N \to \infty$, где

$$\alpha = -\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(0)}{p_n(0)}. \tag{23}$$

Предположим, что нам дан набор действительных чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. Обозначим через $C_T[X]$ множество многочленов порядка меньше чем T. Тогда $\{s_k\}_{k=0}^{2T-2}$ определяет на $C_T[X]$ билинейную форму по правилу: для $F, G \in C_T[X]$, $F(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{T-1} \alpha_n \lambda^n$, $G(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{T-1} \beta_n \lambda^n$, определим

$$\langle F, G\rangle = \sum_{n,m=0}^{T-1} s_{n+m}\alpha_n\beta_m. \tag{24}$$

Таким образом, квадратичная форма (24) определяется следующей ганкелевой матрицей :

$$S_T = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{T-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & \dots \\ s_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2T-1} \\ s_{T-1} & \dots & \dots & s_{2T-1} & s_{2T-2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В [11,12,14–16] авторы изучали обратные динамические задачи для динамической системы с дискретным временем, связанной с конечными и полубесконечными матрицами Якоби (6). Для этой системы доказано утверждение, эквивалентное следующей теореме (см. также [2,20]):

Теорема 1. *Числа s_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ являются моментами некоторой борелевской меры $d\rho$ на $\mathbb{R}$, т.е.*

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \, d\rho(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда и только тогда, когда матрицы $S_N > 0$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Тогда мера $d\rho$ является спектральной мерой оператора Якоби, ассоциированного с (20) (не определяется однозначно, когда A находится в случае предельного круга), а блок A_N оператора A (т.е. коэффициенты $d_1, d_2, \dots, d_N$, $c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$) могут быть восстановлены из набора моментов $\{s_0, s_1, \dots, s_{2N-2}\}$.

Если $S_K > 0$ для $K = 1, \dots, N_0$ и $\det S_{N_0+1} = 0$, то существует конечный оператор Якоби A_{N_0} (21) такой, что $d\,\rho(\lambda)$ - спектральная *мера этого оператора с конечным носителем, т.е.* $\#\,\mathrm{supp}\,\{d\rho(\lambda)\} = N_0$.

В [12, 14–16] было показано, что $C_T[X]$ - это пространство де Бранжа [5], связанное с системой (6), скалярное произведение в котором определяется

$$\langle F, G\rangle = \sum_{n,m=0}^{T-1} s_{n+m}\alpha_n\beta_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\overline{G(\lambda)}\,d\mu(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\overline{G(\lambda)}\,d\mu_T(\lambda), \tag{26}$$

где $d\mu(\lambda)$ – (любая) спектральная мера, связанная с полубесконечной матрицей A, $d\mu_T(\lambda)$ – спектральная мера, связанная (21) с блоком A_T; и $F, G \in C_T[X]$, $F(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{T-1}\alpha_n\lambda^n$, $G(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{T-1}\beta_n\lambda^n$, связаны с управлениями $f, g \in \mathcal{F}^T$ в (6) по правилам

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{T}\mathcal{T}_k(\lambda)f_{T-k},\; G(\lambda) = \sum_{k=1}^{T}\mathcal{T}_k(\lambda)g_{T-k},$$

где $\mathcal{T}_k$ – многочлены Чебышева второго рода (8).

§4. Эволюция моментов

4.1. Конечномерный случай. Ниже мы используем дополнительный индекс N у моментов, чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем конечномерный случай. Сначала рассмотрим эволюцию моментов

$$s_{N,\,k}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^k\,d\rho_N^t(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

в случае конечномерной системы (11), (12), где $d\rho_N^t(\lambda)$ - спектральная мера $H_N(t)$, заданная формулой (14). Введем вектор-функцию

$$\Theta_N(t) = \begin{pmatrix}\widetilde{\sigma}_{N,\,1}(t)\\ \widetilde{\sigma}_{N,\,2}(t)\\ \dots\\ \widetilde{\sigma}_{N,\,N}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{N,\,1}(0)e^{\lambda_{N,\,1}t}\\ \sigma_{N,\,2}(0)e^{\lambda_{N,\,2}t}\\ \dots\\ \sigma_{N,\,N}(0)e^{\lambda_{N,\,N}t}\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Тогда из (19) и (27) следует, что

$$\sigma_{N,\,k}(t) = \frac{\widetilde{\sigma}_{N,\,k}(t)}{\|\Theta_N(t)\|},$$

где

$$\|\Theta_N(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \sigma_{N,\,j}^2(0) e^{2\lambda_{N,\,j} t}}. \tag{28}$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$s_{N,\,k}(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \, d\rho_N^t(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,\,j}^k \sigma_{N,\,j}^2(t) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,\,j}^k \frac{\widetilde{\sigma}_{N,\,j}^2(t)}{\|\Theta_N(t)\|^2}. \tag{29}$$

Тогда после введения обозначений

$$\widetilde{s}_{N,\,k}(t) = s_{N,\,k}(t)\|\Theta_N(t)\|^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и использования (29) мы видим, что для $k = 1, 2, \ldots$ выполняются следующее соотношение

$$\dot{\widetilde{s}}_{N,\,k}(t) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,\,j}^k 2\dot{\widetilde{\sigma}}_{N,\,j}(t)\widetilde{\sigma}_{N,\,j}(t) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{N,\,j}^{k+1} 2\widetilde{\sigma}_{N,\,j}^2(t) = 2\widetilde{s}_{N,\,k+1}(t). \tag{30}$$

Через $C_N[X]$ мы обозначаем пространство де Бранжа, ассоциированное с конечной матрицей Якоби $H_N(t)$ со скалярным произведением, определяемым формулой (26). Возьмем $F, G \in C_N[X]$, $F(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \alpha_n \lambda^n$, $G(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \beta_n \lambda^n$, скалярное произведение в $C_N([X]$ имеет вид:

$$\langle F, G \rangle = \sum_{n,m=0}^{N-1} s_{N,\,n+m}(t)\alpha_n\beta_m.$$

Умножим обе части указанного равенства на $\|\Theta_N(t)\|^2$ и продифференцируем его по t. Тогда для правой части получим

$$\begin{aligned}\Big([F,G]_{B^N(t)}\,\|\Theta_N(t)\|^2\Big)' &= \sum_{n,m=0}^{N-1} \big(\|\Theta_N(t)\|^2 s_{N,\,n+m}(t)\big)'\,\alpha_n\beta_m \qquad (31)\\ &= \sum_{n,m=0}^{N-1} \big(\widetilde{s}_{N,\,n+m}(t)\big)'\,\alpha_n\beta_m\\ = \sum_{n,m=0}^{N-1} 2\widetilde{s}_{N,\,n+m+1}(t)\alpha_n\beta_m &= 2\|\Theta_N(t)\|^2 \sum_{n,m=0}^{N-1} s_{N,\,n+m+1}(t)\alpha_n\beta_m.\end{aligned}$$

Дифференцируя левую часть, приходим к

$$\begin{aligned}&\Big([F,G]_{B^N(t)}\,\|\Theta_N(t)\|^2\Big)'\\&=\big(\|\Theta_N(t)\|^2\big)'\sum_{n,m=0}^{N-1}s_{N,\,n+m}(t)\alpha_n\beta_m+\|\Theta_N(t)\|^2\sum_{n,m=0}^{N-1}\dot s_{N,\,n+m}(t)\alpha_n\beta_m.\end{aligned}\tag{32}$$

Приравняв (32) и правую и часть (31), мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\frac{\big(\|\Theta_N(t)\|^2\big)'}{\|\Theta_N(t)\|^2}\sum_{n,m=0}^{N-1}s_{N,\,n+m}(t)\alpha_n\beta_m+\sum_{n,m=0}^{N-1}\dot s_{N,\,n+m}(t)\alpha_n\beta_m&\\=2\sum_{n,m=0}^{N-1}s_{N,\,n+m+1}(t)\alpha_n\beta_m.&\end{aligned}$$

Ввиду произвольности F,G мы можем сформулировать следующее

Утверждение 5. *Моменты $s_{N,\,k}(t)$ меры $d\rho_N^t(\lambda)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$\dot s_{N,\,k}(t)+\big(\ln\big\{\|\Theta_N(t)\|^2\big\}\big)'\,s_{N,\,k}(t)=2s_{N,\,k+1}(t),\qquad k=0,1,\ldots.\tag{33}$$

Поскольку мы знаем, что $s_{N,\,0}(t)=1$ для всех t, то (33) позволяет нам определить $s_{N,\,1}(t),s_{N,\,2}(t)\ldots,s_{N,\,2N-2}(t)$ рекурсивно. Далее воспользуемся тем, что набор моментов $s_{N,\,k}(t)$, $k=0,\ldots,2N-2$ определяет $N\times N$ блок $H_N(t)$ матрицы Якоби (3) и, таким образом, коэффициенты $a_{N,\,k}(t)\,,b_{N,\,k}(t)\,,a_{N,\,N}(t)$, $k=1,\ldots,N-1$. Формулы восстановления элементов матрицы Якоби по моментам приведены в [1,11,14,20].

4.2. Подробнее о конечномерном случае, бесконечномерный случай. Через $d\rho_N^0(\lambda)$ мы обозначаем спектральную меру (14) конечного оператора Якоби $H_N(0)$, соответствующую начальным данным в (11), (12):

$$A_N^0=H_N(0)=\begin{pmatrix}b^0_{N,\,1}&a^0_{N,\,1}&0&\cdot&0\\a^0_{N,\,1}&b^0_{N,\,2}&a^0_{N,\,2}&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&a^0_{N,\,N-1}&b^0_{N,\,N}\end{pmatrix}.\tag{34}$$

Заметим, что выражение для квадрата (28) допускает следующее представление

$$\Omega_N(t) := \|\Theta_N(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{N,\,j}^2(0) e^{2\lambda_{N,\,j} t} = \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda t}\, d\rho_N^0(\lambda), \tag{35}$$

здесь мы использовали Предложение 1. Используя (29), получаем следующее

Утверждение 6. *Моменты $s_{N,\,k}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ допускают представление*

$$s_{N,\,k}(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^k e^{2\lambda t}\, d\rho_N^0(\lambda)}{\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda t}\, d\rho_N^0(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{36}$$

Введем матрицы $L_K(t)$ по правилу

$$L_K(t) = \frac{1}{\Omega_N(t)} \begin{pmatrix} e^{2tA_{N,\,0}} & e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0} & \ldots & e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^{K-1} \\ e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0} & e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^2 & \ldots & \ldots \\ e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^{2K-1} \\ e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^{N-1} & \ldots & \ldots & e^{2tA_{N,\,0}} A_{N,\,0}^{2K-2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{2tA_{N,\,0}}}{\Omega_N(t)} \begin{pmatrix} I & A_{N,\,0} & A_{N,\,0}^2 & \ldots & A_{N,\,0}^{K-1} \\ A_{N,\,0} & A_{N,\,0}^2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{N,\,0}^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & A_{N,\,0}^{2K-1} \\ A_{N,\,0}^{K-1} & \ldots & \ldots & \ldots & A_{N,\,0}^{2K-2} \end{pmatrix}.$$

Используя спектральную теорему, видим, что при $t \geqslant 0$

$$\det L_K(t) > 0, \quad K = 0, 1, \ldots, N, \quad \text{и} \quad \det L_{N+1}(t) = 0. \tag{37}$$

Из соотношений (37) и теоремы 1 следует, что моменты $s_{N,\,0}$, $s_{N,\,1}(t)$, …, $s_{N,\,2N-2}(t), \ldots$ для $t \geqslant 0$ соответствуют матрице Якоби $N \times N$.

Теперь вернемся к полубесконечной задаче (1), (2). Введем матрицу, соответствующую начальным данным (2):

$$A^0 = \begin{pmatrix} b_1^0 & a_1^0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ a_1^0 & b_2^0 & a_2^0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1}^0 & b_N^0 & a_N^0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_N^0 & b_{N+1}^0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Через A_N^0 обозначим блок $N \times N$ матрицы A^0. Спектральная мера оператора, соответствующая A_N^0 (см. (21)) обозначается $d\,\rho_N^0(\lambda)$ и определяется формулой (14). Мы знаем, что $d\rho_N^0 \to d\rho_{\infty,\,\alpha}^0$ $*-$слабо при $N \to \infty$, где $d\rho_{\infty,\,\alpha}^0$ – спектральная мера $A_{\infty,\,\alpha}^0$ с α заданным (23).

Решая задачу (11) с начальными условиями (12), заданными матрицей A_N^0, мы получаем формулы (35) для нормирующих коэффициентов и (36) для моментов $d\rho_N^0(\lambda)$.

Можно заметить, что если в (35), (36) носитель «предельной меры» $d\,\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)$ полуограничен, то можно перейти к пределу при $N \to \infty$. В частности, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 7. *Если мера $d\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)$ такова, что*

$$\operatorname{supp}\left\{d\,\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)\right\} \subset (-\infty, M) \tag{39}$$

для некоторого $M \in \mathbb{R}$, то существуют следующие пределы

$$s_k(t) := \lim_{N\to\infty} s_{N,\,k}(t) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k e^{2\lambda t}\, d\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)}{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\lambda t}\, d\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{40}$$

$$\Omega_\alpha(t) := \lim_{N\to\infty} \Omega_N(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\lambda t}\, d\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda).$$

Кроме того, функции $s_k(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\dot{s}_k(t) + \left(\ln\left\{\Omega_\alpha(t)\right\}\right)' s_k(t) = 2 s_{k+1}(t), \quad k = 0, \ldots,\ t > 0, \tag{41}$$

где $s_0(t) = 1$ для $t \geqslant 0$.

Теперь мы можем рассматривать функции, построенные с помощью (40) (или (41)), как моменты спектральной меры некоторой матрицы Якоби, коэффициенты которой (в зависимости от t) мы называем решением (1)–(2).

Замечание 1. Тот факт, что числа $s_k(t)$ для всех $t > 0$ определенные по формуле (40) действительно являются моментами некоторой борелевской меры на $\mathbb{R}$ и, таким образом, соответствуют матрице Якоби (которая зависит от t) следует из наблюдения, что для любого $t > 0$, $s_k(t) = \frac{1}{\Omega_\alpha(t)}\gamma_k(t)$, где $\gamma_k(t)$ – моменты меры $e^{2\lambda t} d\rho_{\infty,\,\alpha}^0(\lambda)$:

$\gamma_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^k e^{2\lambda t}\, d\rho^0_{\infty,\,\alpha}(\lambda)$. И, по существу, они удовлетворяют условиям теоремы 1. Можно также использовать аргументы конечномерного случая и теорему 1, чтобы показать, что все соответствующие детерминанты положительны.

Мы завершаем статью следующей теоремой.

Теорема 2. *Если спектральная мера* $d\,\rho^0_{\infty,\,\alpha}(\lambda)$ *оператора* A^0, *соответствующего данным Коши* (2), *удовлетворяет ограничению (39), то решение* $a_n(t)$, $b_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ *системы* (1)–(2) *определяется через моменты* $s_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, *которые удовлетворяют рекуррентному соотношению* (41) *и задаются формулами* (40).

Формулы для восстановления $a_k(t)$, $b_k(t)$ из $s_k(t)$ являются стандартными и приведены в [1, 11, 14, 20]

Список литературы

1. N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.
2. F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Acad. Press, 1964.
3. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
4. M. I. Belishev, *Boundary control and tomography of Riemannian manifolds (the BC-method).* — Russian Math. Surveys Volume **72**, No. 4 (2017), 581–644.
5. L. de Branges, *Hilbert space of entire functions,* Prentice-Hall, NJ. 1968.
6. L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.
7. F. Gesztesy, B. Simon, *$m-$functions and inverse spectral analisys for finite and semi-infinite Jacobi matrices.* — J. d'Analyse Math. **73** (1997), 267–297.
8. E. K. Ifantis, K. N. Vlachou, *Solution of the semi-ininite Toda lattice for unbounded sequences.* — Lett. Math. Phys. **59** (2002), 1–17.
9. E. K. Ifantis, K. N. Vlachou, *Exact solutions of the semi-infinite Toda lattice with applications to the inverse spectral problem.* — Abstract Appl. Analys. **5** (2004), 435–451.
10. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, S. A. Simonov, *On the relationship between Weyl functions of Jacobi matrices and response vectors for special dynamical systems with discrete time.* – Math. Methods Appl. Sci **41**, No. 16 (2018), 6401–6408.
11. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Inverse dynamic problems for canonical systems and de Branges spaces.* — Nanosystems: Phys., Chemist., Math. **9**, No. 2 (2018), 215–224.
12. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Boundary control method and de Branges spaces. Schrödinger operator, Dirac system, discrete Schrödinger operator.* — J. Math. Analys. Appl. **460**, No. 2 (2018), 927–953.

13. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamical inverse problem for the discrete Schrödinger operator.* Nanosystems: Phys., Chemist., Math. **7**, No. 5 (2016), 842–854.
14. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamic inverse problem for Jacobi matrices.* — Inverse Problems and Imaging **13**, No. 3 (2019), 431–447.
15. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *On application of the Boundary control method to classical moment problems*, to appear in J. Phys.: Conference Series - IOPscience.
16. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems.* — J. Math. Analys. Appl. **487**, No. 1 (2020).
17. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Finite Toda lattice and classical moment problem.* —Nanosystems: Phys., Chemist., Math. **11**, No. 1 (2020), 25–29.
18. J. Moser, *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system.* — Lect. Notes Phys. **38** (1975), 67–497.
19. K. Schmüdgen, *The moment problem*, Cham:Springer international publishing, 2017.
20. B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator.*. — Advances Math. **137** (1998), 82–203.
21. G. Teschl, *Jacobi operator and completely integrable nonlinear lattices,* Amer. Math. Soc., Providence, 2001.
22. M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices.* Springer Series in Solid-State Sciences, 20 (2 ed.), Springer, Berlin, 1989.

Mikhailov A. S., Mikhailov V. S. Construction of solutions of Toda lattices by the classical moment problem.

Making use of formulas of J. Moser for a finite-dimensional Toda lattices, we derive the evolution law for moments of the spectral measure of the semi-infinite Jacobi operator associated with the nonlinear system. This allows us to construct solutions of semi-infinite Toda lattices for a wide class of unbounded initial data by using well-known results from the classical moment problem theory.

Поступило 4 ноября 2021 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский Государственный Университет,
Университетская наб. 7/9, 199034 С.-Петербург, Россия.

E-mail: mikhaylov@pdmi.ras.ru

E-mail: ftvsm78@gmail.com