Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

М. А. Лялинов

ЭВОЛЮЦИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ УНИТАРНОЙ ГРУППОЙ ОПЕРАТОРА МЁЛЕРА, НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

§1. Введение

Оператор Мёлера[1] является самосопряженным ограниченным интегральным оператором, определяемым выражением

$$[Du](x) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u(y)}{x+y}\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

в пространстве $L_2(0,1)$. Этот оператор естественным образом возникает при изучении спектральных задач для лапласианов с сингулярными потенциалами, имеющими носитель на конических или клиновидных поверхностях [1–3]. Соответствующие задачи сводятся к некоторым функционально-разностным уравнениям, а затем, к возмущенному оператору Мёлера, который рассматривается как компактное возмущение оператора Мёлера (1). Примечательно, что последнюю модель можно назвать явно разрешимой, это означает, в частности, что ее спектр и соответствующие собственные значения могут быть найдены явно. Описав спектральные свойства этого оператора, мы затем рассмотрим асимптотическое поведение решения задачи Коши на больших временах ($t \to \infty$),

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + [D\phi](x,t) = 0, \quad \phi(x,0) = f(x), \tag{2}$$

$f \in L_2(0,1)$, решение который имеет вид $\phi(x,t) = \exp\{-\mathrm{i}t\,D\}\,f(x)$.

Ключевые слова: оператор Мёлера, спектральные свойства, асимптотика, оператор эволюции.

Работа частично поддержана Российским Научным Фондом, 17-11-01126.

[1]По-видимому, Мёлер был первым, кто смог диагонализировать оператор с ядром $1/(x+y)$ на полуоси. Однако позже Диксон (см. [10], раздел 11.18) решил (по-видимому, независимо) интегральное уравнение с этим ядром на отрезке $[0,1]$ путем приведения к интегральному уравнению типа свертки на полуоси.

В следующих разделах мы используем модифицированное преобразование Мёлера–Фока, которое диагонализует оператор Мёлера, опишем его спектр и соответствующие “собственные функции”. Мы также получим резольвенту оператора. Затем, эта информация используется для построения оператора эволюции $\exp\{-\mathrm{i}t\,D\}$, соответствующего задаче (2). Применяя традиционные асимптотические методы к интегральному представлению решения задачи Коши, мы получаем оценки ее поведения на больших временах.

Оператор Мёлера может быть формально изучен похожим образом как и операторы Карлемана [12] или Ханкеля [8], однако, так как он имет некоторое специальное ядро, разумно и поучительно изучать его спектральные свойства напрямую, не обращаясь к известным результатам для операторов Карлемана или Ханкеля.

§2. Модифицированное преобразование Мёлера–Фока и его примененние для оператора Мёлера в $L_2(0,1)$

В этом параграфе мы используем известные результаты по традиционному преобразованию Мёлера–Фока [7]. Сначала, рассмотрим функции F такие, что $\int\limits_0^1 \frac{|F(y)|}{\sqrt{y}} \log(1+1/y)\,\mathrm{d}y < \infty$, $F \in L_2(0,1)$. Мы введем

$$\mathcal{P}_p(x) = \frac{\sqrt{p\tanh(\pi p)}}{x}\, P_{\mathrm{i}p-1/2}(1/x) \tag{3}$$

с асимптотикой (см. [6], 8.772(1))

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_p(x) = \frac{\sqrt{p\tanh(\pi p)}}{x}\Bigg(&\frac{\Gamma(-\mathrm{i}p)}{\Gamma(-\mathrm{i}p+1/2)}\Big[\frac{x}{2}\Big]^{1/2-\mathrm{i}p} + \frac{\Gamma(\mathrm{i}p)}{\Gamma(\mathrm{i}p+1/2)}\Big[\frac{x}{2}\Big]^{1/2+\mathrm{i}p}\Bigg) \\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(x^2)\right),\end{aligned} \tag{4}$$

$x \to 0+,\ p > 0$, и $\mathcal{P}_p(x) = O(1)$ при $p \to \infty$, $1 \geqslant x > 0$. Функции (3) вещественны для $p \geqslant 0$, в частности, $\mathcal{P}_0(x) > 0$. Напомним, что функция Лежандра (с $x^{-1} = \cosh\alpha$) определяется в [6], 8.715,

$$P_{\mathrm{i}\tau-1/2}(\cosh\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\alpha} \frac{\cos(\tau t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cosh\alpha - \cosh t}}. \tag{5}$$

Традиционное преобразование Мёлера–Фока [7, (Гл. 7)] приводит к требуемой модифицированной версии преобразования Мёлера–Фока

(мМФ-преобразование)

$$F(x) = \int\limits_0^\infty \mathcal{P}_p(x)\, F^*(p)\, \mathrm{d}p, \tag{6}$$

$$F^*(p) = \int\limits_0^1 \mathcal{P}_p(x)\, F(x)\, \mathrm{d}x, \tag{7}$$

где F^* регулярна в $p = 0$, абсолютно интегрируема на $[0, \infty)$ с локально суммируемой производной.

Выражения (7), (6) (вместе с (3)) рассматриваются как модифицированное преобразование Мёлера–Фока. Равенство Парсеваля принимает вид [9]

$$\int\limits_0^1 Q(x)\, F(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty Q^*(p)\, F^*(p)\, \mathrm{d}p.$$

Справедливо следующее соотношение

$$\int\limits_0^1 [F(x)]^2\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty [F^*(p)]^2\, \mathrm{d}p.$$

Мы используем известгую формулу Мёлера [7], (7-4-15),

$$\int\limits_1^\infty \frac{P_{\mathrm{i}p-1/2}(s)}{s+v}\, \mathrm{d}s \;=\; \pi\, \frac{P_{\mathrm{i}p-1/2}(v)}{\cosh(\pi p)} \tag{8}$$

при $v \geqslant 1$ и $p \in [0, \infty)$ и формулу обращения, [7],(7-6-28)

$$\int\limits_0^\infty p \tanh(\pi p)\, \frac{P_{\mathrm{i}p-1/2}(s) P_{\mathrm{i}p-1/2}(v)}{\cosh(\pi p)}\, \mathrm{d}p \;=\; \frac{1}{\pi\,(s+v)}\,, \quad s, v \geqslant 1. \tag{9}$$

Заменим переменную интегрирования на $s = 1/y$ и введем $x = 1/v$ в (8), таким образом, получим

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\mathcal{P}_p(y)}{x+y}\, \mathrm{d}y = \frac{\mathcal{P}_p(x)}{\cosh(\pi p)}\,. \tag{10}$$

Из соотношения (9) следует спектральное уравнение для оператора Мёлера D,

$$[D\mathcal{P}_p](x) = \mu(p)\mathcal{P}_p(x),$$

где

$$\mu = \mu(p) = \frac{1}{\cosh(\pi p)}\,. \tag{11}$$

Уравнение (11) описывает однозначное отображение квазиимпульса $p \geqslant 0$ и энергии μ, $(0 < \mu \leqslant 1)$ так, что его обращение имеет вид

$$p = p(\mu) = \log([1 + \sqrt{1-\mu^2}]/\mu) \geqslant 0\,.$$

Мы видим, что $\mathcal{P}_p(x)$ является обобщенной собственной функцией непрерывного спектра $\sigma(D) = [0,1]$ самосопряженного оператора D.[2] Обобщенная ортогональность и полнота этих функций принимают вид

$$\int\limits_0^1 \mathcal{P}_p(x)\,\mathcal{P}_q(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \delta(p-q), \qquad \int\limits_0^\infty \mathcal{P}_p(x)\,\mathcal{P}_p(y)\,\mathrm{d}p \;=\; \delta(x-y).$$

§3. Резольвента оператора Мёлера

Мы найдем резольвенту, решая уравнение $[Du](x) - \mu u(x) = f(x)$ в $L_2(0,1)$ и, принимая во внимание (11), получим $\left(\frac{1}{\cosh(\pi p)} - \mu\right) u^*(p) = f^*(p)$ и

$$u^*(p) = f^*(p)\frac{1}{\frac{1}{\cosh(\pi p)} - \mu} = f^*(p)\left(-\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\frac{1}{\cosh(\pi p) - \mu^{-1}}\right)\,.$$

Мы используем (6) $(\mu \notin \sigma(D))$, имеем

$$u(x) = -\frac{1}{\mu}\left\{ f(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 a(x,y;\mu)\,f(y)\,\mathrm{d}y \right\}$$

с

$$a(x,y;\mu) = \pi\int\limits_0^\infty \frac{\mathcal{P}_p(x)\mathcal{P}_p(y)}{\mu\cosh(\pi p) - 1}\,\mathrm{d}p. \tag{12}$$

[2]Заметим, что формула (9) может быть также записана как

$$\frac{1}{\pi\,(x+y)} = \int\limits_0^\infty \frac{\mathcal{P}_p(x)\,\mathcal{P}_p(y)}{\cosh(\pi p)}\,\mathrm{d}p\,.$$

Таким образом, мы приходим к

$$u(x) = [D-\mu]^{-1} f(x) = -\frac{1}{\mu}\,\{I + A_\mu\}\, f(x) \tag{13}$$

и A_μ оператор, определяемый в $L_2(0,1)$ выражением

$$[A_\mu f](x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 a(x,y;\mu)\, f(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{14}$$

где ядро задается формулой (12). Полезно отметить, что ядро $a(x,y;\mu)$ решает интегральное уравнение (тождество Гильберта для резольвенты)

$$\mu\, a(x,y;\mu) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{a(y,z;\mu)}{z+x}\,\mathrm{d}z.$$

Резольвента, является голоморфной оператор-функцией $\mu \notin \sigma(D)$. Она имеет конечные пределы на сторонах разреза вдоль отрезка $(0,1)$. Она также ограничена в $\mu = 1$ и ядро a допускает оценку

$$|a(x,y;\mu)| \leqslant C\frac{1+|\log x \log y|}{\sqrt{xy}}, \quad (x,y)\in(0,1]\times(0,1]$$

в некоторой окрестности $\mu = 1$.

§4. Асимптотика решения задачи Коши на больших временах

Решение задачи Коши (2) представляется в виде

$$\phi(x,t) = \exp\{-\mathrm{i}t\,D\}\, f(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,D}\mathcal{P}_p(x)\, f^*(p)\,\mathrm{d}p = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\mu(p)}\mathcal{P}_p(x)\, f^*(p)\,\mathrm{d}p,$$

где $\mu(p) = 1/\cosh(\pi p)$,

$$f^*(p) = \int\limits_0^1 \mathcal{P}_p(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

предполагается достаточно гладким и убывающим на бесконечности. Мы используем представление (5) функции Лежандра и поменяем порядок интегрирований, что оправдано, имеем

$$\begin{aligned}\phi(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}x} \int\limits_0^{\alpha(x)} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh v}} \\ \times \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \sqrt{p\tanh(\pi p)} f^*(p)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t[pv/t - \mu(p)]} \right),\end{aligned} \tag{15}$$

где $f^*(p)$ предполагается продолженным на $(-\infty, 0)$ как четная функция $f^*(p) = f^*(-p)$, $\alpha(x) = \operatorname{arccosh}(1/x) = \log\{1/x + \sqrt{x^{-2}-1}\}$.

Вводя новую переменную интегрирования $\tau = -\frac{2v}{\pi t}$, из (15) приходим к

$$\phi(x,t) = \frac{t}{2\sqrt{2}x} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau\ \psi(\tau,t)}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}}\,, \tag{16}$$

где

$$\psi(\tau,t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, F_*(p)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(-\frac{\pi\,\tau}{2}p - \frac{1}{\cosh(\pi p)}\right)},$$

$\omega(x,t) = \frac{2\alpha(x)}{\pi\, t}$, $F_*(p) = \sqrt{p\tanh(\pi p)} f^*(p)$, а f^* считается гладкой и быстро убывающей на бесконечности.

Мы вычисляем асимптотику $\psi(\tau,t)$ при $t \to \infty$, которая равномерна по $\tau \in [-\omega(x,t), 0]$. Для этого, мы найдем стационарные точки фазовой функции

$$\Phi(p,\tau) = -\frac{\pi\,\tau}{2}p - \frac{1}{\cosh(\pi p)}\,.$$

Необходимо решить уравнение

$$\Phi'_p(p,\tau) = -\frac{\pi\,\tau}{2} + \frac{\pi\sinh(\pi p)}{1+\sinh^2(\pi p)} \;=\; 0,$$

где τ параметр. Для отрицательных $\tau \in (-1,0)$ последнее уравнение имеет два отрицательных решения $p_j(\tau)$, $j = 1,2$, так как нечетная функция $-\frac{\pi\sinh(\pi p)}{1+\sinh^2(\pi p)}$ достигает максимума $\pi/2$ в $\pi p = -\log(\sqrt{2}+1)$. Эти корни сливаются, когда $\tau = -1$, затем становятся комплексными для $\tau < -1$. Таким образом, мы имеем ситуацию двух сливающихся стационарных точек при $\tau = -1$. В этом случае, вторая производная Φ равна нулю в $\tau = -1$, что следует из выражения

$$\Phi''_{p^2}(p,\tau) = \pi^2\,\frac{\cosh(\pi p)[1-\sinh^2(\pi p)]}{[1+\sinh^2(\pi p)]^2},$$

тогда как третья производная не ноль в этой точке,

$$\Phi'''_{p^3}(p,\tau) = \pi^2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\cosh(\pi p)}{[1+\sinh^2(\pi p)]^2}\right)[1-\sinh^2(\pi p)] + \pi^2\left(\frac{\cosh(\pi p)}{[1+\sinh^2(\pi p)]^2}\right)\frac{\mathrm{d}[1-\sinh^2(\pi p)]}{\mathrm{d}p}.$$

Стационарные точки находятся явно

$$p_j(\tau) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcsinh}\{\sigma_j(\tau)/\tau\} = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sigma_j(\tau)}{\tau} + \sqrt{\frac{\sigma_j^2(\tau)}{\tau^2}+1}\right),\ j = 1,2, \tag{17}$$

где $\sigma_j^2(\tau) = 1 + \left(\sqrt{1-\tau^2}\right)_j$. В формулах (17) необходимо выделить ветви квадратного корня и arcsinh. Ветви $\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)_j$ различаются индексом j и выбираются следующим образом. Мы проводим разрезы из точек ± 1 в $\pm\infty$ соответственно и полагаем, что $\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)_1|_{\tau=0} = 1$ для $j = 1$, тогда как $\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)_2|_{\tau=0} = -1$ для $j = 2$. Определим теперь ветвь $\operatorname{arcsinh}(\zeta)$. Проводим разрезы из $\pm\mathrm{i}$ в $\pm\mathrm{i}\infty$ соответственно, считая, что $\operatorname{arcsinh}(0) = 0$. Полезно проследить изменение $\sigma_j(\tau)/\tau$, когда τ проходит из $-\infty$ в -1 и, затем, в -0 вдоль вещественной оси. В этом случае $\sigma_1(\tau)/\tau$ движется из $-\infty$ вдоль вещественной оси в -1 и, затем, становясь комплексным, вдоль дуги единичной окружности в нижней полуплоскости в точку $-\mathrm{i}$. Таким же образом, $\sigma_2(\tau)/\tau$ движется из -0 вдоль вещественной оси к -1 и, затем, становясь комплексным, вдоль дуги единичного радиуса в верхней полуплоскости к точке i. Это позволяет вычислить положение $p_j(\tau)$ на комплексной плоскости, когда τ идет из $-\infty$ к -1 и, затем, в -0. Напомним, что, если $\tau = -1$,

$$p_1(-1) = p_2(-1) = -\frac{1}{\pi}\log(\sqrt{2}+1).$$

Заметим, что мы также имеем ($\tau < 0$)

$$p_j(\tau) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sigma_j(\tau)}{\tau} + \sqrt{\frac{2\sigma_j(\tau)}{\tau^2}}\right), \quad j = 1,2.$$

Отметим, что $p_2(\tau) \to -0$ при $\tau \to -0$ и $p_1(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to -0$.

Используем равномерную версию метода стационарной фазы [5] для сливающихся стационарных точек. Введем переменную $\zeta = \zeta(p)$ в соответствии с

$$\Phi(p,\tau) = a_0(\tau) - a_1(\tau)\zeta + \frac{\zeta^3}{3}\,.$$

Стационарные точки $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$ соответствуют нулям

$$\Phi'_p(p,\tau) = (-a_1(\tau) + \zeta^2)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}p}$$

так, что $\zeta_1 = \sqrt{a_1(\tau)}$, $\zeta_2 = -\sqrt{a_1(\tau)}$. Введем

$$a_0(\tau) = \frac{\Phi(p_1(\tau),\tau) + \Phi(p_2(\tau),\tau)}{2}, \quad a_1(\tau) = \frac{[\Phi(p_2(\tau),\tau) - \Phi(p_1(\tau),\tau)]^{2/3}}{(4/3)^{2/3}}.$$

Мы находим (см. [5]), что ($t \to \infty$)

$$\psi(\tau,t) = \frac{\psi_a(\tau,t)}{t^{1/3}}\left(1 + O(t^{-1/3})\right),$$

$$\begin{aligned}
&\psi_a(\tau,t) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}[\Phi(p_1(\tau),\tau)+\Phi(p_2(\tau),\tau)]}\\
&\times\left\{\left(F_*(p)\sqrt{\tfrac{-2\sqrt{a_1(\tau)}}{\Phi''_{p^2}(p,\tau)}}\Bigg|_{p=p_2(\tau)} + F_*(p)\sqrt{\tfrac{2\sqrt{a_1(\tau)}}{\Phi''_{p^2}(p,\tau)}}\Bigg|_{p=p_1(\tau)}\right) v(-t^{2/3}a_1(\tau))\right.\\
&+\tfrac{\mathrm{i}}{t^{1/3}}\left(F_*(p)\sqrt{\tfrac{-2}{\sqrt{a_1(\tau)}\Phi''_{p^2}(p,\tau)}}\Bigg|_{p=p_2(\tau)} - F_*(p)\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{a_1(\tau)}\Phi''_{p^2}(p,\tau)}}\Bigg|_{p=p_1(\tau)}\right)\\
&\left.\times v'(-t^{2/3}a_1(\tau))\right\},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $v(\cdot)$ (и $v'(\cdot)$) функция Эйри (и ее производная), имеющая асимптотику

$$v(z) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{z^{1/4}}\left(1 + O\left(z^{-3/2}\right)\right), \quad z \to \infty,$$

$$v(z) = \frac{\cos[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} - \frac{\pi}{4}]}{(-z)^{1/4}}\left(1 + O\left((-z)^{-3/2}\right)\right), \quad z \to -\infty\,.$$

Асимптотика представления для $\phi(x,t)$ принимает вид

$$\phi(x,t) = \frac{t^{2/3}}{2\sqrt{2}\sqrt{x}} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau \, \sqrt{\cosh\alpha(x)}\psi_a(\tau,t)}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}}(1+O(t^{-1/3})) \, . \quad (19)$$

Для произвольного $x \in [0,1]$ выражения (18), (19) не упрощаются. Однако, если переменная x не слишком мала, а именно,[3]

$$1 \geqslant x \geqslant 2\exp(-\pi t/2 - Ct^{-1+\delta})$$

для некоторого $C > 0$ и малого $\delta > 0$, аргументы функции Эйри и ее производных велики при $t \to \infty$ и можно использовать их асимптотики. Выражения для $\psi_a(\tau,t)$ упрощаются. Стационарные точки не близки и традиционный метод стационарной фазы применяется для вычисления асимптотики $\psi(\tau,t)$. Мы находим

$$\phi(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau \, \sqrt{\cosh\alpha(x)}(1+O(t^{-1/3}))}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}}$$
$$\times\left(\frac{F_*(p_2(\tau))}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_2(\tau),\tau)|}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi(p_2(\tau),\tau)+\mathrm{i}\pi/4} + \frac{F_*(p_1(\tau))}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_1(\tau),\tau)|}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi(p_1(\tau),\tau)-\mathrm{i}\pi/4}\right). \quad (20)$$

Асимптотика (20) позволяет выписать очень грубую оценку

$$|\phi(x,t)| \leqslant C\,\frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau \, \sqrt{\cosh\alpha(x)}}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}}$$
$$\times\left(|F_*(p_2(\tau)| \; + \; \frac{|F_*(p_1(\tau))|}{\sqrt{|\tau|}}\right). \quad (21)$$

Однако, вместо (21), также полезно описать более точно поведение ϕ при $t \to \infty$.

Для того, чтобы упростить интеграл в (20) асимптотически мы используем подход [11], хотя и с некоторыми его вариациями.

[3]В этом случае имем $0 \leqslant -\omega(x,t) \leqslant -1 + Ct^{-\delta}$.

§5. Асимптотическое упрощение (20), когда $1 \geqslant x \geqslant 2\exp(-\pi t/2 - Ct^{-1+\delta})$

Представим (20) в виде двух слагаемых

$$\phi(x,t) = \phi_1(x,t) + \phi_2(x,t),$$

где

$$\phi_1(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau\, \sqrt{\cosh\alpha(x)}}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}} \times \frac{F_*(p_2(\tau))}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_2(\tau),\tau)|}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Phi(p_2(\tau),\tau)+\mathrm{i}\pi/4}, \quad (22)$$

и упростим интеграл асимптотически при $t \to \infty$. Для этого, заметим, что фазовая функция

$$\psi_1(\tau) = \Phi(p_2(\tau),\tau) = -\frac{\pi\,\tau}{2} p_2(\tau) \;-\; \frac{1}{\cosh(\pi p_2(\tau))}$$

имеет первую производную

$$\psi_1'(\tau) = \frac{\mathrm{d}\Phi(p_2(\tau),\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\pi}{2} p_2(\tau) = 0,$$

которая ноль в конце интегрирования $\tau = 0$. Вторая производная

$$\psi_1''(\tau) = -\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}p_2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0} = -\frac{1}{4}$$

отрицательна в этой точке, так как $\sigma_2(\tau) = \tau^2/2 + O(\tau^4)$ и $p_2(\tau) = \frac{\tau}{2\pi} + O(\tau^2)$. Напомним, что

$$\Phi''_{p^2}(p_2(\tau),\tau) = \pi^2\, \frac{\cosh(\pi p_2(\tau))[1 - \sinh^2(\pi p_2(\tau))]}{[1 + \sinh^2(\pi p_2(\tau))]^2}$$

равна π^2 в $\tau = 0$. Однако, на конце интегрирования в (22), $\tau = -\omega(x,t)$ имеем $\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2) = 0$ так, что традиционный метод стационарной фазы следует модифицировать надлежащим образом.

Для этого, введем новую переменную интегрирования $\theta = \tau + \omega(x,t)$ и получим

$$\phi_1(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{0}^{\omega(x,t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta}}\, g(\theta,\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi(\theta,\omega)}\ , \quad (23)$$

где

$$\Psi(\theta,\omega)=\Phi(p_2(\theta-\omega),\theta-\omega),$$

$$g(\theta,\omega)=\frac{\sqrt{\cosh\alpha(x)}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\cosh\alpha(x)-\cosh\left(\pi t[\theta-\omega(x,t)]/2\right)}}\frac{F_*(p_2(\tau))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_2(\tau),\tau)|}}\Bigg|_{\theta=\tau+\omega(x,t)}.$$

Функция g непрерывна на интервале интегрирования. Мы воспользуемся идеями работы [11] и оценим асимптотически интеграл (23) с алгебраической сингулярностью медленно меняющейся функции $\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,g(\theta,\omega)$ на пути интегрирования.

Мы введем новую переменную интегрирования z в соответствии с

$$\Psi(\theta,\omega)-\Psi(0,\omega)=-[z^2/2+a(\omega)z].$$

Мы считаем, что, если $\theta=0$, то $z=0$ и, если $\theta=\omega$, то $z=-a(\omega)$, где

$$a(\omega)=-\sqrt{2(\Psi(\theta,\omega)-\Psi(0,\omega))}.$$

В этом случае

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=-a}=-\frac{z+a(\omega)}{\Psi'_\theta(\theta,\omega)}\bigg|_{z=-a}=-\frac{1}{\Psi''_{\theta^2}(\omega,\omega)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\big|_{z=-a}}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0}=-\frac{a(\omega)}{\Psi'_\theta(0,\omega)}>0.$$

Интеграл для ϕ_1 принимает вид

$$\phi_1(x,t)=\frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi(0,\omega)}\int\limits_0^{-a(\omega)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\theta}}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\,g(\theta,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]}\,. \tag{24}$$

Введем обозначение, используя функцию $G(z)$,

$$z^{-1/2}G(z)=\frac{g(\theta,\omega)}{\sqrt{\theta}}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}$$

и также положим

$$G(z)=b_0(\omega)+b_1(\omega)z+z(z+a)^2G_1(z),$$

где последнее равенство может считаться определением G_1. Мы найдем b_0 и b_1, полагая $z=0$ и $z=-a$,

$$b_0=G(0)=g(0,\omega)\,\sqrt{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}}\Bigg|_{z=0},\qquad b_1=\frac{G(-a(\omega))-G(0)}{-a(\omega)}\,.$$

Для того, чтобы завершить асимптотическую редукцию (24), подставляя $G(z)$ в подынтегральное выражение, проинтегрируем по частям в

$$\int\limits_0^{-a(\omega)} \mathrm{d}z\sqrt{z}\,(z+a)^2\,G_1(z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]} = \frac{1}{\mathrm{i}t}\int\limits_0^{-a(\omega)} \mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]}\,G_2(z),$$

где $G_2(z) = G_1(z)\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}(z+a)+\sqrt{z}\right) + \frac{\mathrm{d}G_1(z)}{\mathrm{d}z}\sqrt{z}(z+a)$. В результате, мы находим, что

$$\begin{aligned}\phi_1(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi(0,\omega)}}{2\sqrt{x}}\Bigg(b_0(\omega)\int\limits_0^{-a(\omega)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]}\\ + b_1(\omega)\int\limits_0^{-a(\omega)}\mathrm{d}z\sqrt{z}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]}\;+\frac{1}{\mathrm{i}t}\,J_1(\omega,t)\Bigg),\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$J_1(\omega,t) = \int\limits_0^{-a(\omega)}\mathrm{d}z\;\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t[z^2/2+a(\omega)z]}\,G_2(z)\,.$$

Интегралы в (25) являются родственными функции Вебера (цилиндрической функции) $D_r(s)$. Мы введем обозначения

$$W_0(s) = \int\limits_0^{s}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[z^2/2-sz]}$$

и

$$W_1(s) = \int\limits_0^{s}\mathrm{d}z\;\sqrt{z}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[z^2/2-sz]}\,.$$

Асимптотика ϕ_1 принимает вид ($\omega=\omega(x,t)$)

$$\begin{aligned}\phi_1(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Psi(0,\omega)}}{2\sqrt{x}}\Bigg(\frac{b_0(\omega)}{t^{1/4}}W_0(-\sqrt{t}a(\omega))\\ + \frac{b_1(\omega)}{t^{3/4}}W_1(-\sqrt{t}a(\omega)) + \frac{1}{\mathrm{i}t}\,J_1(\omega,t)\Bigg).\end{aligned} \tag{26}$$

5.1. Асимптотика $\phi_2(x,t)$. Рассмотрим, наконец,

$$\phi_2(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{-\omega(x,t)}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau \sqrt{\cosh\alpha(x)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}} \times \frac{F_*(p_1(\tau))}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_1(\tau),\tau)|}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\chi(\tau)}. \quad (27)$$

Фазовая функция $\chi(\tau) := \Phi(p_1(\tau),\tau) = -\frac{\pi\,\tau}{2} p_1(\tau) - \frac{1}{\cosh(\pi p_1(\tau)}$ не имеет нулей первой производной на интервале интегрирования и монотонна, однако подынтегральное выражение имеет осбенности типа квадратного корня на концах интегрирования, в частности, $\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_1(\tau),\tau)|} \sim \sqrt{-\tau}$. Отметим также, что $\chi(\tau) \sim -\frac{\tau}{2}\log(-\tau)$ при $\tau \to 0-$, тогда как $\chi'(\tau) = -\frac{\pi}{2}p_1(\tau) \sim -\frac{1}{2}\log(-\tau)$ при $\tau \to 0-$.

Новая переменная интегрирования $z = \chi(t)$ in (27) приводит к выражению

$$\phi_2(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}} \int\limits_{-z_*}^{0} \frac{\mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\,z}}{\log(-\tau)\sqrt{-\tau(\tau+\omega)}}\ h(\tau,x,t)\,,$$

где $-z_* = -z_*(x,t) := \chi(-\omega(x,t))$,

$$h(\tau,x,t) = \frac{\sqrt{\cosh\alpha(x)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} \log(-\tau)\sqrt{-\tau(\tau+\omega)}}{\sqrt{\cosh\alpha(x) - \cosh(\pi t\,\tau/2)}\,\chi'(\tau)}\ \frac{F_*(p_1(\tau))}{\sqrt{|\Phi''_{p^2}(p_1(\tau),\tau)|}}.$$

Введем функцию $H(z)$ равенством

$$\frac{H(z)}{\log(-z)\sqrt{-z(z+z_*)}} = \frac{h(\tau,x,t)}{\log(-\tau)\sqrt{-\tau(\tau+\omega)}}\ ,$$

подразумевая также слудующее представление для H

$$H(z) = C_0(x,t) + C_1(x,t)z + (-z)(z+z_*)H_2(z).$$

Очевидно, что

$$C_0(x,t) = H(0), \qquad C_1(x,t) = \frac{H(0) - H(-z_*)}{z_*}\,.$$

Мы приходим к

$$\phi_2(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}}\Bigg\{C_0(x,t)\int\limits_{-z_*}^{0}\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\,z}}{\log(-z)\sqrt{-z(z+z_*)}}$$

$$+\,C_1(x,t)\int\limits_{-z_*}^{0}\frac{\mathrm{d}z\,z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\log(-z)\sqrt{-z(z+z_*)}} + \int\limits_{-z_*}^{0}\mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}(-z)^{1/2}\sqrt{(z+z_*)}\frac{H_2(z)}{\log(-z)}\Bigg\}.$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле, имеем

$$\frac{1}{\mathrm{i}t}\int\limits_{-z_*}^{0}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\,z}\right)\,(-z)^{1/2}\sqrt{(z+z_*)}\,\frac{H_2(z)}{\log(-z)} =$$

$$-\frac{1}{\mathrm{i}t}\int\limits_{-z_*}^{0}\mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\,z}\Bigg(H_2(z)\Bigg(\frac{-1}{2\log(-z)}\sqrt{\frac{z+z_*}{-z}} + \frac{1}{2\log(-z)}\sqrt{\frac{-z}{z+z_*}}$$

$$+\,\frac{1}{\log^2(-z)}\sqrt{\frac{z+z_*}{-z}}\Bigg) + \frac{\mathrm{d}H_2(z)}{\mathrm{d}z}\,\frac{(-z)^{1/2}\sqrt{(z+z_*)}}{\log(-z)}\Bigg).$$

Искомая асимптотическая оценка для ϕ_2 теперь принимает вид $(\zeta = tz, \quad \zeta_* = \zeta_*(x,t) := tz_*(x,t))$

$$\begin{aligned}\phi_2(x,t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2\sqrt{x}}\Bigg\{&C_0(x,t)\int\limits_{-\zeta_*(x,t)}^{0}\frac{\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}}{[\log(-\zeta)-\log t]\sqrt{-\zeta(\zeta+\zeta_*(x,t))}}\\ &+\frac{C_1(x,t)}{t}\int\limits_{-\zeta_*(x,t)}^{0}\frac{\mathrm{d}\zeta\,\zeta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}}{[\log(-\zeta)-\log t]\,\sqrt{-\zeta(\zeta+\zeta_*(x,t))}}(1+O(1/t))\Bigg\}.\end{aligned} \tag{28}$$

Асимптотические выражения (28) и (26) определяют требуемую оценку для $\phi(x,t) = \phi_1(x,t) + \phi_2(x,t)$.

Список литературы

1. M. A. Lyalinov, *Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with δ'−interaction on a circular conical surface.* — Proc. Royal Soc. A, V. 476: 20200179, 2020,
2. M. A. Lyalinov, *Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations.* — Eur. J. Appl. Math. electr. version before publ. (2021).

3. M. A. Lyalinov and N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions*, Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication, Edison, NJ: SciTech-IET, 2012.
4. M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of selfadjoint Operators in Hilbert Spaces*, Dordrecht, Holland, 1987.
5. М. В. Федорюк, *Асимптотика: Интегралы и Ряды*, Наука, Москва, 1987.
6. I. S. Gradstein, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 4th ed., Academic Press, Orlando, 1980.
7. I. H. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1972.
8. J. S. Howland, *Spectral theory of operators of Hankel type. I, II.* — Indiana Univ. Math. **41**, No. 2 (1992), 409–434.
9. Н. Н. Лебедев, *Теорема Парсеваля для преобразования Мёлера–Фока.* — Доклады АН СССР, **LXVIII**, No. 3 (1949), 445–48.
10. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford Press, 1937.
11. N. Bleistien, *Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity.* — Comm. Pure appl. Maths, **4** (1966), 353–370.
12. Д. Р. Яфаев, *Spectral and scattering theory for perturbations of the Carleman operator.* — Алгебра & Анализ, **25**, вып. 2 (2013), 251–278.

Lyalinov M. A. Long-time evolution described by the unitary group of the Mehler operator

In this work the long-time asymptotics of the solution to the Cauchy problem is described by means of the evolution unitary group of the self-adjoint Mehler operator. Spectral analysis of the latter operator is also discussed.

С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 30 октября 2021 г.