Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

С. Б. Левин

УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ТИПА ИСКАЖЕННОЙ ШЕСТИМЕРНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ КВАНТОВОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

§1. Введение

В данной работе мы предлагаем асимптотику на бесконечности в конфигурационном пространстве решения квантовой задачи рассеяния трех трехмерных одноименно заряженных частиц, включающую описание процессов однократного и двукратного перерассеяния, в том числе в областях, где одна из парных координат Якоби оказывается ограниченной. Асимптотики такого рода известны уже давно, начиная с первых работ С. П. Меркурьева [1–3]. Не претендуя на полноту, упомянем также работы Е. О. Альта и А. Мухамеджанова [5, 6], в которых в старшем порядке асимптотики типа искаженной шестимерной плоской волны [4] были распространены в области, в которых одна из парных координат Якоби становится ограниченной. Позднее в рамках дифракционного подхода в задаче рассеяния [7,8] асимптотики такого типа были продолжены также в области, отвечающие окрестностям парных напрвлений рассеяния вперед в работах В. С. Буслаева и С. Б. Левина [9,10]. В данной работе будет построено уточнение асимптотики вида [9, 10], отвечающее включению в рассмотрение процессов двукратного перерассеяния. При этом будет высказана гипотеза, описывающая структуру продолжения уточненной асимптотики в области, где одна из парных координат Якоби становится ограниченной.

Ключевые слова: квантовая задача трех тел, кулоновские парные потенциалы, асимптотики собственных функций, двукратные перерассеяния.

§2. Постановка задачи

Мы рассматриваем здесь собственные функции абсолютно непрерывного спектра оператора Шредингера

$$H = -\Delta_{\mathbf{x}} - \Delta_{\mathbf{y}} + \sum_{j=1}^{3} v_j(x_j), \quad v_j(x) \underset{x\to\infty}{\to} \frac{c_j}{x}, \quad c_j > 0$$

задачи рассеяния трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц. Здесь $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^3$ – пары координат Якоби, $x_j = |\mathbf{x}_j|$. Для простоты мы полагаем массы частиц одинаковыми и равными единице.

Мы ищем асимптотику решения уравнения Шредингера

$$(H - E)\Psi = 0,$$

вида

$$\Psi^{as} = \Psi^{(1)} e^{iW}. \tag{1}$$

В качестве начального приближения $\Psi^{(1)}$ мы выбираем так называемое ВВК-приближение Ψ^{BBK} [4] для решения типа искаженной плоской волны

$$\Psi^{(1)} = \Psi^{BBK} = e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} e^{i\langle \mathbf{p},\mathbf{y}\rangle} \prod_{j=1}^{3} \Phi_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_j). \tag{2}$$

Здесь использованы также следующие обозначения:

$$\Phi_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_j) \equiv \Phi(-i\eta_j, 1, ik_j x_j(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_j, \hat{\mathbf{x}}_j\rangle)), \quad j = 1, 2, 3 \tag{3}$$

– вырожденная гипергеометрическая функция [11], $\eta_j = \frac{c_j}{2k_j}$ – параметр Зоммерфельда, моменты $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{p}_j$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{k}_j, \mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^3$ являются сопряженными по Фурье координатам Якоби $(\mathbf{x}_j,\ \mathbf{y}_j)$.

Неизвестная медленно меняющаяся функция $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ определяется с помощью метода невязок или, иначе говоря, из условия быстрого убывания невязки Q решения уравнения Шредингера на бесконечности в конфигурационном пространстве

$$-Q[\Psi^{as}] \equiv (H-E)\Psi^{as} = O(1/R^{3-\delta}), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 < \delta \ll 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{P} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{X}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^6.$$

Положительный сколь угодно малый параметр δ вводится здесь для того, чтобы не следить за возможным слабым логарифмическим ростом.

Забегая вперед, отметим, что скорость убывания невязки асимптотики (при $R \to \infty$) приближенного решения Ψ^{as} в уравнении Шредингера фактически определяется скоростью убывания невязки первого приближения, то есть функции $\Psi^{(1)}$ (1). Это приближение, как и сама функция Ψ^{as}, может быть найдено методом характеристик для линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. При этом можно доказать характеристичность решения, то есть его единственность. Следовательно, невязка приближенного решения, найденного с помощью следующей итерации, должна убывать на порядок быстрее. В противном случае решение, найденное на предыдущем этапе, оказывается не единственным.

Исходя из сказанного выше, будем искать W в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|\Delta W| = O(1/R^{3-\delta}), \quad |\nabla W|^2 = o(1/R^{3-\delta}). \tag{5}$$

Стоит отметить, что в работе [4] описана процедура поиска уточнения решения Ψ^{BBK} (2) в произвольном младшем порядке.

Подставляя представление (1) в уравнение Шредингера, получаем

$$(H-E)\Psi^{as} = e^{iW}(H-E)\Psi^{(1)} + 2ie^{iW}\langle \nabla\Psi^{(1)}, \nabla W\rangle + O(1/R^{3-\delta}). \tag{6}$$

Последнее соотношение приводит нас к так называемому градиентному уравнению, определяющему поведение искомой фазовой функции $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$2i\langle \nabla\Psi^{(1)}, \nabla W\rangle = -(H-E)\Psi(1) = Q[\Psi^{(1)}]. \tag{7}$$

Мы пренебрегаем в уравнении (7) поправкой вида $O(1/R^{3-\delta})$.

Правая часть уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} &Q[\Psi^{(1)}] = e^{i\langle \mathbf{P}, \mathbf{X}\rangle} \\ &\times \Big\{ k_1k_2\langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2\rangle \Phi_1'\Phi_2'\Phi_3 + k_2k_3\langle \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3\rangle \Phi_1\Phi_2'\Phi_3' \\ &+ k_3k_1\langle \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1\rangle \Phi_1'\Phi_2\Phi_3' \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает производную по аргументу.

Поделив левую и правую части уравнения (7) на $e^{i\langle\mathbf{P},\mathbf{X}\rangle}\Phi_1\Phi_2\Phi_3$, запишем его в явном виде:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{k}_1 + k_1(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1)\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} - \frac{1}{2}k_2(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2)\frac{\Phi_2'}{\Phi_2} - \frac{1}{2}k_3(\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3)\frac{\Phi_3'}{\Phi_3}, \nabla_{\mathbf{x}}W \right\rangle \\
&+ \left\langle \mathbf{p}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}k_2(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2)\frac{\Phi_2'}{\Phi_2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k_3(\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3)\frac{\Phi_3'}{\Phi_3}, \nabla_{\mathbf{y}}W \right\rangle \\
&= -\frac{k_1k_2}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2\rangle \frac{\Phi_1'\Phi_2'}{\Phi_1\Phi_2} - \frac{k_2k_3}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3\rangle \frac{\Phi_2'\Phi_3'}{\Phi_2\Phi_3} \\
&- \frac{k_3k_1}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1\rangle \frac{\Phi_3'\Phi_1'}{\Phi_3\Phi_1}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка разрешимо методом характеристик [12]. Для определенности свяжем описание шестимерного вектора $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^6$ конфигурационного пространства с парой координат Якоби $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{X} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, y_{11}, y_{12}, y_{13}),\\
\nabla_{\mathbf{X}}W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_{11}}, \frac{\partial W}{\partial x_{12}}, \frac{\partial W}{\partial x_{13}}, \frac{\partial W}{\partial y_{11}}, \frac{\partial W}{\partial y_{12}}, \frac{\partial W}{\partial y_{13}}\right)
\end{gathered}
$$

и введем для удобства следующие обозначения для координат:

$$z_j \equiv x_{1j}, \quad z_{3+j} \equiv y_{1j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

В этих терминах уравнение (8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{6} a_i W_{z_i} = a, \qquad (9)$$

где функции координат a_i, a, $i = 1, 2, ..., 6$ определяются структурой уравнения (8).

Тогда в каждой точке пространства $\mathbf{X}$, W на поверхности $W = W(z_1, z_2, \dots, z_6)$ характеристическое направление

$$dz_1 : dz_2 : dz_3 : \dots : dz_6 : dW = a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_6 : a$$

является касательным к поверхности. Определим семейство характеристических кривых, соответствующих дифференциальному уравнению (8). Таким семейством окказывается 6-параметрическое семейство кривых в пространстве $\mathbf{X}$, W, заданное системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{dW}{ds} = a, \quad i = 1, 2, \ldots, 6. \tag{10}$$

Асимптотика правых частей этих уравнений при $|z_i| \gg 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_j &= k_{1j} - i\frac{c_1}{2\tilde{x}_1}\left(\frac{x_{1j}}{x_1} - \frac{k_{1j}}{k_1}\right) + \frac{1}{2}i\frac{c_2}{2\tilde{x}_2}\left(\frac{x_{2j}}{x_2} - \frac{k_{2j}}{k_2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}i\frac{c_3}{2\tilde{x}_3}\left(\frac{x_{3j}}{x_3} - \frac{k_{3j}}{k_3}\right) + O(1/R^{2-\delta}),\ j = 1, 2, 3, \\
a_j &= p_{1j} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\frac{c_2}{2\tilde{x}_2}\left(\frac{x_{2j}}{x_2} - \frac{k_{2j}}{k_2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i\frac{c_3}{2\tilde{x}_3}\left(\frac{x_{3j}}{x_3} - \frac{k_{3j}}{k_3}\right) \\
&\quad + O(1/R^{2-\delta}), \quad j = 4, 5, 6, \\
a &= \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2\rangle \frac{c_1 c_2}{4\tilde{x}_1\tilde{x}_2} + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3\rangle \frac{c_2 c_3}{4\tilde{x}_2\tilde{x}_3} \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1\rangle \frac{c_3 c_1}{4\tilde{x}_3\tilde{x}_1} + O(1/R^{3-\delta}).
\end{aligned}$$

Мы пользуемся здесь обозначениями

$$\tilde{x}_j = ik_j x_j(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_j, \hat{\mathbf{x}}_j\rangle), \quad j = 1, 2, 3,$$

а также асимптотикой вырожденной гипергеометрической функции при больших аргументах:

$$\Phi\left(-i\frac{c}{2k}, 1, i\sigma\right) = e^{-i\frac{c}{2k}\ln|\sigma|}\left(1 + O(1/|\sigma|)\right), \quad |\sigma| \gg 1. \tag{11}$$

Мы принимаем также в расчет преобразование поворота между различными парами координат Якоби. В частности

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1. \tag{12}$$

В этих терминах мы можем описать структуру поправочного члена в приближении искаженных плоских волн.

§3. Построение поправочного члена в представлении искаженной плоской волны методом характеристик

Вернемся к системе уравнений (10). Запишем ее решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_j(s) = d_j(t) + k_{1j}s - \frac{c_1}{2k_1k_{1j}} \ln|k_1x_1(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{x}}_1\rangle)| \\ - \frac{c_2}{2k_2k_{1j}} \ln|k_2x_2(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{x}}_2\rangle)| - \\ - \frac{c_3}{2k_3k_{1j}} \ln|k_3x_3(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_3\rangle)| + O(1/R^{1-\delta}), \quad j=1,2,3. \end{aligned} \tag{13}$$

При этом зависимость от переменной s в правой части уравнения (13) содержится лишь в компоненте x_{1j} вектора $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ и принимает вид

$$x_{1j} = d_j(t) + k_{1j}s. \tag{14}$$

Аналогично, для оставшихся трех компонент решения

$$\begin{aligned} z_{j+3}(s) = g_j(t) + p_{1j}s - \frac{c_1}{2k_1p_{1j}} \ln|k_1x_1(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{x}}_1\rangle)| \\ - \frac{c_2}{2k_2p_{1j}} \ln|k_2x_2(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{x}}_2\rangle)| - \\ - \frac{c_3}{2k_3p_{1j}} \ln|k_3x_3(1-\langle\hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_3\rangle)| + O(1/R^{1-\delta}), \quad j=1,2,3. \end{aligned} \tag{15}$$

При этом зависимость от переменной s в правой части уравнения (15) содержится лишь в компоненте y_{1j} вектора $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13})$ и принимает вид

$$y_{1j} = g_j(t) + p_{1j}s. \tag{16}$$

Справедливость уравнений (13)-(16) проверяется непосредственно при учете соотношений (12). Мы используем здесь обозначения $d_j(t)$ и $g_j(t)$, $\quad j = 1,2,3$ для функций, описывающих положение начальной точки характеристики, интегрирование вдоль которой по ds приводит к вычислению поправочной фазовой функции $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$.

Принимая во внимание асимптотическое поведение вырожденной гипергеометрической функции (11), приходим к упрощенной записи решения (13, (15):

$$z_j(s) = d_j(t) + k_{1j}s - \frac{i}{k_{1j}}\ln(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) + O(1/R^{1-\delta}), \qquad (17)$$

$$z_{j+3}(s) = g_j(t) + p_{1j}s - \frac{i}{p_{1j}}\ln(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) + O(1/R^{1-\delta}), \qquad (18)$$

где функции $\Phi_i, \quad i = 1, 2, 3$ были описаны выше в уравнении (3). В определенных выше выражениях мы выбираем главную ветвь логарифма.

Таким образом, мы приходим к следующему результату. Каждая компонента шестимерного вектора координаты $\mathbf{X}$ содержит линейный рост по параметру s и логарифмическую поправку, что ведет к логарифмической деформации траектории на больших расстояниях.

Фазовая поправка $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ определяется одномерным интегралом

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j\in\{1,2,3\};i\neq j} k_i k_j \int_0^S ds\langle\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{k}}_j\rangle\frac{\Phi_i'\Phi_j'}{\Phi_i\Phi_j} + O(1/R^{2-\delta}). \qquad (19)$$

Здесь компоненты вектора $\mathbf{X}$ как функции пары переменных (t, s) определяются соотношениями (17)-(18).

Таким образом, фазовая поправка $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ порождается интегралом вдоль характеристики, параметризованной переменной s. Начальная точка характеристики определяется на кривой, параметризованной переменной t.

Нетрудно видеть, что найденное в (19) решение удовлетворяет уравнениям (5). Таким образом, фазовая поправка $W(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ лежит в определенном условиями (5) классе функций.

Отметим, что представляется естественной следующая гипотеза:

В случае, когда одна из парных координат, например, x_1 становится ограниченной,а y_1 остается большой, справедлива замена координат $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ следующего вида:

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_1, \qquad (20)$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_1. \qquad (21)$$

Иначе говоря, во всех линейных комбинациях большой и ограниченной переменных ограниченная переменная меняется на отношение градиента решения парного уравнения Шредингера, отвечающего этой ограниченной переменной, по моменту к самому решению:

$$\mathbf{x}_1 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = -i\frac{\nabla_{\mathbf{k}_1}\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)}{\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)}. \tag{22}$$

Условие (22) было установлено в [9,10] применительно к продолжению стандартного ВВК-приближения в асимптотические области конфигурационного пространства, в которых одна из парных переменных Якоби становится ограниченной, а остальные парные переменные Якоби велики.

Отметим, что условие (22) $\mathbf{x}_1\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1) = -i\nabla_{\mathbf{k}_1}\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)$, полученное независимо как условие сохранения скорости убывания невязки стандартного ВВК-приближения в трехчастичном уравнении Шредингера в специальных асимптотических областях, имеет и другую трактовку, впервые отмеченную в [13]. А именно, оно отражает фундаментальные принципы квантовой механики – условие квантования в системах с набором больших и ограниченных квантовых переменных. Эти соображения позволяют надеяться, что сформулированная выше гипотеза оказывается справедливой во всех порядках собственных функций абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора Шредингера.

§4. Заключение

Мы получили поправку к асимптотике собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шредингера задачи рассеяния трех одноименно заряженных квантовых частиц (классическое ВВК-приближение), отвечающей процессам $3 \to 3$. Результат описывается уравнением (1) с учетом (19). Поправочные слагаемые в слабой асимптотике полученного выражения убывают на бесконечности в конфигурационном пространстве как $O(1/R^{2-\delta})$. Они могут быть интерпретированы как слагаемые отвечающие процессам двукратного перерассеяния. Невязка полученного выражения в уравнении Шредингера убывает на бесконечности как $O(1/R^{3-\delta})$, то есть быстрее расходящейся пятимерной круговой волны, убывающей как $R^{-5/2}$. В этом смысле асимптотика является полной. Мы предлагаем также продолжение построенной асимптотики в области конфигурационного пространства, в которых одна из парных координат Якоби является ограниченной, а две другие парные координаты велики.

Список литературы

1. С. П. Меркурьев, *О теории рассеяния для системы трех частиц с кулоновским взаимодействием.* — Ядерная физика **24**, No. 2 (1976), 289–297.
2. С. П. Меркурьев, *Координатная асимптотика волновых функций* (3 → 3) *для системы трех заряженных частиц.* — Теор. и мат. физ. **32**, No. 2 (1977), 187–207.
3. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
4. M. Brauner, J. S. Briggs, H. Klar, *Triply-differential cross sections for ionisation of hydrogen atoms by electrons and positrons.* — J. Phys. B, **22** (1989), 2265–2287.
5. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, *Asymptotic solution of the Schroedinger equation for three charged particles.* — JETP Lett., **56** (1992), 435.
6. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, *Asymptotic solution of the Schroedinger equation for three charged particles.* — Phys. Rev. A. **47**, No 3 (1993), 2004–2022.
7. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* — Проблемы матем. физики, Ленингр. Университет, Ленинград **9** (1979), 14–30.
8. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **84** (1979), 16–22.
9. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Система трех трехмерных заряженных квантовых частиц: асимптотическое поведение собственных функций непрерывного спектра на бесконечности.* — Функц. анализ и его приложения **46**, No. 2 (2012), 83–89.
10. С. Б. Левин, *Об асимптотическом поведении собственных функций непрерывного спектра на бесконечности для системы трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 79–115.
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва, 1963.
12. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.
13. А. М. Будылин, *Частное сообщение*, 2021.

Levin S. B. Clarification of the distorted six-dimensional plane wave type solution asymptotics of the quantum scattering problem of three charged particles.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 8 ноября 2021 г.