Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

Д. В. Кориков

О ТОПОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОБЩИМ КРАЕМ И БЛИЗКИМИ ДН-ОПЕРАТОРАМИ

§1. Введение

Пусть (Ω, g) – компактная риманова поверхность с гладким связным краем $\partial\Omega =: \Gamma$, g – гладкий метрический тензор, а Δ_g – оператор Лапласа–Бельтрами на Ω. Рассмотрим задачу

$$\Delta_g u = 0 \text{ в } \Omega\backslash\Gamma, \quad u = f \text{ на } \Gamma \tag{1}$$

с гладкой вещественной функцией f и обозначим ее решение через u^f. Отображение $\Lambda : \; f \mapsto \partial_\nu u^f|_\Gamma$, где ν – внешная нормаль, продолжается по непрерывности до оператора $\Lambda : \; H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)$[1]. Оператор Λ называется *оператором Дирихле-Неймана* (ДН-оператором) поверхности (Ω, g). Обратная к (1) задача (*электроимпедансной томографии поверхностей*) состоит в восстановлении поверхности с краем по ее ДН-оператору Λ. Известно (см. [2]), что по оператор Λ однозначно определяет лишь конформный класс поверхности.[2] Для такой обратной задачи естественно поставить вопрос об устойчивости решений относительно малых возмущений данных Λ. В настоящей статье показано (см. Теорему 1), что малые возмущения данных Λ могут приводить к изменению топологии поверхностей Ω.

Напомним, что *родом* поверхности Ω называется такое максимальное число m непересекающихся замкнутых простых кривых в $\Omega\backslash\Gamma$, что разрезание вдоль этих кривых оставляет поверхность связной. Любая поверхность Ω (со связным краем Γ) рода m гомеоморфна полусфере с m ручками; таким орбразом, топология Ω полностью определяется ее родом m. Следующая формула установлена [1] и выражает род

Ключевые слова: римановы поверхности, определение топологии по ДН-оператору, электроимпедансная томография.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01 627А.

[1]Здесь и далее все функциональные пространства вещественные.

[2]Поверхности (Ω, g) и (Ω', g') с общим краем Γ называются *конформно эквивалентными* если существует такой диффеоморфизм $\beta : \; \Omega \mapsto \Omega'$, $\beta|_\Gamma = id$ и такая положительная функция $\rho \in C^\infty(\Omega)$, $\rho|_\Gamma = 1$, что β является изометрией $(\Omega, \rho g)$ и (Ω', g').

поверхности Ω в терминах ее ДН-оператора как

$$2m = \dim(\partial_\gamma + \Lambda J \Lambda) C^\infty(\Gamma); \tag{2}$$

здесь ∂_γ это производная по длине на Γ, а оператор интегрирования J определен на гладких функциях с нулевым средним на Γ и удовлетворяет соотношениям $J\partial_\gamma f = \partial_\gamma J f = f$.

Пусть $B(H^1(\Gamma); L_2(\Gamma))$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $H^1(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$. Обозначим через $\mathcal{B}_t^\Lambda$ открытый шар радиуса t в $B(H^1(\Gamma); L_2(\Gamma))$ с центром Λ. Результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть Λ есть ДН-оператор поверхности (Ω, g) с краем Γ и род Ω равен m. Тогда*

1) *существует такое (достаточно малое) $t_0 > 0$, что $\mathcal{B}_{t_0}^\Lambda$ не содержит ДН-операторов поверхностей (Ω', g'), $\partial\Omega' = \Gamma$ рода $m' < m$.*

2) *при любом $t > 0$ окрестность $\mathcal{B}_t^\Lambda$ содержит ДН-операторы поверхностей (Ω', g'), $\partial\Omega' = \Gamma$ любого рода $m' \geqslant m$.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству Теоремы 1. Далее для любой римановой поверхности S через $L_2(S)$ и $\vec{L}_2(S)$ будем обозначать пространства квадратично интегрируемых вещественнозначных функций и векторных полей на S со скалярными произведениями $(u,v)_S := \int_S uv dS$ и $(a,b)_S := \int_S g_S(a,b) dS$, соответственно. Здесь g_S – метрический тензор и dS – элемент площади на S.

Доказательство Теоремы 1. $\bullet$ Докажем утверждение 1). Пусть $\Lambda' \in \mathcal{B}_t^\Lambda$ есть ДН-оператор некоторой поверхности (Ω', g'), $\partial\Omega' = \Gamma$ рода m'. Ввиду (2) имеем $m = \dim \mathcal{N} C^\infty(\Gamma)$, $m' = \dim \mathcal{N}' C^\infty(\Gamma)$, где $\mathcal{N} := \partial_\gamma + \Lambda J \Lambda$ и $\mathcal{N}' := \partial_\gamma + \Lambda' J \Lambda'$. Поскольку $\mathcal{N}' - \mathcal{N} = (\Lambda' - \Lambda) J \Lambda - \Lambda' J (\Lambda' - \Lambda)$ и $\| \Lambda' - \Lambda \|_{H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)} < t$, справедлива оценка

$$\| \mathcal{N}' - \mathcal{N} \|_{H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)} \leqslant t \, \| J \|_{L_2(\Gamma) \mapsto H^1(\Gamma)} \left(2 \| \Lambda \|_{H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)} + t\right) = O(t). \tag{3}$$

при $t \to 0$. Зафиксируем базис $\{\mathcal{N} f_k\}_{k=1}^m$ в $\mathcal{N} C^\infty(\Gamma)$, тогда при всех $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, $|\mathbf{c}| = 1$ имеем $\| \sum_{k=1}^m c_k \mathcal{N} f_k \|_{L_2(\Gamma)} \geqslant C$, где $C > 0$. Отсюда и из (3) следует, что при тех же $\mathbf{c}$ и достаточно малых $t \in (0, t_0]$ выполнено неравенство

$$\Big\| \sum_{k=1}^m c_k \mathcal{N}' f_k \Big\|_{L_2(\Gamma)} \geqslant C - O(t) \geqslant C/2 > 0.$$

Значит, при $t \in (0, t_0]$ функции $\mathcal{N}' f_k$ линейно независимы; отсюда $m' = \dim \mathcal{N}' C^\infty(\Gamma) \geqslant m$.

• Для доказательства утверждения 2) построим семейство поверхностей $(\Omega_\varepsilon, g_\varepsilon)$, зависящих от малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и таких что

a) край каждой поврехности Ω_ε есть Γ,

b) род каждой Ω_ε равен m', где $m' > m$ – произвольное число, и

c) операторы Дирихле–Неймана Λ_ε поверхностей $(\Omega_\varepsilon, g_\varepsilon)$ удовлетворяют соотношению $\| \Lambda_\varepsilon - \Lambda \|_{H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Грубо говоря, поверхности Ω_ε строятся следующим образом. Из поверхности Ω удаляется окрестность некоторой точки $x_0 \in \Omega \backslash \Gamma$ диаметра $O(\varepsilon)$ (в метрике g) и к краю получившейся лакуны присоединяется другая поверхность $(\tilde{\Omega}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon)$ рода $m' - m$ и площади $O(\varepsilon^2)$ (в метрике $\tilde{g}_\varepsilon$). Для получившихся таким образом поверхностей $(\Omega_\varepsilon, g_\varepsilon)$ мы показываем, что их операторы Дирихле–Неймана Λ_ε удовлетворяют c). Отметим, что указанные выше ограничения на диаметр лакуны и площадь $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ несущественны и используются в доказательстве лишь технически. В самом деле, обе эти величины можно произвольно увеличить, не меняя ДН-оператора Λ_ε; для этого достаточно умножить метрику g_ε на подходящий конформный множитель $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\rho_\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon|_\Gamma = 1$.

Выберем карту $(U, \mathbf{x})$ в окрестности точки x_0, где $U \ni x \mapsto \vec{x} = (x^1, x^2) := \mathbf{x}(x) \in \mathbb{R}^2$ – изотермические координаты. Для простоты будем считать, $\mathbf{x}(x_0) = 0$ и $\mathbf{x}(U) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x}| < 1\}$. В координатах $\vec{x}$ метрический тензор g имеет вид $g_{ij} = \rho_0(\vec{x})\delta_{ij}$, где $\rho_0 > 0$ – гладкий конформный множитель. Поскольку оператор Дирихле-Неймана Λ поверхности (Ω, g) не изменяется при умножении метрики g на произвольный конформный множитель $\rho \in C^\infty(\Omega)$, $\rho > 0$, $\rho|_\Gamma = 1$, без ограничения общности можно считать, что $\rho_0(\vec{x}) = 1$, т.е. $g_{ij} = \delta_{ij}$ в локальных координатах $\vec{x}$. Поверхность Ω°_ε с лакуной вводится формулой $\Omega^\circ_\varepsilon := \Omega_\varepsilon \backslash \{x \in U \mid |\vec{x}(x)| < \varepsilon\}$, метрический тензор $g|_{\Omega^\circ_\varepsilon}$ на ней обозначим через g°_ε.

Теперь построим поверхность $(\omega^\circ_\varepsilon, \dot{g}^\circ_\varepsilon)$. Пусть (ω, g^ω) – произвольная компактная риманова поверхность без края, род ω равен $m' - m$, а g^ω – метрический тензор и $\zeta_0 \in \omega$ – произвольная точка на ω. Выберем карту $(V, \boldsymbol{\zeta})$ в окрестности точки ζ_0, где $V \ni \zeta_0 \mapsto \vec{\zeta} = (\zeta^1, \zeta^2) := \boldsymbol{\zeta}(\zeta) \in \mathbb{R}^2$ – изотермические координаты, $\boldsymbol{\zeta}(\zeta_0) = 0$ и $\boldsymbol{\zeta}(V) = \{\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{\zeta}| < 1\}$. Рассмотрим (некомпактную) поверхность $\dot{\omega} := \omega \backslash \{\zeta_0\}$, полученную из ω удалением точки ζ_0. В проколотой окрестности $\dot{V} := V \backslash \{\zeta_0\}$ введем локальные координаты $\zeta \mapsto \boldsymbol{\xi}(\zeta) = \vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ где

$$\xi_1 + i\xi_2 := \frac{1}{\zeta^1 + i\zeta^2}, \qquad (\zeta^1, \zeta^2) = \boldsymbol{\zeta}(\zeta)$$

Координаты $\vec{\xi}$ являются изотермическими, т.е. метрический тензор $g^{\omega}|_{\dot{\omega}}$ имеет в этих координатах вид $\rho_1(\vec{\xi})\delta_{ij}$ с гладким $\rho_1 > 0$. Определим на $\dot{\omega}$ новый метрический тензор $\dot{g} := \dot{\rho} g^{\omega}|_{\dot{\omega}}$, где $\dot{\rho} > 0$ – такой конформный множитель, что $\dot{\rho} \circ \boldsymbol{\xi}^{-1}(\vec{\xi}) = 1/\rho_1(\xi)$ при $|\vec{\xi}| > 1$. Тогда $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ в локальных координатах $\vec{\xi}$. Теперь введем поверхность $(\omega_\varepsilon^\circ, \dot{g}_\varepsilon^\circ)$ формулами $\omega_\varepsilon^\circ := \dot{\omega} \backslash \{\zeta \in \dot{\omega} \mid |\vec{\zeta}(\zeta)| < \varepsilon\}$ и $\dot{g}_\varepsilon^\circ := \varepsilon^2 \dot{g}|_{\omega_\varepsilon^\circ}$.

Возмущенная поверхность $\Omega_\varepsilon := (\Omega_\varepsilon^\circ \cup \omega_\varepsilon^\circ)/\sim$ получается из Ω_ε° и ω_ε° следуюшим отождествлением точек

$$[x] = [\zeta] \Longleftrightarrow x \sim \zeta \Longleftrightarrow \ x \in U \cap \Omega_\varepsilon^\circ, \ \zeta \in V \cap \omega_\varepsilon^\circ \text{ и } \boldsymbol{x}(x) = \varepsilon \boldsymbol{\xi}(\zeta). \tag{4}$$

Ясно, что поверхность Ω_ε удовлетворяет условиям a) и b). В дальнешем удобно считать Ω_ε°, ω_ε° подобластями поверхности Ω_ε и не делать различий между точками Ω_ε°, ω_ε° и их классами эквивалентности. Тогда для точек x кольца $\Omega_\varepsilon^\circ \cap \omega_\varepsilon^\circ$ определены как координаты $\vec{x} = \mathbf{x}(x)$, так и координаты $\xi = \xi(x)$, причем $\vec{x} = \varepsilon\vec{\xi}$ ввиду (4). В координатах $\vec{x}$ имеем

$$(g_\varepsilon^\circ)_{kl} = \delta_{kl}, \qquad (\dot{g}_\varepsilon^\circ)_{kl} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}\varepsilon^2 \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{5}$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Таким образом, метрики g_ε° и $\dot{g}_\varepsilon^\circ$ совпадают на $\Omega_\varepsilon \cap \omega_\varepsilon^\circ$. Введем (гладкий) метрический тензор g^ε на Ω_ε правилом $g^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^\circ} = g_\varepsilon^\circ$, $g^\varepsilon|_{\omega_\varepsilon^\circ} = \dot{g}_\varepsilon^\circ$. Пусть Δ_{g^ε} – оператор Лапласа–Бельтрами на Ω_ε. Ввиду (5) на кольце $\Omega_\varepsilon^\circ \cap \omega_\varepsilon^\circ$ справедливо представление

$$\Delta_{g^\varepsilon} = \Delta_{\vec{x}} = \varepsilon^{-2}\Delta_{\vec{\xi}};$$

здесь $\Delta_{\vec{x}} := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ и $\Delta_{\vec{\xi}} := \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2$.

- Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_{g^\varepsilon} u_\varepsilon^f = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon \backslash \Gamma, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon^f = f \text{ on } \Gamma, \tag{7}$$

где $f \in C^\infty(\Gamma)$. Отображение $f \mapsto \partial_\nu u_\varepsilon^f$ распространяется по непрерывности до ДН-оператора $\Lambda_\varepsilon : \ H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)$ поверхности $(\Omega_\varepsilon, g^\varepsilon)$.

Остается показать, что семейство $\{\Lambda_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ удовлетворяет условию c), т.е. что $\| \Lambda_\varepsilon - \Lambda \|_{H^1(\Gamma)\mapsto L_2(\Gamma)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого сначала построим асимптотику решения u^f_ε при $\varepsilon \to 0$ с помощью метода составных разложений (см. монографию [3]). Пусть $\phi :\ [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ – гладкая функция, $\phi(r) = 0$ при $r \leqslant 1$ и $\phi(r) = 1$ при $r \geqslant 2$. Определим срезающие функции χ_ε и ψ_ε формулами

$$\chi_\varepsilon = 0 \text{ на } \Omega_\varepsilon\backslash\Omega^\circ_\varepsilon, \quad \chi_\varepsilon = 1 \text{ на } \Omega_\varepsilon\backslash\omega^\circ_\varepsilon,$$
$$\psi_\varepsilon(x) = \phi(\varepsilon^{-1}|\mathbf{x}(x)|) \text{ при } x \in \Omega^\circ_\varepsilon \cap \omega^\circ_\varepsilon,$$
$$\psi_\varepsilon = 1 \text{ на } \Omega_\varepsilon\backslash\Omega^\circ_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 1 \text{ на } \Omega_\varepsilon\backslash\omega^\circ_\varepsilon,$$
$$\psi_\varepsilon(x) = 1 - \phi(2|\mathbf{x}(x)|) \text{ при } x \in \Omega^\circ_\varepsilon \cap U,$$

Пусть $f \in C^\infty(\Gamma)$ и u^f_ε – решение задачи (6), (7). В качестве главного члена асимптотики решения u^f_ε при $\varepsilon \to 0$ выберем функцию

$$v^f_{0,\varepsilon}(x) := \begin{cases} u^f(x_0) + \chi_\varepsilon(x)(u^f(x) - u^f(x_0)), & x \in \Omega^\circ_\varepsilon, \\ u^f(x_0), & x \in \Omega_\varepsilon\backslash\Omega^\circ_\varepsilon \end{cases}.$$

где $u^f \in C^\infty(\Omega)$ – решение (невозмущенной) задачи (1). Функция $v^f_{0,\varepsilon}$ удовлетворяет граничному условию (7). Подстановка $v^f_{0,\varepsilon}$ в уравнение (6) приводит к невязке $\Delta_{g^\varepsilon} v^f_{0,\varepsilon} = [\Delta_{g^\varepsilon}, \chi_\varepsilon](u^f(x) - u^f(x_0))$. Носитель коммутатора $[\Delta_{g^\varepsilon}, \chi_\varepsilon]$ расположен в кольце $\tilde{B}_\varepsilon = \{x \in \Omega^\circ_\varepsilon \cap \omega^\circ_\varepsilon \mid \varepsilon \leqslant |\mathbf{x}(x)| \leqslant 2\varepsilon\}$. Запишем эту невязку в локальных координатах и воспользуемся разложением Тейлора

$$u^f(x) - u^f(x_0) = \gamma^f_i x^i + O(|\vec{x}|^2), \qquad \gamma^f_i := \partial_{x^i} u^f|_{x=x_0},\ \vec{x} = \mathbf{x}(x). \tag{8}$$

Получим

$$\Delta_{g^\varepsilon} v^f_{0,\varepsilon} = [\Delta_{\vec{x}}, \phi(\varepsilon^{-1}|\vec{x}|)](\gamma^f_i x^i) + \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\gamma^f_i [\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i + \tilde{F}^f_{1,\varepsilon}.$$

Остаток $\tilde{F}^f_{1,\varepsilon}$ аннулируется вне $\tilde{B}_\varepsilon$. Оценка

$$\| \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} \|_{C(\tilde{B}_\varepsilon)} \leqslant c \| u^f \circ \mathbf{x}^{-1} \|_{C^2(\mathbf{x}(\tilde{B}_\varepsilon))} \leqslant c \| u^f \circ \mathbf{x}^{-1} \|_{H^1(\mathbf{x}(U))}, \tag{9}$$

вытекает из (8) и из локальных оценок решений однородных эллиптических уравнений. Все константы в (9) не зависят от f и ε. Из принципа максимума для гармонических функций и теоремы вложения имеем $\| u^f \|_{C(U)} \leqslant \| f \|_{C(\Gamma)} \leqslant c \| f \|_{H^1(\Gamma)}$. Интегрирование по частям дает $(\nabla_g u^f, \nabla_g u^f)_\Omega = (\Lambda f, f)_\Gamma \leqslant c \| f \|^2_{H^1(\Gamma)}$. Отсюда и из (9) получаем $\| \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} \|_{C(\tilde{B}_\varepsilon)} \leqslant c \| f \|_{H^1(\Gamma)}$. Поскольку площадь носителя $\tilde{F}^f_{1,\varepsilon}$ (в метрике g^ε) есть $O(\varepsilon^2)$, из предыдущих оценок имеем

$$\| \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon \| f \|_{H^1(\Gamma)} . \tag{10}$$

Для того, чтобы устранить главный член $[\Delta_{\vec{x}}, \phi(\varepsilon^{-1}|\vec{x}|)](\gamma^f_i x^i)$ невязки $\Delta_{g^\varepsilon} v^f_{0,\varepsilon}$, введем в асимптотику решения u^f_ε поправочный член в форме

$$w^f_{0,\varepsilon}(x) := \begin{cases} \varepsilon\psi_\varepsilon(x)(w^f(x) + \alpha^f G(x) + \beta^f_\varepsilon), & x \in \omega^\circ_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega_\varepsilon \backslash \omega^\circ_\varepsilon, \end{cases} .$$

где $w^f \in C^\infty(\omega)$, $\alpha^f, \beta^f_\varepsilon$ – вещественные числа и функция $G \in C^\infty(\dot{\omega})$ определена формулами

$$G(\zeta) = \phi(1/|\zeta|)\log|\vec{\zeta}| = -\phi(|\xi|)\log|\vec{\xi}| \text{ при } \zeta \in \dot{V}, \quad G = 0 \text{ на } \dot{\omega}\backslash\dot{V}$$

(напомним, что $\dot{\omega} = \omega\backslash\{\zeta_0\}$ и $\dot{V} = V\backslash\{\zeta_0\}$. Функция $v^f_{0,\varepsilon} + w^f_{0,\varepsilon}$ удовлетворяет граничному условию (7) в то время, как уравнение (6) выполнено с точностью до невязки $\Delta_{g^\varepsilon}(v^f_{0,\varepsilon} + w^f_{0,\varepsilon})$ с носителем в $\Omega^\circ_\varepsilon \cap \omega^\circ_\varepsilon$. В локальных координатах невязка принимает вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-1}\gamma^f_i[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i + \varepsilon(\Delta_{\vec{x}} w^f(x) + \alpha^f \Delta_{\vec{x}} G(x)) \\ &\qquad + \varepsilon[\Delta_{\vec{x}}, \psi_\varepsilon(x)](w^f(x) + \alpha^f G(x) + \beta^f_\varepsilon) + \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-1}\big([\Delta_{\vec{\xi}} w^f(x) + \gamma^f_i[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i - \alpha^f[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\log|\vec{\xi}|\big) \\ &\qquad + \varepsilon[\Delta_{\vec{x}}, \psi_\varepsilon(x)](w^f(x) + \alpha^f G(x) + \beta^f_\varepsilon) + \tilde{F}^f_{1,\varepsilon} \end{aligned} \tag{11}$$

Член порядка ε^{-1} аннулируется, если w^f удовлетворяет уравнению Лапласа–Бельтрами

$$\Delta_{g^\omega} w^f = H^f \quad \text{на } \omega \tag{12}$$

с правой частью

$$H^f(\zeta) := \begin{cases} \rho_1(\xi)^{-1}\big(\alpha^f[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\log|\vec{\xi}| - \gamma^f_i[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i\big), \zeta \in \dot{V}, & \vec{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\zeta) \\ 0, & \zeta \in \omega\backslash\dot{V}. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция H^f гладкая на ω и аннулируется вблизи ζ_0. Решение уравнения (12) существует если и только если $(H^f, 1)_{L_2(\omega)} = 0$. Последнее условие разрешимости можно переписать в виде

$$\alpha^f \int\limits_{\mathbb{R}^2} [\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\log|\vec{\xi}| d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \gamma^f_i[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i d\xi_1 d\xi_2.$$

Поскольку $\phi(|\xi|) = 1$ при $|\xi| > 2$ и функция $\vec{\xi} \mapsto \log|\vec{\xi}|$ гармоническая при $|\vec{\xi}| \neq 0$, интеграл слева равен

$$\int\limits_{|\vec{\xi}|\leqslant 3} \Delta_{\vec{\xi}}\big(\phi(|\xi|)\log|\vec{\xi}|\big)d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_{|\vec{\xi}|=3} \partial_{|\vec{\xi}|}\log|\vec{\xi}|dl = 2\pi.$$

Таким образом, из условия разрешимости уравнения (12) находится коэффициент

$$\alpha^f := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \gamma_i^f[\Delta_{\vec{\xi}}, \phi(|\xi|)]\xi^i d\xi_1 d\xi_2.$$

Решение $w^f \in C^\infty(\omega)$ уравнения (12) определено с точностью до константы, поэтому зафиксируем его дополнительным условием $(w^f, 1)_{L_2(\omega)} = 0$. Отметим, что w^f линейно зависит от коэффициентов γ_i^f. Из разложения Тейлора функции $w^f \circ \boldsymbol{\zeta}^{-1}$ в окрестности нуля и равенства $|\zeta| = 1/|\xi|$ вытекает допускающая дифференцирование оценка

$$w^f(\zeta) - w^f(\zeta_0) = O\big(|\vec{\xi}|^{-1}(|\gamma_1^f| + |\gamma_2^f|)\big), \quad \vec{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\zeta),\ |\vec{\xi}| \geqslant 1.$$

Теперь невязка (11) принимает вид

$$\varepsilon[\Delta_{\vec{x}}, \psi_\varepsilon(x)](w^f(\zeta_0) - \alpha^f\log|\vec{x}| + \alpha^f\log\varepsilon + \beta_\varepsilon^f) + \tilde{F}_{1,\varepsilon}^f + \tilde{F}_{2,\varepsilon}^f$$

где $\tilde{F}_{2,\varepsilon}^f$ – гладкая функция с носителем в $\Omega_\varepsilon^\circ \cap U$ и удовлетворяющая оценке $\tilde{F}_{2,\varepsilon}^f = O\big(\varepsilon^2(|\gamma_1^f| + |\gamma_2^f|)\big)$. Частные производные $\gamma_i^f := \partial_{x^i}u^f|_{x=x_0}$ гармонической функции u^f являются линейными непрерывными функционалами от $f \in H^1(\Gamma)$. Поэтому справедлива оценка

$$\| \tilde{F}_{2,\varepsilon}^f \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon^2 \| f \|_{H^1(\Gamma)} \tag{13}$$

с константой c, не зависящей от f и ε. Выберем $\beta_\varepsilon^f = -\alpha^f\log\varepsilon - w^f(\zeta_0)$, тогда невязка окончательно принимает вид

$$-\alpha^f\varepsilon[\Delta_{\vec{x}}, \psi_\varepsilon(x)]\log|\vec{x}| + \tilde{F}_{1,\varepsilon}^f + \tilde{F}_{2,\varepsilon}^f.$$

Теперь из оценок (10) и (13) следует, что

$$\| \Delta_{g^\varepsilon}(v_{0,\varepsilon}^f + w_{0,\varepsilon}^f) \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon \| f \|_{H^1(\Gamma)}.$$

Таким образом, для решения u_ε^f задачи (6), (7) справедливо разложение

$$u_\varepsilon^f = v_{0,\varepsilon}^f + w_{0,\varepsilon}^f + \tilde{u}_\varepsilon^f, \tag{14}$$

где $\tilde{u}^f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, $\tilde{u}^f_\varepsilon|_\Gamma = 0$ и

$$\| \Delta_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon \| f \|_{H^1(\Gamma)} . \tag{15}$$

Константа в (15) не зависит от f и ε.

• Теперь выведем равномерную по ε оценку нормальной производной $\partial_\nu \tilde{u}^f_\varepsilon|_\Gamma$ остатка $\tilde{u}^f_\varepsilon$. Поскольку $\tilde{u}^f_\varepsilon|_\Gamma = 0$, из формулы Грина имеем

$$\|\nabla_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon\|_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon)} = -(\Delta_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon, \tilde{u}^f_\varepsilon)_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Поскольку носитель функции $\Delta_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon = -\Delta_{g^\varepsilon}(v^f_{0,\varepsilon} + w^f_{0,\varepsilon})$ содержится в $\Omega^\circ_\varepsilon \cap \omega^\circ_\varepsilon$, из предыдущей формулы вытекает неравенство

$$\|\nabla_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \|\Delta_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \|\tilde{u}^f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\circ_\varepsilon \cap \omega^\circ_\varepsilon)}. \tag{16}$$

Область $\Omega' := \Omega_\varepsilon \backslash \omega^\circ_\varepsilon$ не зависит от ε и функция $\tilde{u}^f_\varepsilon$ гармоническая в Ω'. Неравенство Фридрихса

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega')} \leqslant \|\nabla_{g^\varepsilon} v\|^2_{\vec{L}_2(\Omega')}/\lambda_1$$

справедливо для всех $v \in C^\infty(\Omega')$, удовлетворяющих граничному условию $v|_\Gamma = 0$. Число $\lambda_1 > 0$ не зависит от ε и является первым собственным значением задачи

$$\Delta_g v = \lambda v \text{ в } \Omega', \qquad v|_\Gamma = 0, \quad \partial_\nu v|_{\partial\Omega' \backslash \Gamma} = 0.$$

Отсюда и из теоремы о следах

$$\|\tilde{u}^f_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial\Omega' \backslash \Gamma)} \leqslant c\|\tilde{u}^f_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega')} \leqslant c\|\nabla_{g^\varepsilon} \tilde{u}^f_\varepsilon\|^2_{\vec{L}_2(\Omega')}. \tag{17}$$

Введем полярные координаты $r = |\vec{x}|$, $\varphi = \arg(x^1 + ix^2)$. Интегрируя по частям и применяя простое неравенство $2ab \leqslant a^2 s + b^2/s$ $(s > 0)$, выводим

$$
\|\tilde{u}_\varepsilon^f\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon^\circ\cap\omega_\varepsilon^\circ)} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 (\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1})^2 r dr
$$

$$
= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2 (\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1})^2 d\varphi\Big|_{r=\varepsilon}^1 - \int\limits_\varepsilon^1 [r^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1}][r^{3/2}\partial_r(\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1})]dr
$$

$$
\leqslant \Big(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 (\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1})^2 r dr\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 r^2(\partial_r \tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1})^2 r dr\Big)^{1/2}
$$

$$
+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{x}^{-1}\big|_{r=1})^2 d\varphi
$$

$$
\leqslant c\big[\|\tilde{u}_\varepsilon^f\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega'\setminus\Gamma)} + t\|\tilde{u}_\varepsilon^f\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon^\circ\cap\omega_\varepsilon^\circ)} + t^{-1}\|\nabla_{g^\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^f\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon^\circ\cap\omega_\varepsilon^\circ)}\big].
$$

Выбирая t достаточно малым и учитывая неравенство (17), приходим к оценке

$$
\|\tilde{u}_\varepsilon^f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^\circ\cap\omega_\varepsilon^\circ)} \leqslant c\|\nabla_{g^\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^f\|_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon)}.
$$

Комбинируя последнюю формулу с (16) и (15), находим

$$
\|\nabla_{g^\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^f\|_{\vec{L}_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant c\varepsilon \parallel f \parallel_{H^1(\Gamma)} . \tag{18}
$$

Пусть $S \subset \Omega'$ – не зависящая от ε окрестность края Γ и $\mathbf{q}: \ S \ni x \mapsto (\gamma, l) \in \Gamma \times [0,1)$ – полугеодезические координаты на S. Напомним, что функция $\tilde{u}_\varepsilon^f$ гармоническая в Ω' и аннулируется на Γ. Поэтому из (18) и теоремы о локальном повышении гладкости решений эллиптических задач следует, что

$$
\parallel \tilde{u}_\varepsilon^f \circ \mathbf{q}^{-1} \parallel_{H^k(q(S))} \leqslant c_k \|\nabla_{g^\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^f\|_{\vec{L}_2(S)} \leqslant c_k\varepsilon \parallel f \parallel_{H^1(\Gamma)}
$$

при любых $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда и из теоремы о следах вытекает, что

$$
\parallel \partial_\nu \tilde{u}_\varepsilon^f \parallel_{H^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_k\varepsilon \parallel f \parallel_{H^1(\Gamma)} \tag{19}
$$

при любых $k = 1, 2, \ldots$; константа c_k в (19) не зависит от f и ε.

• Переходя в (14) к нормальным производным на Γ и учитывая, что $v_{0,\varepsilon}^f = u^f$ и $w_{0,\varepsilon}^f = 0$ в окрестности Γ, находим

$$
\Lambda_\varepsilon f = \Lambda f + \partial_\nu \tilde{u}_\varepsilon^f.
$$

Теперь из (19) следует, что

$$\| (\Lambda_\varepsilon - \Lambda) f \|_{H^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_k \varepsilon \| f \|_{H^1(\Gamma)}$$

для всех $f \in C^\infty(\Gamma)$. Распространяя последнюю оценку по нерерывности на все $f \in H^1(\Gamma)$, находим, что $\Lambda_\varepsilon - \Lambda$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ непрерывно действует из $H^1(\Gamma)$ в $H^{k-1/2}(\Gamma)$ и $\| \Lambda_\varepsilon - \Lambda \|_{H^1(\Gamma) \mapsto H^{k-1/2}(\Gamma)} = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда при $k = 2$ вытекает утверждение c). Тем самым доказана Теорема 1.

Замечание. Если поверхность ω выбрана неориентируемой, то те же самые рассуждения показывают, что в любая окрестность $\mathcal{B}_t^\Lambda$ $(t > 0)$ ДН-оператора Λ содержит ДН-операторы неориентируемых поверхностей с краем Γ.

Список литературы

1. M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method.* — SIAM Journal of Mathematical Analysis **35**, No. 1 (2003), 172–182.
2. M. Lassas, G. Uhlmann, *On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map.* — Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **34**, No. 5 (2001), 771–787.
3. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains, Vol. I*, Operator Theory: Advances and Applications, 111, Birkhäuser Basel, 2000.

Korikov D. V. On the topology of surfaces with a common boundary and close DN-maps.

Let Ω be a smooth compact Riemann surface with the boundary Γ, and $\Lambda: \ H^1(\Gamma) \mapsto L_2(\Gamma)$, $\Lambda f := \partial_\nu u|_\Gamma$ its DN-map, where u obeys $\Delta_g u = 0$ in Ω and $u = f$ on Γ. As is known [1], the genus m of the surface Ω is determined by its DN-map Λ. In this article, we prove the existence of Riemann surfaces of arbitrary genus $m' > m$, with boundary Γ, and such that their DN-maps are arbitrarily close to Λ with respect to the operator norm. In other words, an arbitrarily small perturbation of the DN-map may change the surface topology.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
192288, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 16 сентября 2021 г.