

А. В. Каплун

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЭЙКОНАЛОВ ТРЕХЛУЧЕВОГО ГРАФА

§1. О РАБОТЕ

Работа является дополнением к статье [4] и иллюстрирует ее результаты. Рассматривается метрический граф простейшей структуры - трехлучевая звезда с ребрами попарно различной длины. Для него детально описываются все шаги процедуры [4], приводящей алгебру эйконалов графа к канонической форме. С использованием этой формы, спектр алгебры оснащается структурой графа.

§2. ВОЛНЫ, РАЗБИЕНИЯ, ЭЙКОНАЛЫ

- Рассмотрим метрический граф Ω , состоящий из ребер $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ с длинами l_1, l_2, l_3 , внутренней вершины v и *граничных* вершин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 =: \Gamma$). Длины ребер различны:

$$l_1 < l_2 < l_3.$$

На графе задана метрика $\tau = \tau(x, y)$. Через

$$\Omega^r[\gamma_i] := \{x \in \Omega \mid \tau(x, \gamma_i) \leq r\}, \quad r > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

обозначаются метрические окрестности вершин; функция $\tau(\cdot)$:

$$\tau(x) := \tau(x, \Gamma), \quad x \in \Omega$$

называется эйконалом.

- На графе определена динамическая система

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } L_2(\Omega), \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{K} & \text{for } 0 < t < T; \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & \text{in } \Omega; \\ u = f \in \mathcal{F}^T & \text{on } \Gamma \times [0, T], \end{cases}$$

Ключевые слова: метрический граф, алгебра эйконалов, каноническое представление, спектр.

Поддержано грантом РФФИ 18-01-00269, Фондом Volks Wagen Foundation и конкурсом “Молодая математика России.”

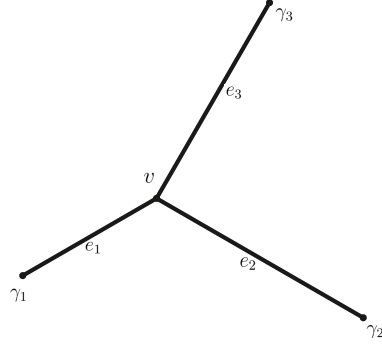


Рис. 1. Граф

в которой $T > 0$ – конечный финальный момент времени,

$$\Delta : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad \text{Dom } \Delta = \mathcal{K}, \quad (\Delta y)|_{e_i} := \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

– оператор Лапласа, определенный на классе Кирхгофа \mathcal{K}

$$\mathcal{K} := \left\{ y \in H^2(\Omega) \left| \sum_{i=1}^3 \lim_{e_i \ni x \rightarrow v} \frac{y(x) - y(v)}{\tau(x, v)} = 0 \right. \right\},$$

$$\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T]) = \oplus \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}_{\gamma_i}^T, \quad \mathcal{F}_{\gamma_i}^T := L_2(\{\gamma_i\} \times [0, T]), \quad i = 1, 2, 3$$

– пространство граничных управлений и его подпространства, отвечающие граничным вершинам; $u = u^f(x, t)$ – решение (волна, инициированная управлением $f \in \mathcal{F}^T$).

Волны распространяются с конечной скоростью:

$$\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \Omega^t[\gamma_i], \quad f \in \mathcal{F}_{\gamma_i}^T, \quad i = 1, 2, 3.$$

Каждой вершине $\gamma \in \Gamma$ отвечает фундаментальное решение

$$u^f = u^{\delta_{\gamma\delta}}(x, t), \quad f(\gamma', t) = \delta_{\gamma}(\gamma')\delta(t), \quad \delta_{\gamma}(\gamma') := \begin{cases} 0, & \gamma' \neq \gamma \\ 1, & \gamma' = \gamma \end{cases},$$

описывающее волну от мгновенного источника, действующего из этой вершины.

- Множества (подпространства)

$$\mathcal{U}_\gamma^s := \{u^f(\cdot, s) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\} = \{[u^{\delta_\gamma, \delta}(\cdot, \cdot) * f](s) \mid f \in \mathcal{F}_\gamma^T\}, \quad 0 \leq s \leq T$$

называются достижимыми. Они определяют неубывающие семейства ортогональных проекторов:

$$P_\gamma^s : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad \text{Ran } P_\gamma^s = \mathcal{U}_\gamma^s, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Проекторы определяют самосопряженные операторы

$$E_\gamma^T := \int_0^T (s+1) dP_\gamma^s,$$

(эйконали), действующие в $L_2(\Omega)$. Отметим, что ранее в [1, 3] они вводились соотношением $E_\gamma^T = \int_0^T s dP_\gamma^s$, но принятое выше определение оказывается более удобным.

- Пространственно-временные графы

$$H_\gamma := \text{supp } u^{\delta_\gamma, \delta} \subset \Omega \times [0, \infty), \quad H_\gamma^T := H_\gamma \cap (\Omega \times [0, T])$$

называются *гидрой* и *усеченной гидрой* соответственно (см. [2, 3]). Гидры суть носители фундаментальных решений. На Рис. $H_{\gamma_1}^T$ и $H_{\gamma_2}^T$ показаны голубым и желтым цветами соответственно.

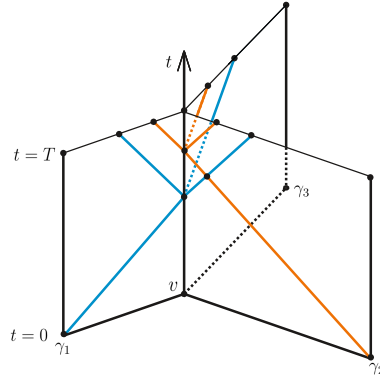


Рис. 2. Гидра.

- Дальнейшие рассмотрения отвечают финальному моменту T , для которого выполнено

$$T > l_2 > l_1, \quad T < l_3, \quad T < l_1 + l_2.$$

При таком $t = T$ волны от вершин γ_1 и γ_2 локализованы в пересекающихся окрестностях $\Omega^T[\gamma_1]$ и $\Omega^T[\gamma_2]$, каждая из которых содержит внутреннюю вершину v . Соответствующая гидра $H^T := H_{\gamma_1}^T \cup H_{\gamma_2}^T$ и заполненные волнами окрестности показаны на Рис. 2 и 4. Развертка данной гидры представлена на Рис. 3 (повернута на 90°).

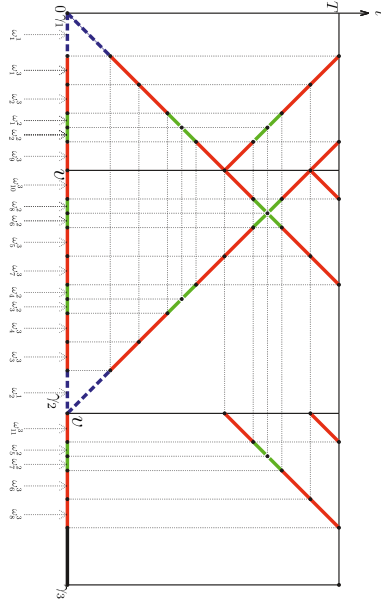


Рис. 3. Развертка гидры.

Развертка определяет разбиение графа Ω на семейства Φ^j , состоящие из интервалов (клеток) ω_i^j одинаковой длины $|\omega_i^j| = \epsilon_{\Phi^j}$ (детальное описание такого разбиения и его геометрический смысл в общем случае см. в [1]). В рассматриваемом случае граф разбивается на три

семейства:

$$\Phi^1 = \bigcup_{i=1}^2 \omega_i^1, \quad \Phi^2 = \bigcup_{i=1}^8 \omega_i^2, \quad \Phi^3 = \bigcup_{i=1}^{11} \omega_i^3,$$

состоящие из 2, 8 и 11 клеток соответственно. На Рис. 4 клетки ω_i^1 отмечены пунктиром, клетки ω_i^2 - зеленым, а клетки ω_i^3 - красным цветами. Каждая клетка накрывается (при вертикальном проектировании $\Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega$) соответствующими участками гидры, показанными на развертке соответствующими цветами. Разбиение графа (точнее, его части, заполненной волнами к моменту $t = T$) показано на Рис. 4. Там же, серым и темно-серым цветом указаны метрические T -окрестности вершин γ_1 и γ_2 . Разбиение развертки определяет набор

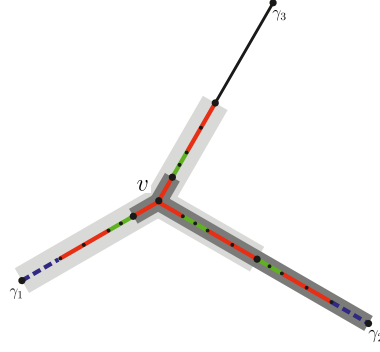


Рис. 4. Разбиение графа на семейства.

линейных функций $\tau_{\gamma\Phi^j}^i \in C([0, \epsilon_{\Phi^j}])$:

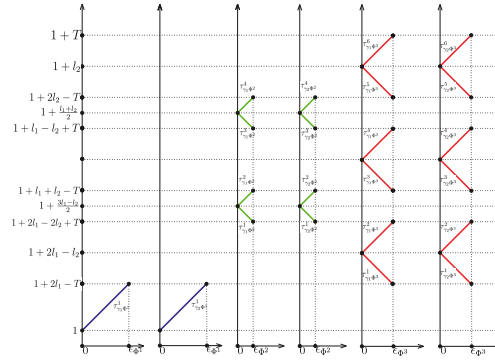
$$\tau_{\gamma\Phi^j}^i(r) = t_{\gamma\Phi^j}^i \pm r, \quad r \in [0, \epsilon_{\Phi^j}], \quad j = 1, \dots, n_{\gamma\Phi^j},$$

где $t_{\gamma\Phi^j}^i \geq 0$ - некоторые константы; их графики показаны на Рис. 5 (определение в общем случае см. в [1]). Приведем точное описание (фигурирующие в нем векторы-столбцы $\beta_{\gamma\Phi^j}^i$ размерности m_{Φ^j} используются ниже, индекс t означает транспонирование):

Семейство Φ^1 :

$$n_{\gamma_1\Phi^1} = n_{\gamma_2\Phi^1} = 1, \quad m_{\Phi^1} = 2, \quad \epsilon_{\Phi^1} = 2l_1 - T$$

$$\tau_{\gamma_1\Phi^1}^1(r) = 1 + r, \quad \beta_{\gamma_1\Phi^1}^1 = (1, 0)^t$$

Рис. 5. Функции τ .

$$\tau_{\gamma_2\Phi^1}^1(r) = 1 + r, \quad \beta_{\gamma_1\Phi^1}^1 = (0, 1)^t$$

Семейство Φ^2 :

$$n_{\gamma_1\Phi^2} = n_{\gamma_2\Phi^2} = 4, \quad m_{\Phi^2} = 8, \quad \epsilon_{\Phi^2} = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$$

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma_1\Phi^2}^1(r) &= 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} - r, & \beta_{\gamma_1\Phi^2}^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_1\Phi^2}^2(r) &= 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} + r, & \beta_{\gamma_1\Phi^2}^2 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_1\Phi^2}^3(r) &= 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} - r, & \beta_{\gamma_1\Phi^2}^3 &= (0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_1\Phi^2}^4(r) &= 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} + r, & \beta_{\gamma_1\Phi^2}^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma_2\Phi^2}^1(r) &= 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} - r, & \beta_{\gamma_2\Phi^2}^1 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_2\Phi^2}^2(r) &= 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} + r, & \beta_{\gamma_2\Phi^2}^2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_2\Phi^2}^3(r) &= 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} + r, & \beta_{\gamma_2\Phi^2}^3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^t \\ \tau_{\gamma_2\Phi^2}^4(r) &= 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} - r, & \beta_{\gamma_2\Phi^2}^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^t \end{aligned}$$

Семейство Φ^3 :

$$n_{\gamma_1\Phi^3} = n_{\gamma_2\Phi^3} = 6, \quad m_{\Phi^3} = 11, \quad \epsilon_{\Phi^3} = T - l_2$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^1(r) &= 1 + 2l_1 - l_2 - r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^2(r) &= 1 + 2l_1 - l_2 + r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^2 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^3(r) &= 1 + l_2 - r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^3 &= (0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^4(r) &= 1 + l_2 + r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^5(r) &= 1 + l_1 - r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^t \\
\tau_{\gamma_1 \Phi^3}^6(r) &= 1 + l_1 + r, & \beta_{\gamma_1 \Phi^3}^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^1(r) &= 1 + 2l_1 - l_2 - r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^1 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^2(r) &= 1 + 2l_1 - l_2 + r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^3(r) &= 1 + l_1 + r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^4(r) &= 1 + l_1 - r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^t \\
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^5(r) &= 1 + l_2 - r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^t \\
\tau_{\gamma_2 \Phi^3}^6(r) &= 1 + l_2 + r, & \beta_{\gamma_2 \Phi^3}^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t
\end{aligned}$$

- Разбиению графа на семейства и клетки отвечает разложение пространства графа на подпространства:

$$L_2(\Omega) = \oplus \sum_{j=1}^3 L_2(\Phi^j) = \oplus \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{m_{\Phi^j}} L_2(\omega_i^j) = \oplus \sum_{j=1}^3 L_2([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathbb{R}^{m_{\Phi^j}}).$$

С разложением связан унитарный оператор

$$U : L_2(\Omega) \rightarrow \oplus \sum_{j=1}^3 L_2([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathbb{R}^{m_{\Phi^j}}),$$

определяющий *параметрическое представление* эйконолов

$$UE_\gamma^T U^{-1} = \oplus \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^{m_{\Phi^j}} \tau_{\gamma \Phi^j}^i(\cdot) P_{\gamma \Phi^j}^i \right] \in \oplus \sum_{j=1}^3 C([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}}), \quad (1)$$

где $P_{\gamma \Phi^j}^i$ суть одномерные ортогональные проекторы в $\mathbb{R}^{m_{\Phi^j}}$:

$$P_{\gamma \Phi^j}^i = \langle \cdot, \beta_{\gamma \Phi^j}^i \rangle \beta_{\gamma \Phi^j}^i, \quad \beta_{\gamma \Phi^j}^i \in \mathbb{R}^{m_{\Phi^j}}, \quad |\beta_{\gamma \Phi^j}^i| = 1. \quad (2)$$

Векторы $\beta_{\gamma \Phi^j}^i$ строятся по фундаментальным решениям $u^{\delta \gamma \delta}$ в соответствии со структурой гидр H_γ^T ; определения в общем случае см. в [1]. При этом для каждой граничной вершины γ выполнено $P_{\gamma \Phi^j}^i P_{\gamma \Phi^j}^{i'} = P_{\gamma \Phi^j}^{i'} P_{\gamma \Phi^j}^i = 0$ при $i \neq i'$.

В соответствии с (1) имеем представление отдельных эйконалов в параметрической форме:

$$\begin{aligned} UE_{\gamma_1}^T U^{-1} &= \oplus \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^{n_{\gamma_1 \Phi^j}} \tau_{\gamma_1 \Phi^j}^i(\cdot) P_{\gamma_1 \Phi^j}^i \right], \\ UE_{\gamma_2}^T U^{-1} &= \oplus \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^{n_{\gamma_2 \Phi^j}} \tau_{\gamma_2 \Phi^j}^i(\cdot) P_{\gamma_2 \Phi^j}^i \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

§3. АЛГЕБРА ЭЙКОНАЛОВ

Определение и представление. • Главный предмет работы это C^* -алгебра эйконалов

$$\mathfrak{E} := \vee \{E_{\gamma_1}^T, E_{\gamma_2}^T\}$$

– минимальная C^* -подалгебра алгебры ограниченных операторов в $L_2(\Omega)$, содержащая эйконалы. Согласно (3), имеем вложение:

$$U\mathfrak{E}U^{-1} \subset \oplus \sum_{j=1}^3 C([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}}).$$

Оно уточняется следующим образом:

$$U\mathfrak{E}U^{-1} \subset \oplus \sum_{j=1}^3 C([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathfrak{P}_{\Phi^j}), \quad (4)$$

где $\mathfrak{P}_{\Phi^j} := \vee \{P_{\gamma \Phi^j}^i \mid \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}, i = 1, \dots, n_{\gamma \Phi^j}\} \subset \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}}$.

Обозначим через \mathbb{P}_{Φ^j} наборы проекторов, которые являются образующими для алгебр \mathfrak{P}_{Φ^j} : $\mathbb{P}_{\Phi^j} = \{P_{\gamma \Phi^j}^i \mid \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}, i = 1, \dots, n_{\gamma \Phi^j}\}$. На каждом из таких наборов введем отношение эквивалентности по следующему правилу. Будем говорить, что проекторы $P = \langle \cdot, \beta \rangle \beta$ и $P' = \langle \cdot, \beta' \rangle \beta'$ находятся в отношении \sim_0 , если выполнено $PP' \neq 0$ или, что эквивалентно, векторы β и β' не ортогональны: $\langle \beta, \beta' \rangle \neq 0$. Расширим это отношение по транзитивности до отношения эквивалентности: примем $P \sim P'$, если в наборе имеются проекторы P_1, \dots, P_l , такие, что выполнено

$$P \sim_0 P_1 \sim_0 \dots \sim_0 P_l \sim_0 P'.$$

Можно показать, что разбиению каждого набора

$$\mathbb{P}_{\Phi^j} = \bigcup_{k=1}^{q_j} \mathbb{P}_{\Phi^j}^k$$

на классы эквивалентности $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$ отвечает разложение \mathfrak{P}_{Φ^j} на подалгебры

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j} := \bigoplus_{k=1}^{q_j} \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k, \quad \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k := \vee \mathbb{P}_{\Phi^j}^k,$$

причем имеет место изометрия

$$\mathfrak{P}_{\Phi^j}^k \cong \mathbb{M}^{m_{\Phi^j}^k}, \quad m_{\Phi^j}^k = \dim \text{span} \{ \beta \mid \langle \cdot, \beta \rangle \beta \in \mathbb{P}_{\Phi^j}^k \}.$$

Как следствие, имеем вложение:

$$U \mathfrak{E} U^{-1} \subset \bigoplus_{j=1}^3 \bigoplus_{k=1}^{q_j} C([0, \epsilon_{\Phi^j}], \mathfrak{P}_{\Phi^j}^k). \quad (5)$$

Заметим, что при переходе от (4) к (5) количество блоков (слагаемых в правой части) увеличивается, но их структура существенно упрощается. Это видно на примере рассматриваемого графа: приведем подробности.

- Опишем наборы $\mathbb{P}_{\Phi^j}^k$ для отдельных семейств Φ^j . Описание легко извлекается из конкретного вида векторов $\beta_{\gamma^i \Phi^j}^i$, приведенного в конце предыдущей секции.

Семейство Φ^1 : $q_1 = 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Phi^1}^1 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^1}^1\}, & m_{\Phi^1}^1 &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Phi^1}^2 &= \{P_{\gamma_2 \Phi^1}^1\}, & m_{\Phi^1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Семейство Φ^2 : $q_2 = 6$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Phi^2}^1 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^2}^1\}, & m_{\Phi^2}^1 &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Phi^2}^2 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^2}^2\}, & m_{\Phi^2}^2 &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Phi^2}^3 &= \{P_{\gamma_2 \Phi^2}^1\}, & m_{\Phi^2}^3 &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Phi^2}^4 &= \{P_{\gamma_2 \Phi^2}^2\}, & m_{\Phi^2}^4 &= 1 \\ \mathbb{P}_{\Phi^2}^5 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^2}^3, P_{\gamma_2 \Phi^2}^3\}, & m_{\Phi^2}^5 &= 2 \\ \mathbb{P}_{\Phi^2}^6 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^2}^4, P_{\gamma_2 \Phi^2}^4\}, & m_{\Phi^2}^6 &= 2 \end{aligned}$$

Семейство Φ^3 : $q_3 = 7$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\Phi^3}^1 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^3}^1\}, & m_{\Phi^3}^1 &= 1 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^2 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^3}^2\}, & m_{\Phi^3}^2 &= 1 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^3 &= \{P_{\gamma_2 \Phi^3}^1\}, & m_{\Phi^3}^3 &= 1 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^4 &= \{P_{\gamma_2 \Phi^3}^2\}, & m_{\Phi^3}^4 &= 1 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^5 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^3}^3, P_{\gamma_2 \Phi^3}^3\}, & m_{\Phi^3}^5 &= 2 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^6 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^3}^4, P_{\gamma_2 \Phi^3}^4\}, & m_{\Phi^3}^6 &= 2 \\
\mathbb{P}_{\Phi^3}^7 &= \{P_{\gamma_1 \Phi^3}^5, P_{\gamma_1 \Phi^3}^6, P_{\gamma_2 \Phi^3}^5, P_{\gamma_2 \Phi^3}^6\}, & m_{\Phi^3}^7 &= 3
\end{aligned}$$

Вводя новую сквозную нумерацию для блоков, проекторов и соответствующих им функций τ , приходим к следующему представлению эйконалов:

$$\begin{aligned}
UE_{\gamma_1}^T U^{-1} &= \bigoplus_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma_1 l}} \tau_{\gamma_1 l}^k P_{\gamma_1 l}^k \right], & UE_{\gamma_2}^T U^{-1} &= \bigoplus_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{n_{\gamma_2 l}} \tau_{\gamma_2 l}^k P_{\gamma_2 l}^k \right], \\
U\mathfrak{E}U^{-1} &\subset \bigoplus_{l=1}^L C([0, \varepsilon_l], \mathfrak{P}_l), & \mathfrak{P}_l &\cong \mathbb{M}^{m_l}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Несложно подсчитать, что $L = 15$. Опишем детали этих представлений:

- $l = 1$: $\varepsilon_1 = 2l_1 - T$, $m_1 = 1$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 1}^1 = 1 + r$, $\beta_{\gamma_1 1}^1 = (1)^t$
- $l = 2$: $\varepsilon_2 = 2l_1 - T$, $m_2 = 1$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 2}^1 = 1 + r$, $\beta_{\gamma_2 2}^1 = (1)^t$
- $l = 3$: $\varepsilon_3 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_3 = 1$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 3}^1 = 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} - r$, $\beta_{\gamma_1 3}^1 = (1)^t$
- $l = 4$: $\varepsilon_4 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_4 = 1$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 4}^1 = 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} + r$, $\beta_{\gamma_1 4}^1 = (1)^t$
- $l = 5$: $\varepsilon_5 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_5 = 1$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 5}^1 = 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} - r$, $\beta_{\gamma_2 5}^1 = (1)^t$
- $l = 6$: $\varepsilon_6 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_6 = 1$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 6}^1 = 1 + \frac{3l_1 - l_2}{2} + r$, $\beta_{\gamma_2 6}^1 = (1)^t$
- $l = 7$: $\varepsilon_7 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_7 = 2$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 7}^1 = 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} - r$, $\beta_{\gamma_1 7}^1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 7}^1 = 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} + r$, $\beta_{\gamma_2 7}^1 = (1, 0)^t$

- $l = 8$: $\varepsilon_8 = \frac{3l_2 - l_1}{2} - T$, $m_8 = 2$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 8}^1 = 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} + r$, $\beta_{\gamma_1 8}^1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 8}^1 = 1 + \frac{l_1 + l_2}{2} - r$, $\beta_{\gamma_2 8}^1 = (1, 0)^t$
- $l = 9$: $\varepsilon_9 = T - l_2$, $m_9 = 1$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 9}^1 = 1 + 2l_1 - l_2 - r$, $\beta_{\gamma_1 9}^1 = (1)^t$
- $l = 10$: $\varepsilon_{10} = T - l_2$, $m_{10} = 1$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 10}^1 = 1 + 2l_1 - l_2 + r$, $\beta_{\gamma_1 10}^1 = (1)^t$
- $l = 11$: $\varepsilon_{11} = T - l_2$, $m_{11} = 1$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 11}^1 = 1 + 2l_1 - l_2 - r$, $\beta_{\gamma_2 11}^1 = (1)^t$
- $l = 12$: $\varepsilon_{12} = T - l_2$, $m_{12} = 1$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 12}^1 = 1 + 2l_1 - l_2 + r$, $\beta_{\gamma_2 12}^1 = (1)^t$
- $l = 13$: $\varepsilon_{13} = T - l_2$, $m_{13} = 2$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 13}^1 = 1 + l_2 - r$, $\beta_{\gamma_1 13}^1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 13}^1 = 1 + l_1 + r$, $\beta_{\gamma_2 13}^1 = (1, 0)^t$
- $l = 14$: $\varepsilon_{14} = T - l_2$, $m_{14} = 2$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 14}^1 = 1 + l_2 + r$, $\beta_{\gamma_1 14}^1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 14}^1 = 1 + l_1 - r$, $\beta_{\gamma_2 14}^1 = (1, 0)^t$
- $l = 15$: $\varepsilon_{15} = T - l_2$, $m_{15} = 3$
 γ_1 : $\tau_{\gamma_1 15}^1 = 1 + l_1 - r$, $\beta_{\gamma_1 15}^1 = (1, 0, 0)^t$
 $\tau_{\gamma_1 15}^2 = 1 + l_1 + r$, $\beta_{\gamma_1 15}^1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$
 γ_2 : $\tau_{\gamma_2 15}^1 = 1 + l_2 - r$, $\beta_{\gamma_2 15}^1 = (0, 1, 0)^t$
 $\tau_{\gamma_2 15}^2 = 1 + l_2 + r$, $\beta_{\gamma_2 15}^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$

Граничная алгебра. • Элементы алгебр в левой и правой частях вложения (6) суть непрерывные матрично-значные функции от соответствующих параметров $r = r_l \in [0, \varepsilon_l]$. Важно, что различие этих алгебр состоит *только* в поведении этих функций на концах сегментов $[0, \varepsilon_l]$.

Именно, концевые значения элементов алгебры $\bigoplus_{j=1}^3 \bigoplus_{k=1}^{q_j} C([0, \varepsilon_{\Phi^j}], \mathfrak{F}_{\Phi^j}^k)$, отвечающих *разным* (с разными j, k) блокам, независимы и произвольны, в то время как такие значения элементов из $U\mathfrak{C}U^{-1}$, вообще говоря, как-то связаны между собой. Дать полное описание этих связей и означает охарактеризовать алгебру $U\mathfrak{C}U^{-1}$. Вводимая ниже граничная алгебра используется в характеристизации.

- Для каждого $P_{\gamma l}^k$ определим проекторы:

$$\mathcal{P}_{\gamma l}^k := \begin{pmatrix} O_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_{\gamma l}^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & O_L \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathfrak{P}_l & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathfrak{P}_L \end{pmatrix} = \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l,$$

где O_i - нулевые матрицы соответствующей размерности.

Для элементов $e \in U\mathfrak{E}U^{-1}$ и наборов $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_L\}$, $r_l \in [0, \varepsilon_l]$ введем обозначение:

$$e(\mathbf{r}) := \sum_{l=1}^L e_l(r_l) \in \bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l.$$

Определим *границную алгебру*

$$\partial(U\mathfrak{E}U^{-1}) := \left\{ e(\mathbf{0}) \oplus e(\boldsymbol{\varepsilon}) \mid e \in U\mathfrak{E}U^{-1} \right\} \subset \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right], \quad (7)$$

где $\mathbf{0} = \{0, \dots, 0\}$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L\}$. Ее блоками будем называть матричные алгебры $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r$:

$$\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r := \{e_l(r) \mid e \in U\mathfrak{E}U^{-1}\}.$$

Введем обозначение для алгебры в правой части (7):

$$\mathfrak{P}^\partial := \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right] \oplus \left[\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l \right].$$

Она состоит из $2L$ неприводимых блоков и имеет представление $\mathfrak{P}^\partial = \vee \mathbb{P}^\partial$, в котором

$$\mathbb{P}^\partial := \{ \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}; l = 1, \dots, L; \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \} \cup \{ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}; l = 1, \dots, L; \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \},$$

где $\mathcal{P}_{\gamma l}^k$ суть проекторы, определенные выше, а O - нулевой элемент

алгебры $\bigoplus_{l=1}^L \mathfrak{P}_l$. Обозначив

$$\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l}^k \oplus O, & r = 0 \\ O \oplus \mathcal{P}_{\gamma l}^k, & r = \varepsilon_l \end{cases},$$

имеем:

$$\mathbb{P}^\partial = \{\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}, l = 1, \dots, L, r = 0, \varepsilon l; \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}\}.$$

Введем также поднаборы в \mathbb{P}^∂ , состоящие из образующих отдельных неприводимых блоков:

$$\mathbb{P}_l^r := \{\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr} \mid k = 1, \dots, n_{\gamma l}; \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}\}.$$

Определим отображение $\mathcal{T} : \mathbb{P}^\partial \rightarrow \mathbb{P}^\partial$ по правилу:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l}) := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma l'}^{k' r_{l'}}, & \text{если существуют } \tau_{\gamma l'}^{k'} \text{ и } r_{l'} \\ & \text{такие, что } \tau_{\gamma l'}^{k'}(r_{l'}) = \tau_{\gamma l}^k(r_l); \\ \mathcal{P}_{\gamma l}^{kr_l} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя конкретный вид функций $\tau_{\gamma l}^k$, нетрудно проверить, что отображение \mathcal{T} определено корректно (является однозначным).

• Будем говорить, что алгебра $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})$ *разделяет* блоки $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r$ и $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_{l'}^{r'}$, если для каждого элемента $e \in U\mathfrak{E}U^{-1}$ такого, что

$$(e)_l(r) = e_l^r \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r, \quad (e)_{l'}(r') = e_{l'}^{r'} \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_{l'}^{r'}$$

найдутся такие элементы $\tilde{e}, \tilde{\tilde{e}} \in U\mathfrak{E}U^{-1}$, что

$$(\tilde{e})_l(r) = e_l^r \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r, \quad (\tilde{e})_{l'}(r') = 0 \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_{l'}^{r'},$$

$$(\tilde{\tilde{e}})_l(r) = 0 \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_l^r, \quad (\tilde{\tilde{e}})_{l'}(r') = e_{l'}^{r'} \in \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_{l'}^{r'}.$$

В противном случае будем говорить, что алгебра *связывает* соответствующие блоки.

Введем новую нумерацию проекторов в наборах \mathbb{P}_l^r :

$$\mathcal{P}^i := \begin{cases} \mathcal{P}_{\gamma_1 l}^{ir}, & i = 1, \dots, n_{\gamma_1}; \\ \mathcal{P}_{\gamma_2 l}^{(i-n_{\gamma_1})r}, & i = n_{\gamma_1} + 1, \dots, n_{\gamma_1} + n_{\gamma_2}; \end{cases};$$

$$\mathbb{P}_l^r = \{\mathcal{P}^i \mid i = 1, \dots, n_l, n_l := n_{\gamma_1 l} + n_{\gamma_2 l}\}.$$

Сопоставим этим наборам матрицы:

$$G(\mathbb{P}_l^r) := \{\|\mathcal{P}^i \mathcal{P}^j\|\}_{i,j=1}^{n_l} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{P}^1 \mathcal{P}^1\| & \dots & \|\mathcal{P}^1 \mathcal{P}^{n_l}\| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\mathcal{P}^{n_l} \mathcal{P}^1\| & \dots & \|\mathcal{P}^{n_l} \mathcal{P}^{n_l}\| \end{pmatrix}$$

и $G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_i^r)) = \{\|\mathcal{T}(\mathcal{P}^i)\mathcal{T}(\mathcal{P}^j)\|\}_{i,j=1}^{n_i}$. В силу очевидных равенств $\|\mathcal{P}^i\mathcal{P}^j\| = |\langle\beta^i, \beta^j\rangle|^2$, имеем:

$$G(\mathbb{P}_i^r) = \begin{pmatrix} |\langle\beta^1, \beta^1\rangle|^2 & \dots & |\langle\beta^1, \beta^{n_i}\rangle|^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\langle\beta^{n_i}, \beta^1\rangle|^2 & \dots & |\langle\beta^{n_i}, \beta^{n_i}\rangle|^2 \end{pmatrix}.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 1. Алгебра $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})$ связывает блоки $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_i^r$ и $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_{i'}^{r'}$, в том и только в том случае, если

$$\mathcal{T}(\mathbb{P}_i^r) = \mathbb{P}_{i'}^{r'} \quad \text{и} \quad G(\mathbb{P}_i^r) = G(\mathcal{T}(\mathbb{P}_i^r)).$$

При выполнении этих условий справедливы соотношения

$$\mathfrak{P}_i^r \cong \mathfrak{P}_{i'}^{r'} \cong \mathbb{M}^{m_i} = \mathbb{M}^{m_{i'}},$$

а для алгебры $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})$ справедливо представление:

$$\partial(U\mathfrak{E}U^{-1}) = \partial(U\mathfrak{E}U^{-1})[l, r, l', r'] \oplus \mathfrak{W}, \quad (8)$$

где

$$\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})[l, r, l', r'] = \vee\{\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbb{P}_i^r\} \subset \mathfrak{P}_i^r \oplus \mathfrak{P}_{i'}^{r'},$$

а \mathfrak{W} - оставшиеся блоки граничной алгебры. При этом граничная алгебра разделяет блоки (слагаемые) в представлении (8).

Тем самым, граничная алгебра разбивается две части. Первая состоит из пар связанных друг с другом блоков, вторая - из блоков, каждый из которых не связан ни с одним другим. Существенно, что отображение \mathcal{T} , связывающее слагаемые в суммах $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}\mathcal{P}$, продолжается до изометрии алгебр $\mathcal{I} : \mathfrak{P}_i^r \rightarrow \mathfrak{P}_{i'}^{r'}$.

- Определим элементы

$$\mathcal{Q}^i := \begin{cases} \mathcal{P}^i + \mathcal{T}(\mathcal{P}^i), & \text{если } \mathcal{T}(\mathcal{P}^i) \in \mathbb{P}_i^r, \mathcal{T}(\mathcal{P}^i) \neq \mathcal{P}^i, \\ \mathcal{P}^i, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(в [4] они обозначены через \tilde{Q}_k^i). В [4] установлено следующее:

Теорема 2. Пусть $\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_i^r$ - блок граничной алгебры, не связанный ни с одним другим. Тогда справедливо равенство:

$$\partial(U\mathfrak{E}U^{-1})_i^r = \vee\{\mathcal{Q}^i \mid i = 1, \dots, n_i\}.$$

Используем теоремы 1 и 2 для описания строения граничной алгебры. В ней, как легко видеть, связанными могут быть блоки только одинаковой размерности. Опишем детально отображение \mathcal{T} (отдельно для вершин γ_1 и γ_2); упрощая запись, мы опускаем индексы γ_1 и γ_2 :

- $m_l = 1, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12$:

γ_1 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_1^{1,0}$	$\mathcal{P}_1^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_3^{1,0}$	$\mathcal{P}_3^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_4^{1,0}$	$\mathcal{P}_4^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_9^{1,0}$	$\mathcal{P}_9^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{10}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{10}^{1,\varepsilon}$
	\downarrow										
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_1^{1,0} *$	$\mathcal{P}_9^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_4^{1,0}$	$\mathcal{P}_{10}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_3^{1,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_{10}^{1,0}$	$\mathcal{P}_1^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_9^{1,0}$	$\mathcal{P}_3^{1,\varepsilon}$
γ_2 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_2^{1,0}$	$\mathcal{P}_2^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_5^{1,0}$	$\mathcal{P}_5^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_6^{1,0}$	$\mathcal{P}_6^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{11}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{11}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{12}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{12}^{1,\varepsilon}$
	\downarrow										
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_2^{1,0} *$	$\mathcal{P}_{11}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_6^{1,0}$	$\mathcal{P}_{12}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_5^{1,0}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_{12}^{1,0}$	$\mathcal{P}_2^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{11}^{1,0}$	$\mathcal{P}_5^{1,\varepsilon}$

- $m_l = 2, l = 7, 8, 13, 14$:

γ_1 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_7^{1,0}$	$\mathcal{P}_7^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_8^{1,0}$	$\mathcal{P}_8^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,\varepsilon}$
	\downarrow								
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_8^{1,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{2,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_7^{1,0}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,\varepsilon} *$
γ_2 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_7^{1,0}$	$\mathcal{P}_7^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_8^{1,0}$	$\mathcal{P}_8^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,\varepsilon}$
	\downarrow								
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_8^{1,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_7^{1,0}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{14}^{1,0}$	$\mathcal{P}_8^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{13}^{1,0}$	$\mathcal{P}_6^{1,\varepsilon} *$

- $m_l = 3, l = 15$:

γ_1 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_{15}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{2,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{15}^{2,\varepsilon}$
	\downarrow				
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_{15}^{2,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,0}$	$\mathcal{P}_4^{1,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_7^{1,\varepsilon} *$
γ_1 :	\mathcal{P}	$\mathcal{P}_{15}^{1,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{2,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,\varepsilon}$	$\mathcal{P}_{15}^{2,\varepsilon}$
	\downarrow				
	$\mathcal{T}(\mathcal{P})$	$\mathcal{P}_{15}^{2,0}$	$\mathcal{P}_{15}^{1,0}$	$\mathcal{P}_7^{1,\varepsilon} *$	$\mathcal{P}_{15}^{2,\varepsilon} *$

Обозначение

$$\mathfrak{P}_l^r \leftrightarrow \mathfrak{P}_{l'}^{r'}$$

указывает, что левый и правый блоки связаны. Приведем список пар связанных блоков и отвечающих им матриц $G(\mathbb{P})$:

- $m_l = 1$:

$$\mathfrak{P}_1^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_9^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_1^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_1^\varepsilon)) = (1)$$

$$\mathfrak{P}_2^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_{11}^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_2^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_2^\varepsilon)) = (1)$$

$$\mathfrak{P}_3^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_4^0, G(\mathfrak{P}_3^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_3^0)) = (1)$$

$$\mathfrak{P}_3^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_{10}^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_3^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_3^\varepsilon)) = (1)$$

$$\mathfrak{P}_4^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_3^0, G(\mathfrak{P}_4^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_3^0)) = (1)$$

$$\mathfrak{P}_5^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_6^0, G(\mathfrak{P}_5^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_5^0)) = (1)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_5^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{12}^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_5^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_5^\varepsilon)) = (1) \\
\mathfrak{P}_6^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_5^0, G(\mathfrak{P}_5^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_5^0)) = (1) \\
\mathfrak{P}_9^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{10}^0, G(\mathfrak{P}_9^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_9^0)) = (1) \\
\mathfrak{P}_9^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_1^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_9^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_9^\varepsilon)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{10}^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_9^0, G(\mathfrak{P}_{10}^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{10}^0)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{10}^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_3^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_{10}^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{10}^\varepsilon)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{11}^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{12}^0, G(\mathfrak{P}_{11}^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{11}^0)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{11}^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_2^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_{11}^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{11}^\varepsilon)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{12}^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{11}^0, G(\mathfrak{P}_{12}^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{12}^0)) = (1) \\
\mathfrak{P}_{12}^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_5^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_{12}^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{12}^\varepsilon)) = (1)
\end{aligned}$$

• $m_l = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_7^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_8^0, G(\mathfrak{P}_7^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_7^0)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{P}_8^\varepsilon &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{13}^\varepsilon, G(\mathfrak{P}_8^\varepsilon) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_8^\varepsilon)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{P}_{13}^0 &\leftrightarrow \mathfrak{P}_{14}^0, G(\mathfrak{P}_{13}^0) = G(\mathcal{T}(\mathfrak{P}_{13}^0)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Связи между отдельными блоками можно наглядно проиллюстрировать следующим образом:

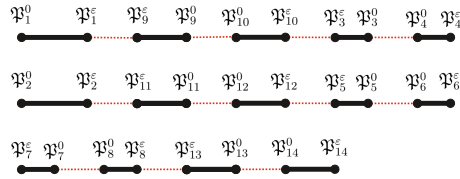


Рис. 6. Связи в граничной алгебре.

Тем самым возникают последовательности связки, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:

- $\mathfrak{P}_1^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_9^\varepsilon, \mathfrak{P}_9^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_{10}^0, \mathfrak{P}_{10}^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_3^\varepsilon, \mathfrak{P}_3^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_4^0$
- $\mathfrak{P}_2^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_{11}^\varepsilon, \mathfrak{P}_{11}^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_{12}^0, \mathfrak{P}_{12}^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_5^\varepsilon, \mathfrak{P}_5^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_6^0$

$$\bullet \mathfrak{P}_7^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_8^0, \mathfrak{P}_8^\varepsilon \leftrightarrow \mathfrak{P}_{13}^\varepsilon, \mathfrak{P}_{13}^0 \leftrightarrow \mathfrak{P}_{14}^0$$

Оставшиеся блоки, в соответствии с теоремой 2, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1^0 &= \vee\{(1)\} = \mathbb{M}^1, \\ \mathfrak{P}_4^\varepsilon &= \vee\{(1)\} = \mathbb{M}^1, \\ \mathfrak{P}_2^0 &= \vee\{(1)\} = \mathbb{M}^1, \\ \mathfrak{P}_6^\varepsilon &= \vee\{(1)\} = \mathbb{M}^1, \\ \mathfrak{P}_7^\varepsilon &= \vee\left\{\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right\} = \mathbb{M}^2, \\ \mathfrak{P}_{14}^\varepsilon &= \vee\left\{\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right\} = \mathbb{M}^2, \\ \mathfrak{P}_{15}^\varepsilon &= \vee\left\{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)\right\} \\ &= \mathbb{M}^3, \\ \mathfrak{P}_{15}^0 &= \vee\left\{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)\right\} \cong \mathbb{M}^1 \oplus \mathbb{M}^2. \end{aligned}$$

Каноническое представление. Приводимая ниже операция соединения блоков придает представлению алгебры эйконалов его завершающую (каноническую - см. [4]) форму. В общей ситуации соединение описывается следующей леммой.

Лемма 1. Пусть алгебры \mathfrak{A} и \mathfrak{B} определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left\{ f_1 \oplus f_2 \in C([0, \epsilon_1], \mathfrak{P}_1) \oplus C([0, \epsilon_2], \mathfrak{P}_2) \left| \begin{array}{l} f_1(0) \in \mathfrak{P}_1^0 \subseteq \mathfrak{P}_1 \\ f_2(\epsilon) \in \mathfrak{P}_2^\varepsilon \subseteq \mathfrak{P}_2, \\ f_1(\epsilon) = \mathcal{I}f_2(0) \end{array} \right. \right\}, \\ \mathfrak{B} &= \left\{ f \in C([0, \epsilon_1 + \epsilon_2], \mathfrak{P}_1) \left| \begin{array}{l} f(0) \in \mathfrak{P}_1^0 \subseteq \mathfrak{P}_1 \\ f(\epsilon) \in \mathcal{I}\mathfrak{P}_2^\varepsilon \subseteq \mathcal{I}\mathfrak{P}_2 \end{array} \right. \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{I} : \mathfrak{P}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_1$ - изометрия, а также

$$\mathfrak{A} = \vee\{f_1^i \oplus f_2^i \mid i = 1, \dots, N\}.$$

Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, причем образующие \mathfrak{B} имеют вид:

$$f^i := \begin{cases} f_1^i(r), & r \in [0, \epsilon_1] \\ \mathcal{I}f_2^i(r - \epsilon_1), & r \in [\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2] \end{cases}.$$

Используя лемму 1 в случае трех последовательностей блоков граничных алгебр, приходим к существованию изометрии \mathbf{U} , определяемой равенствами:

- $\mathbf{U}\mathfrak{E} = C([0, l_1 + l_2 - T]) \oplus C([0, l_1 + l_2 - T]) \oplus C([0, l_2 - l_1], \mathbb{M}^2) \oplus \oplus \{f \in C([0, T - l_2], \mathbb{M}^3) \mid f(0) \in \mathbb{M}^1 \oplus \mathbb{M}^2\}$
- $\mathbf{U}E_{\gamma_1}^T = \oplus \sum_{l=1}^4 E_{\gamma_1 l}^T = \oplus \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^{n_{\gamma_1 l}} \tau_{\gamma_1 l}^k(r) P_{\gamma_1 l}^k,$

$$E_{\gamma_1 1}^T(r_1) = 1 + r_1$$

$$E_{\gamma_1 2}^T(r_2) = 0$$

$$E_{\gamma_1 3}^T(r_3) = (1 + l_1 - l_2 + T + r_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E_{\gamma_1 4}^T(r_4) = (1 + l_1 - r_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + l_1 + r_4) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $\mathbf{U}E_{\gamma_2}^T = \oplus \sum_{l=1}^4 E_{\gamma_2 l}^T = \oplus \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^{n_{\gamma_2 l}} \tau_{\gamma_2 l}^k(r) P_{\gamma_2 l}^k,$

$$E_{\gamma_2 1}^T(r_1) = 0$$

$$E_{\gamma_2 2}^T(r_2) = 1 + r_2$$

$$E_{\gamma_2 3}^T(r_3) = (1 + 2l_2 - T - r_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\gamma_2 4}^T(r_4) = (1 + l_2 - r_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ (1 + l_2 + r_4) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{4\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Структура $E_{\gamma_{14}}^T$ и $E_{\gamma_{24}}^T$ определяется из условия $f(0) \in \mathbb{M}^1 \oplus \mathbb{M}^2$. Действительно, можно заметить, что

$$f(0) \in \vee \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{M}^1 \oplus \mathbb{M}^2.$$

Полученное представление для алгебры эйконалов будем называть каноническим.

§4. СПЕКТР И КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

• Напомним, что спектром C^* -алгебры \mathfrak{A} называется множество $\widehat{\mathfrak{A}}$ классов эквивалентности ее неприводимых представлений. Класс эквивалентности (точку спектра), отвечающий представлению π , будем обозначать через $\hat{\pi}$. Спектр снабжен канонической топологией Джексона [5, 6].

Изометрия алгебр $u : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ определяет соответствие представлений

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \pi \rightarrow u_*\pi \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad (u_*\pi)(b) := \pi(u^{-1}(b)), \quad b \in \mathfrak{B},$$

которое продолжается до канонического гомеоморфизма спектров:

$$\widehat{\mathfrak{A}} \ni \hat{\pi} \rightarrow u_*\hat{\pi} \in \widehat{\mathfrak{B}}, \quad u_*\hat{\pi} := \{u_*\pi \mid \pi \in \hat{\pi}\}.$$

Справедливо утверждение:

Предложение 1. *Представления*

$$\pi_t : C([a, b], \mathbb{M}^n) \rightarrow \mathbb{M}^n, \quad \pi_t(\phi) := \phi(t)$$

неприводимы; их классы эквивалентности исчерпывают спектр алгебры $C([a, b], \mathbb{M}^n)$. Для любого неприводимого представления π алгебры $C([a, b], \mathbb{M}^n)$ существует единственная точка $t \in [a, b]$, такая, что $\pi \sim \pi_t$.

Воспользуемся этими свойствами и каноническим представлением для описания спектра алгебры эйконалов. Несложно заметить, что спектр состоит из 4 интервалов \mathcal{S}_i :

- $\mathcal{S}_1 = \{\hat{\pi}_r^1 \mid r \in [0, l_1 + l_2 - T]\} \simeq [0, l_1 + l_2 - T], \varepsilon_1 = l_1 + l_2 - T$
- $\mathcal{S}_2 = \{\hat{\pi}_r^2 \mid r \in [0, l_1 + l_2 - T]\} \simeq [0, l_1 + l_2 - T], \varepsilon_2 = l_1 + l_2 - T$
- $\mathcal{S}_3 = \{\hat{\pi}_r^3 \mid r \in [0, l_2 - l_1]\} \simeq [0, l_2 - l_1], \varepsilon_3 = l_2 - l_1$
- $\mathcal{S}_4 = \{\hat{\pi}_r^4 \mid r \in (0, T - l_2]\} \cup \{\hat{\pi}_{0,1}^4, \hat{\pi}_{0,2}^4\} \simeq (0, T - l_2] \cup \{\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2\}, \varepsilon_4 = T - l_2$

Здесь через $\{\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2\}$ обозначены две различные точки, соответствующие концу интервала, топологически неотделимые друг от друга. Эти точки отвечают двум представлениям, связанным с условием на границе интервала в соответствующем блоке канонического представления. Для каждого интервала справедливо представление:

$$\mathcal{S}_l = K_0^l \cup \text{int}\mathcal{S}_l \cup K_\varepsilon^l,$$

где $\text{int}\mathcal{S}_l$ - открытая часть соответствующего интервала, а K_0^l, K_ε^l - конечные множества, отвечающие концам интервалов. Введем обозначение:

$$\text{int}\mathfrak{E} := \bigcup_{l=1}^4 \text{int}\mathcal{S}_l.$$

- Покажем, что задание эйконалов и спектра определяет каноническое представление.

Рассмотрим внутреннюю часть спектра. Выделим отдельный открытый (в топологии Джекобсона) интервал $\text{int}\mathcal{S}_l$ и рассмотрим действие представителей точек данного интервала на эйконалы. Несложно заметить, что

$$\pi_r^l(E_\gamma^T) = \sum_{k=1}^{n_{\gamma l}} \tau_{\gamma l}^k(r) M P_{\gamma l}^k, \quad r \in (0, \varepsilon_l); \quad \gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}, \quad (9)$$

где M - некоторая изометрия соответствующего матричного блока, определяемая выбором конкретного представителя класса эквивалентности представлений.

Рассматривая всевозможные точки $\text{int}\mathcal{S}_l$ с учетом равенства (9), можно восстановить набор функций $\tau_{\gamma l}^k$ при $r \in (0, \varepsilon_l)$ для γ_1 и γ_2 и для фиксированного l . Эти функции продолжаются по непрерывности на замкнутые интервалы. Повторяя эти рассуждения для всех интервалов спектра, мы восстановим все функции $\tau_{\gamma l}^k$ исходного канонического представления. Отметим, что полученные функции восстанавливаются с точностью до единой смены параметризации $r \rightarrow \varepsilon_l - r$ в блоке.

Фиксацией одного конкретного представления π_r^l для некоторого $r \in (0, \varepsilon_l)$ в (9) восстанавливается полный набор одномерных проекторов с точностью до единого матричного преобразования.

Тем самым установлено, что спектр получившейся алгебры определяет найденное ранее каноническое представление с точностью до описанных выше элементарных преобразований.

§5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ГРАФ

Ранее было показано, что каждой точке $\hat{\pi}$ можно сопоставить набор чисел $t_\gamma^k(\hat{\pi})$ с помощью равенств:

$$\pi(E_\gamma^T) = \sum_k t_\gamma^k(\hat{\pi}) Q_\gamma^k, \quad \gamma = \gamma_1, \gamma_2,$$

где Q_γ^k - некоторые проекторы. Введем отношение на спектре $\hat{\mathcal{E}}$ по следующему правилу: будем говорить, что $\hat{\pi} \sim_0 \hat{\pi}'$, если хотя бы для одного γ и некоторых k и k' выполнено равенство $t_\gamma^k(\hat{\pi}) = t_\gamma^{k'}(\hat{\pi}')$. Это отношение продолжается по транзитивности до отношения эквивалентности \sim на спектре. Проведем факторизации спектра по этому отношению. Наглядно данный процесс представлен на рис. 7:

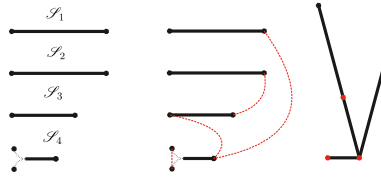


Рис. 7. Факторизация спектра

Красным цветом выделены точки, оказывающиеся классами эквивалентности из более, чем одного элемента. Как видно, факторизация превращает спектр в некоторый *граф* Ω' , который мы называем *спектральным*. Две его вершины, выделенные черным цветом, соответствуют граничным вершинам γ_1 и γ_2 исходного графа.

Таким образом, (факторизованный) спектр Ω' алгебры эйконолов метрического графа Ω сам является графом. В свете известных результатов [2,3] этот факт был вполне ожидаем. Однако, остается открытым вопрос, принципиальный для обратных задач: как связаны структуры Ω и Ω' ? В какой мере исходный граф Ω определяется графом Ω' ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. I. Belishev, N. Wada, *On revealing graph cycles via boundary measurements.* — Inverse Problems, **25**, No. 10, 105011 (2009), 1–25.
2. M. I. Belishev, N. Wada, *A C^* -algebra associated with dynamics on a graph of strings.* — J. Math. Soc. Japan, **67**, No. 3 (2015), pp. 1239–1274. doi: 10.2969/jmsj/06731239.

3. М. И. Белишев, А. В. Каплун, *Eikonal algebra on a graph of simple structure*. — Eurasian J. Math. Comp. Appl., **6**, No. 3 (2018), 4–33.
4. М. И. Белишев, А. В. Каплун, *Каноническое представление C^* -алгебры эйконолов метрического графа*. — ПОМИ ПРЕПРИНТ — 2 (2021).
5. Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления*. — М.: Наука, 1974.
J. Dixmier, *Les C^* -algebras et leurs representations*. — Gauthier-Villars Ed, Paris, 1969.
English translation: J. Dixmier, *newblock C^* -algebras*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.
6. Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*. — Москва, Факториал, 1997.
English translation: G.J.Murphy. *C^* -Algebras and Operator Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.

Каплун А. В. Canonical representation of eiconals algebra of three-ray star.

The paper considers a metric graph of the simplest structure, which is a three-ray star with edges of different lengths in pairs. For it, all steps of the procedure that reduces the eikonal algebra of the graph to the canonical form, are described in detail. Using this form, the spectrum of the algebra is equipped with a graph structure.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН,
192288, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27
E-mail: alex.v.kaplun@gmail.com

Поступило 18 ноября 2021 г.