

Е. А. Злобина

## ДИФРАКЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН НА КОНТУРЕ С ГЕЛЬДЕРОВСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ КРИВИЗНЫ. ПЕРЕХОДНАЯ ЗОНА

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая заметка продолжает исследования дифракции коротких волн на контурах с негладкой кривизной, которые были предприняты в работах [1–4] (где есть подробная библиография) с целью построения асимптотических формул для уходящего поля. Ниже рассматривается задача о падении цилиндрической волны на контур  $C$  с кривизной  $\varkappa$ , гладкой всюду за исключением точки  $O$ . Предполагается, что волна приходит в точку негладкости некасательно. В точке  $O$  кривизна имеет *гельдеровскую сингулярность*, т.е. особенность вида

$$\varkappa(s) = \varkappa_c + hs_+^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (1)$$

где  $s$  – длина дуги контура, отсчитываемая от точки негладкости  $O$  ( $s > 0$  справа от  $O$ , см. рис. 1),  $s_+^\lambda$  – стандартная функция “с плюсином” (см. [5]),

$$s_+^\lambda = \{s^\lambda, s > 0; 0, s \leq 0\}, \quad (2)$$

а  $\varkappa_c$  и  $h$  – константы. На знаки  $\varkappa_c$  и  $h$  не накладывается никаких ограничений, но  $h$  предполагается отличным от нуля. Мы работаем в рамках случая общего положения, т.е. предполагаем, что  $\varkappa_c \neq 0$ , а случай  $\varkappa_c = 0$  коротко обсуждаем в конце.

Впервые гельдеровская особенность кривизны была рассмотрена в [2], где на контур падала плоская волна, приходящая в точку негладкости  $O$  некасательно. В рамках метода пограничного слоя было построено выражение для дифрагированной волны. Также было получено описание волнового поля в *переходной зоне*, окружающей *предельный луч* (см. рис. 1), в терминах функции параболического цилиндра

---

*Ключевые слова:* дифракция коротких волн, негладкие препятствия, метод Кирхгофа.

Работа выполнена при поддержке гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

$D_{-3-\lambda}$ . Однако эта асимптотика была пригодна только на малых (по сравнению с радиусом кривизны контура) расстояниях от точки  $O$ .

Теперь исследование будет вестись в рамках метода Кирхгофа [6], который позволяет получать асимптотики, не ограничиваясь малыми расстояниями. В рассматриваемой задаче он приводит к описанию уходящего поля в переходной зоне на умеренных расстояниях через ту же функцию  $D_{-3-\lambda}$ , но от другого аргумента. На малых расстояниях аналитически прослеживается переход кирхгофовских выражений в упомянутые выше погранслоиные. Как и в предыдущих наших работах, много внимания уделяется геометрическим рассуждениям, позволяющим определить области применимости выведенных формул. В [4] были изучены аналогичные вопросы для контура со скачком кривизны, причем в этом случае поле на малых и на умеренных расстояниях характеризовалось не только разными переменными, но и разными спецфункциями.

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем декартову систему координат как показано на рис. 1: начало координат расположено в точке негладкости контура  $O$ , ось  $x$  касается контура. Пусть источник колебаний расположен в точке  $M_0 = (x_0, y_0)$ , и излучаемое им поле гармонически зависит от времени по закону  $e^{-i\omega t}$ . Точку наблюдения обозначим  $M_1 = (x_1, y_1)$ , расстояния от точки  $O$  до точек источника  $M_0$  и наблюдения  $M_1$  через  $r_{0,1}$ , а углы между прямой  $Ox$  и лучами  $OM_0$  и  $OM_1$  через  $\varphi_{0,1}$  (см. рис. 1).

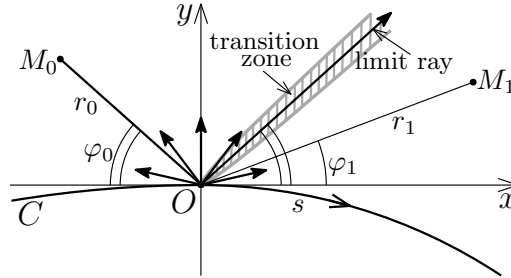


Рис. 1. Геометрия задачи.

Полное волновое поле  $u$  над контуром  $C$  описывается уравнением Гельмгольца

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2) u = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (3)$$

где волновое число  $k$  велико. Рассмотрения ведутся в коротковолновом приближении, т.е. точка источника  $M_0$  и точка наблюдения  $M_1$  лежат на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от точки негладкости  $O$ :

$$kr_0 \gg 1, \quad kr_1 \gg 1. \quad (4)$$

На контуре выполнено условие Дирихле

$$u|_C = 0, \quad (5)$$

а на бесконечности – условие излучения.

В соответствии с (3) поле  $u$  разбивается на падающую и уходящую волны,  $u = u^{\text{inc}} + u^{\text{out}}$ , причем падающая волна представляет собой фундаментальное решение  $G$  уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения:

$$u^{\text{inc}}(x, y) = G(x, y; x_0, y_0) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right). \quad (6)$$

Здесь  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода. Предполагается, что падающая волна приходит в точку  $O$  некасательно, т.е.  $\varphi_0 > 0$ .

Вне окрестности предельного луча, на котором  $\varphi_1 = \varphi_0$ , уходящее поле представляет собой сумму  $u^{\text{out}} = u^{\text{ref}} + u^{\text{dif}}$ , где  $u^{\text{ref}}$  – волны, геометрически отраженные от гладких частей контура, а  $u^{\text{dif}}$  – волна, дифрагированная точкой негладкости контура (см., например, [6]). Для  $u^{\text{ref}}$  лучевой метод (см., например, [7]) дает явное выражение, теряющее гладкость на предельном луче (см. раздел 5). Дифрагированная волна  $u^{\text{dif}}$  представляет собой цилиндрическую волну с диаграммой направленности, обращающейся в бесконечность на предельном луче (см. [2]).

### §3. ИНТЕГРАЛ КИРХГОФА ДЛЯ УХОДЯЩЕГО ПОЛЯ В ПЕРЕХОДНОЙ ЗОНЕ

Поле  $u^{\text{out}}$  в точке  $M_1$  выражается с помощью формулы Грина через значения на контуре:

$$u^{\text{out}}(x_1, y_1) = \int_C ds \left( G(X, Y; x_1, y_1) \partial_n u^{\text{out}}(X, Y) - u^{\text{out}}(X, Y) \partial_n G(X, Y; x_1, y_1) \right). \quad (7)$$

Здесь  $X = X(s)$  и  $Y = Y(s)$  – координаты переменной точки  $N(s)$  на контуре  $C$ ,  $\partial_n$  – производная по внутренней нормали к границе области. Согласно традиционному кирхгофовскому подходу [6], в случае условия Дирихле (5) принимается

$$u^{\text{out}}(X, Y) = -u^{\text{inc}}(X, Y), \quad \partial_n u^{\text{out}}(X, Y) = \partial_n u^{\text{inc}}(X, Y). \quad (8)$$

Нас интересует уходящее поле  $u^{\text{out}}$ , во-первых, в области, где

$$\varkappa_c r_1 \sim 1, \quad hr_1^{1+\lambda} \sim 1, \quad (9)$$

и, во-вторых, в области, где

$$\varkappa_c r_1 \ll 1, \quad hr_1^{1+\lambda} \ll 1, \quad (10)$$

но выполнено (4). Там мы будем изучать интеграл Кирхгофа (т.е. (7) с учетом (8)), используя стандартные приемы исследования интегралов от быстроосциллирующих функций (см., например, [8]).

**1.** Упростим подынтегральное выражение в интеграле Кирхгофа в рамках коротковолнового приближения (4).

Обозначим расстояние от произвольной точки контура  $N(s) = (X(s), Y(s))$  до точки источника  $M_0$  через  $l_0(s)$ , а до точки наблюдения  $M_1$  через  $l_1(s)$ :

$$l_{0,1}(s) := |N(s)M_{0,1}| = \sqrt{(X(s) - x_{0,1})^2 + (Y(s) - y_{0,1})^2}. \quad (11)$$

Отметим, что  $r_{0,1} = l_{0,1}(0)$ .

С помощью асимптотики функции Ханкеля (см. [9])

$$H_0^{(1)}(R) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} e^{iR - i\frac{\pi}{4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right), \quad R \gg 1, \quad (12)$$

подынтегральная функция в (7) переписывается в виде

$$-\frac{\partial_n l_0(s) + \partial_n l_1(s)}{8\pi\sqrt{l_0(s)l_1(s)}} e^{ik\tau(s)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kl_0(s)}\right) + O\left(\frac{1}{kl_1(s)}\right) \right). \quad (13)$$

Здесь  $\tau(s)$  – длина ломаной  $M_0N(s)M_1$ :

$$\tau(s) = l_1(s) + l_0(s). \quad (14)$$

**2.** Основной вклад в интеграл Кирхгофа для точки наблюдения  $M_1$ , лежащей в переходной зоне, вносит малая окрестность точки  $O$ . Разложим  $l_{0,1}(s)$  (см. (11)) при малых  $s$ :

$$l_{0,1}(s) = r_{0,1} \pm s \cos \varphi_{0,1} + \frac{s^2}{2} \left( \varkappa_c \sin \varphi_{0,1} + \frac{\sin^2 \varphi_{0,1}}{r_{0,1}} \right) + h \frac{s_+^{2+\lambda} \sin \varphi_{0,1}}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + O\left(\frac{s^3}{r_{0,1}^2} (1 + \varkappa_c^2 r_{0,1}^2)\right). \quad (15)$$

Знак “плюс” перед линейным по  $s$  членом соответствует индексу 0, а знак “минус” – индексу 1. Обозначения  $r_{0,1}$  и  $\varphi_{0,1}$  введены на рис. 1. Длина ломаной (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \tau(s) &= r_0 + r_1 + s(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \\ &+ \frac{s^2}{2} \left( \varkappa_c (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1) + \frac{\sin^2 \varphi_0}{r_0} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{r_1} \right) \\ &+ h \frac{s_+^{2+\lambda} (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1)}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + O\left(s^3 \left( \varkappa_c^2 + \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} \right)\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (11) нетрудно получить, что  $\partial_n l_{0,1}(0) = -\sin \varphi_{0,1}$ . Подынтегральная функция (13) при малых  $s$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1}{8\pi\sqrt{r_0 r_1}} \exp(ik\tau(s)) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kr_0} + \frac{1}{kr_1}\right) \right. \\ \left. + O\left(s \left( \varkappa_c + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

**3.** Для точки наблюдения  $M_1$  из переходной зоны  $\varphi_1 \approx \varphi_0$  (см. рис. 1). Тогда выражение (16) легко переписывается в виде

$$\tau(s) = r_0 + r_1 + s \sin \varphi_0 \delta\varphi + \frac{s^2}{2\rho} J \sin^2 \varphi_0 + h \frac{2s_+^{2+\lambda} \sin \varphi_0}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + \epsilon(s), \quad (18)$$

где  $\epsilon(s) = O(s(\delta\varphi)^2) + O(s^2\delta\varphi J/\rho) + O(hs^{2+\lambda}\delta\varphi) + O(s^3J^2/\rho^2)$ . Здесь введены важные для дальнейшего изложения обозначения

$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0, \quad \rho = \frac{r_0 r_1}{r_0 + r_1}, \quad J = 1 + \frac{2\mathfrak{a}_c \rho}{\sin \varphi_0}. \quad (19)$$

Выражение  $\rho$ , являющееся аналогом расстояния до точки негладкости в задачах дифракции плоских волн, часто встречается при описании полей в областях слияния двух цилиндрических волн (см., например, [4]). Ясно, что  $\rho \leq r_1$ , поэтому в интересующей нас области

$$\mathfrak{a}_c \rho \sim 1, \quad h\rho^{1+\lambda} \sim 1, \quad (20)$$

или

$$\mathfrak{a}_c \rho \ll 1, \quad h\rho^{1+\lambda} \ll 1. \quad (21)$$

Условие (4), очевидно, в терминах  $\rho$  принимает вид

$$k\rho \gg 1. \quad (22)$$

Величина  $J$  (см. (19)) связана с геометрическим расхождением  $\mathcal{J}$  цилиндрической волны, отраженной от дуги окружности с радиусом  $\mathfrak{a}_c^{-1}$  (см. [7]):

$$\mathcal{J} = r_0 + r_1 + \frac{2\mathfrak{a}_c r_0 r_1}{\sin \varphi_0} = (r_0 + r_1)J. \quad (23)$$

Дальнейшие наши рассуждения предполагают, что  $J$  порядка единицы. В случае выпуклого контура, для которого  $\mathfrak{a}_c > 0$ , это условие, очевидно, выполнено как на малых (21), так и на умеренных (20) расстояниях от точки  $O$  (напомним, что  $\sin \varphi_0 > 0$ ). Если же  $\mathfrak{a}_c < 0$ , то  $J$  обращается в нуль при  $\rho = -\sin \varphi_0 / 2\mathfrak{a}_c$ , что соответствует каустике. В таком случае мы ограничимся рассмотрением области, где  $\rho + \sin \varphi_0 / 2\mathfrak{a}_c > 0$  и  $J \sim 1$ .

4. В интеграле Кирхгофа (7) перейдем к переменной

$$p = s \sqrt{\frac{k}{\rho}} \sin \varphi_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (24)$$

Фаза подынтегральной функции  $ik\tau$  принимает вид

$$\begin{aligned} ik\tau = ik(r_0 + r_1) - \left( \xi p + J \frac{p^2}{2} \right) - \frac{2h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{\lambda\pi}{4}} p_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)k^{\frac{\lambda}{2}} (\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + \\ + O \left( \left( \xi p + p^2 + \frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda} \right) \delta\varphi \right) + O \left( \frac{p^3}{\sqrt{k\rho}} \right), \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\xi = \sqrt{k\rho} \delta\varphi e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (26)$$

Из (25) видно, что линейное по  $h$  слагаемое мало при условии

$$h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}} \ll k^{\frac{\lambda}{2}}. \quad (27)$$

Поскольку  $k\rho \gg 1$  и  $\lambda > 0$ , это неравенство выполнено как для малых (21), так и при умеренных (20) значениях  $\rho$ .

Учитывая (17), (24) и (25) и перенося из фазы в амплитуду малые члены, получаем выражение для уходящего поля вблизи предельного луча

$$u^{\text{out}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1)+i\frac{\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{k(r_0+r_1)}} \left( I_0 - \frac{2h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(2+\lambda)(1+\lambda)k^{\frac{\lambda}{2}}(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} I_\lambda \right), \quad (28)$$

где

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)), \quad (29)$$

$$I_\lambda = \int_0^{\infty} dp p^{2+\lambda} e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} \left( 1 + \epsilon(p) + O\left(\frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda}\right) \right), \quad (30)$$

причем  $\epsilon(p) = O(1/k\rho) + O((1+\xi p + p^2)\delta\varphi) + O(p^3/\sqrt{k\rho})$ . Ниже мы увидим, что слагаемое с  $I_0$  соответствует главному члену лучевой формулы для волны, отраженной от контура с кривизной  $\varkappa_c$ , а линейное по  $h$  слагаемое с  $I_\lambda$  описывает в главном порядке влияние сингулярности кривизны на волновое поле.

#### §4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

1. Рассмотрим сначала поле на умеренных расстояниях от контура (см. (20)).

Интеграл  $I_0$  в (28) легко берется:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)) = \sqrt{\frac{2\pi}{J}} e^{\frac{\xi^2}{2J}} (1 + \epsilon_0). \quad (31)$$

Здесь  $\varepsilon_0 = O(\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(1/\sqrt{k\rho})$ . Интеграл  $I_\lambda$  переписывается в виде

$$I_\lambda = \int_0^\infty dp p^{2+\lambda} e^{-\xi p - J \frac{p^2}{2}} \left( 1 + \varepsilon(p) + O\left(\frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda}\right) \right) \\ = \frac{\Gamma(3+\lambda)}{J^{\frac{3+\lambda}{2}}} e^{\frac{\xi^2}{4J}} D_{-3-\lambda}\left(\frac{\xi}{\sqrt{J}}\right) (1 + \varepsilon_\lambda), \quad (32)$$

где

$$D_\nu(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} dp p^{-\nu-1} e^{-tp - \frac{p^2}{2}}, \quad \nu < 0, \quad (33)$$

– функция параболического цилиндра (см. [9]), а  $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_0 + O(h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}/k^{\frac{\lambda}{2}})$ . Оценка погрешностей в (31) и (32) проведена тем же способом, что и в [1].

Подставляя (31) и (32) в формулу (28) для уходящего поля и учитывая выражение (26) для  $\xi$ , получим

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r_0+r_1) - i\frac{\zeta^2}{J} + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kJ(r_0+r_1)}} (1 + \varepsilon_0) \\ - h \frac{\Gamma(1+\lambda) e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}} J^{1+\frac{\lambda}{2}}} \frac{e^{ik(r_0+r_1) - i\frac{\zeta^2}{2J} + i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{kJ(r_0+r_1)}} D_{-3-\lambda}\left(\sqrt{\frac{2}{J}}\zeta e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) (1 + \varepsilon_\lambda). \quad (34)$$

Здесь введена величина

$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{k\rho}{2}} \delta\varphi, \quad (35)$$

характеризующая расстояние до предельного луча и часто фигурирующая в аргументах спецфункций, описывающих слияние цилиндрических волн (подробнее см. [4]). При удалении источника на бесконечность вдоль фиксированного направления,  $\zeta$  переходит в величину  $z = \sqrt{kr_1/2}(\varphi_1 - \varphi_0)$ , характерную для областей слияния плоской и цилиндрической волн (см. [6]).

Формула (34) существенно отличается от выражения для уходящего поля в переходной зоне, полученного для случая скачка кривизны в [4]



и упомянутых там предшествующих работах, где уходящее поле описывалось с помощью двух интегралов Френеля от разных аргументов. Линейное по  $h$  слагаемое в (34) описывает в главном порядке влияние гильдеровской сингулярности кривизны на волновое поле.

**2.** Исследуем выражение для волнового поля (34) при удалении от предельного луча. Подставляя в (34) асимптотику функции  $D_{-3-\lambda}$  при  $|\zeta| \gg 1$  (см. [9]) и выражение для  $\zeta$  (35), получим

$$u^{\text{out}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1)-i\frac{k\rho}{2J}(\delta\varphi)^2+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kJ}(r_0+r_1)} \left( 1 + \frac{2ikh(-\rho\delta\varphi)_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)J^{2+\lambda}(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} \right) - \frac{h\Gamma(1+\lambda)e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{2\pi(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}(-\delta\varphi)^{3+\lambda}} \frac{e^{ik(r_0+r_1)}}{k^{2+\lambda}\sqrt{r_0r_1}}. \quad (36)$$

Здесь  $(-\delta\varphi)^\lambda = |\delta\varphi|^\lambda$  для отрицательных значений  $\delta\varphi$ , а если  $\delta\varphi$  положительно, то  $(-\delta\varphi)^\lambda = (\delta\varphi)^\lambda e^{-i\lambda\pi}$ . Выражение в первой строке (36) соответствует геометрически отраженной волне: множитель перед скобкой описывает отражение от окружности с кривизной  $\varkappa_c$ , а линейный по  $h$  член отличен от нуля для отрицательных  $\delta\varphi$  (см. (2)) и учитывает степенное поведение кривизны справа от точки негладкости (см. (1)). Выражение во второй строке (36) описывает дифрагированную волну и согласуется с результатом [2], где рассматривалась плоская падающая волна.

Относительная погрешность в (36) имеет вид  $\hat{\varepsilon} = O(\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(1/(k\rho(\delta\varphi)^2))$  и мала при выполнении неравенств  $k\rho(\delta\varphi)^4 \ll 1$  и

$$k\rho(\delta\varphi)^2 \gg 1. \quad (37)$$

В разделе 5 показано, что выражение для отраженной волны в (36) согласуется с лучевой формулой (см. [7]) в области, где выполнены неравенства (37) и

$$kh(\rho|\delta\varphi|)^{2+\lambda} \ll 1, \quad (38)$$

из которого при условии (20) следует малость  $k\rho(\delta\varphi)^4$ . Неравенство (38) характеризует область пригодности асимптотики (34).

Интересно, что в случае дифракции на контуре со скачком кривизны условие (38) заменяется на условие

$$k\rho|\delta\varphi|^3 \ll 1, \quad (39)$$

не зависящее от кривизны контура. Нетрудно заметить, что на умеренных расстояниях (39) следует из (38), подробнее см. раздел 5.

**3.** Обратимся теперь к полю на малых расстояниях от контура, а именно в области, где по-прежнему выполнено неравенство (22), но справедливо и (21); а тогда  $J \approx 1$ , см. (19). Раскладывая фазу и амплитуду в (34) по степеням  $\varkappa_c \rho$  и удерживая в амплитуде линейные по кривизне члены, получим

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r_1+r_0)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k(r_1+r_0)}}(U_0 + U_1 + V_1). \quad (40)$$

Здесь

$$U_0 = e^{-i\zeta^2}(1 + \varepsilon_0), \quad U_1 = \frac{\varkappa_c \rho}{\sin \varphi_0} (2i\zeta^2 - 1) e^{-i\zeta^2}(1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1),$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1 + \lambda) e^{i\frac{\pi}{4}} h \rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda} k^{\frac{\lambda}{2}}} e^{-i\frac{\zeta^2}{2}} D_{-3-\lambda} \left( \sqrt{2}\zeta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1),$$

а погрешности равны  $\varepsilon_0 = O(\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(1/k\rho)$  и  $\varepsilon_1 = O(\varkappa_c \rho) + O(k\varkappa_c \rho^2(\delta\varphi)^2)$ . Разложение (40) допустимо в области, где выполнены неравенства (21), (22), и

$$k\varkappa_c \rho^2(\delta\varphi)^2 \ll 1. \quad (41)$$

Сравнивая спецфункции в (34) и (40), мы видим, что при приближении к контуру из аргумента  $\zeta/\sqrt{J}$ , соответствующего изогнутой границе, исчезает кривизна, и он переходит в аргумент  $\zeta$ , отвечающий плоской границе.

Выражение для линейного по  $h$  члена в (40) при удалении источника на бесконечность переходит в формулу, полученную в [2] методом погранслоя в случае падения плоской волны.

**4.** Выпишем асимптотику (40) при удалении от предельного луча, т.е. при выполнении условия (37):

$$u^{\text{out}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1)-i\frac{k\rho}{2}(\delta\varphi)^2+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k(r_0+r_1)}} \times \left( 1 + \frac{ik\varkappa_c(\rho\delta\varphi)^2}{\sin \varphi_0} + \frac{2ikh(-\rho\delta\varphi)_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \right) - \frac{h\Gamma(1+\lambda)e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{2\pi(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}(-\delta\varphi)^{3+\lambda}} \frac{e^{ik(r_0+r_1)}}{k^{2+\lambda}\sqrt{r_0r_1}}. \quad (42)$$

Здесь  $(-\delta\varphi)^\lambda = |\delta\varphi|^\lambda$  для отрицательных значений  $\delta\varphi$ , а если  $\delta\varphi$  положительно, то  $(-\delta\varphi)^\lambda = (\delta\varphi)^\lambda e^{-i\lambda\pi}$ . Ниже показано, что выражение

в первой строке (42) согласуется с лучевой формулой для отраженной волны при выполнении условий (21), (22), (38), (39) и (41).

### §5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ

Определим области применимости полученных выше выражений. Для этого, как и в [1, 2, 4], проанализируем классическую (см., например, [7]) лучевую формулу для отраженной волны  $u^{\text{ref}}$  в окрестности предельного луча.

В случае гладкой границы лучевой метод [7] дает для геометрически отраженной волны следующую формулу

$$u^{\text{ref}}(M_1) = \frac{e^{ik\tau^* + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k\mathcal{J}^*}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k\mathcal{J}^*}\right) \right), \quad \mathcal{J}^* = l_0^* + l_1^* + \frac{2\mathfrak{a}^* l_0^* l_1^*}{\cos \alpha^*}. \quad (43)$$

Здесь  $l_{0,1}^*$  – расстояния от точки источника  $M_0$  и от точки наблюдения  $M_1$  до точки геометрического отражения  $N^*$ ,  $\tau^* = l_0^* + l_1^*$  – значение эйконала в точке  $M_1$ ,  $\alpha^*$  – угол падения в точке  $N^*$ ,  $\mathfrak{a}^*$  – значение кривизны в точке  $N^*$ . Видно, что если кривизна контура имеет сингулярность в точке  $O$ , то главный член лучевой формулы теряет гладкость на предельном луче. Однако выражение (43) правильно описывает волны, отраженные от гладких частей контура справа и слева от  $O$ .

Упростим (43) для точек наблюдения  $M_1$ , лежащих вблизи предельного луча,  $|\delta\varphi| \ll 1$ . Ясно, что в этом случае длина дуги  $s^*$ , соответствующая точке отражения  $N^*$ , мала.

1. Обратимся сначала к умеренным расстояниям (20). Подобно тому, как это сделано в [2, 4], после некоторых выкладок получим выражение для  $s^*$ :

$$s^* = -\frac{\rho\delta\varphi}{J \sin \varphi_0} \left( 1 - \frac{2h\rho^{1+\lambda}(-\delta\varphi)_+^\lambda}{(1+\lambda)J^{1+\lambda}(\sin \varphi_0)^\lambda} + O(h^2\rho^{2+2\lambda}|\delta\varphi|^{2\lambda}) + O(\delta\varphi) \right). \quad (44)$$

Пользуясь (44) и формулой для длины ломаной  $M_0N(s)M_1$  (25), преобразуем фазу экспоненты в (43):

$$ik\tau^* = ik(r_1 + r_0) - ik\frac{\rho}{2J}(\delta\varphi)^2 + \frac{2ikh(-\rho\delta\varphi)_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)J(J \sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + O(k\rho(\delta\varphi)^3). \quad (45)$$

Аналогичным образом упрощается выражение для  $\mathcal{J}^*$ :

$$\mathcal{J}^* = J(r_0 + r_1) \left( 1 + \frac{2h\rho^{1+\lambda}(-\delta\varphi)_+^\lambda}{(J \sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + O(\delta\varphi) + O(h^2\rho^{2+2\lambda}|\delta\varphi|^{2\lambda}) \right). \quad (46)$$

Оставляя в фазе (45) экспоненты в (43) только квадратичные члены, получим

$$u^{\text{ref}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1) - i\frac{k\rho}{2}(\delta\varphi)^2 + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kJ(r_0+r_1)}} \times \left( 1 + h \frac{\rho^{1+\lambda}(-\delta\varphi)_+^\lambda}{(J \sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \left( \frac{2ik\rho(\delta\varphi)^2}{(2+\lambda)(1+\lambda)J} - 1 \right) \right). \quad (47)$$

Из (45) и (46) видно, что асимптотика (47) для лучевой формулы справедлива в области, где выполнены условия (38), (39) и  $h\rho^{1+\lambda}|\delta\varphi|^\lambda \ll 1$  (вытекающее из малости  $\delta\varphi$ ). Отметим, что на умеренных расстояниях  $kh\rho^{2+\lambda}|\delta\varphi|^{2+\lambda} \sim k\rho|\delta\varphi|^{2+\lambda}$  (см. (20)), и тогда неравенство (39) следует из (38). Однако на малых расстояниях (21) условия (38) и (39) независимы.

Формула (36) согласуется с (47) в области, где выполнены неравенства (37) и (38).

**2.** Пусть теперь точка наблюдения  $M_1$  близка к  $O$ , см. (21), но (22) все еще выполнено. В этой области формула (47) переписывается в виде

$$u^{\text{ref}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1) - i\frac{k\rho}{2}(\delta\varphi)^2 + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k(r_0+r_1)}} \times \left( 1 + \frac{\alpha_c \rho (ik\rho(\delta\varphi)^2 - 1)}{\sin \varphi_0} + \frac{h\rho^{1+\lambda}(-\delta\varphi)_+^\lambda}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \left( \frac{2ik\rho(\delta\varphi)^2}{(2+\lambda)(1+\lambda)} - 1 \right) \right), \quad (48)$$

причем предполагаются выполненными неравенства (38), (39) и (41) (из сделанных после (47) замечаний ясно, что на малых расстояниях (39) не следует ни из (38), ни из (41)). Если вдобавок выполнено условие (37), выражение в первой строке (42) согласуется с (48).

Интересно, что в случае отражения плоской волны от границы с негладкой кривизной области пригодности формул, аналогичных (48), описывались неравенствами типа (38), а выполнение (39) не требовалось (см. [1–3]).

## §6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Итак, исследуя задачу дифракции на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны и граничным условием Дирихле с помощью метода Кирхгофа, мы описали уходящее поле в переходной зоне как на малых, так и на умеренных расстояниях от контура. Нетрудно показать, что в случае граничного условия Неймана

$$\partial_n u|_C = 0 \quad (49)$$

выражения для уходящего поля отличаются только знаком.

Проведенный геометрический анализ позволил определить области применимости полученных асимптотических формул. Можно показать, что при уплощении контура в точке  $O$ , т.е. при  $\varkappa_c = 0$ , область пригодности выражения (34) не меняется. В отличие от случая скачка кривизны, в задаче с гельдеровской сингулярностью кривизны ширина переходной зоны зависит от амплитуды сингулярности кривизны контура, см. (38).

Использованные в работе приемы можно распространить на задачи дифракции на контурах с импедансным граничным условием и с кривизной, производная которой имеет скачок или гельдеровскую сингулярность [3]. По существу, асимптотика для поля в переходной зоне на умеренных расстояниях будет отличаться от формулы, полученной в [3] для малых расстояний, лишь заменой  $\zeta$  на  $\zeta/\sqrt{J}$ .

Отметим, что формулы для поля на малых расстояниях, построенные в [2] для случая дифракции некасательной плоской волны на гельдеровской сингулярности, допускали устремление  $\lambda$  к нулю: они переходили в соответствующие формулы для скачка кривизны. Однако полученная в настоящей работе асимптотика (34) для поля в переходной зоне не выдерживает предельного перехода  $\lambda \rightarrow 0$ . Это связано с тем, что при  $\lambda = 0$  условие (27) перестает быть справедливым на умеренных расстояниях, и выполненные нами преобразования интеграла Кирхгофа перестают быть правомерными.

Автор выражает благодарность А. П. Киселеву за помощь в подготовке статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. A. Zlobina, A. P. Kiselev, *Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature*. — *Wave Motion* **96** (2020), 102571.

2. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Дифракция коротких волн на контуре с гёльдеровской сингулярностью кривизны*. — Алгебра и Анализ **33**, No. 2 (2021), 35–55.
3. Е. А. Злобина, *Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Погранслойный подход*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 169–185.
4. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Кирхгофа и метод пограничного слоя*. — Радиотехника и Электроника, **67**, No. 2 (2022) (в печати).
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*. Том 1, ГИФМЛ, М., 1959.
6. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции*, Связь, М., 1978.
7. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972.
8. А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, ГИФМЛ, М., 1962.
9. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.

Zlobina E. A. Diffraction of short waves by a contour with Hölder singularity of curvature. Transition zone.

We consider the short-wave diffraction of a cylindrical wave by a contour whose curvature has a Hölder type discontinuity at a point. The incidence is non-tangent at the point of singularity. In the framework of the Kirchhoff method, we find an asymptotic description for the outgoing wavefield inside the transition zone at both small and moderate distances. Analysis of ray formulas allows us to characterize applicability areas of expressions obtained.

С.-Петербургский  
государственный университет,  
Университетская наб. 7/9,  
С.-Петербург 199034, Россия;  
С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки 27,  
С.-Петербург 191023, Россия  
E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступило 28 октября 2021 г.