

А. Ф. Вакуленко

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В \mathbb{R}^3

§0. ВВЕДЕНИЕ

Известным фактом, восходящим к классической работе А. Кальдерона [1], является полнота в $L_2(\Omega)$ произведений решений эллиптических уравнений. В [1] и в последующих работах она использована для решения обратных задач [4]. В случае уравнения Лапласа, полную систему образуют произведения fg с гармоническими f и g . В работе [2], также мотивированной потребностями обратных задач, показано, что полнота сохраняется, если один из сомножителей выбирается из некоторого *подпространства* $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ пространства гармонических функций $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)$. В нашей работе приводится следующее усиление этого результата.

Скажем, что заданная в \mathbb{R}^3 функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ является *осевой*, если она инвариантна относительно сдвигов вдоль оси z (имеет вид $\varphi(x, y)$) и *осесимметрической*, если она инвариантна относительно вращений вокруг оси z (имеет вид $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$).

Теорема 1. *Любой полином $P(x, y, z)$ допускает представление*

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^n f_k(x, y, z) g_k(x, y, z), \quad (1)$$

в котором $f_k, g_k \in \mathcal{H}$ суть гармонические полиномы, причем все g_k либо осевые, либо осесимметрические относительно оси z .

Определение осевых и осесимметрических функций очевидным образом обобщается на случай, когда вместо оси z выбирается произвольная прямая l в \mathbb{R}^3 . Поскольку гармоничность никак не связана с выбором осей и координат, представление (1) (с заменой оси z на l) сохраняет силу.

Ключевые слова: гармонические полиномы в \mathbb{R}^3 , осевые и осесимметрические полиномы, полнота произведений.

В силу плотности полиномов в $L_2(\Omega)$, из (1) следует полнота произведений $f_k g_k$ гармонических полиномов указанного вида. В [2] доказано утверждение, близкое к варианту (1) с осесимметрическими g_k . Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

- В двумерном случае полиномы допускают следующее представление.

Лемма 1. Пусть $P(x, y)$ – полином, тогда

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k(x, y) g_k(x, y) = \Delta Q(x, y),$$

где f_k и g_k суть гармонические полиномы, Q – полином, Δ – оператор Лапласа.

Доказательство. Представим полином в виде $P = \tilde{P}(\zeta, \bar{\zeta})$, где $\zeta = x + iy$ и $\bar{\zeta} = x - iy$. Составляющие \tilde{P} мономы $\zeta^k \bar{\zeta}^m$ суть произведения голоморфной и антиголоморфной функций. Вещественная и мнимая части каждой из таких функций являются гармоническими полиномами от x, y , что и ведет к (1).

Второе представление в (1) следует из равенств $\Delta = \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}}$ и

$$\zeta^k \bar{\zeta}^m = \frac{1}{(k+1)(m+1)} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} (\zeta^{k+1} \bar{\zeta}^{m+1}). \quad \square$$

Утверждение леммы очевидным образом переносится на полиномы в \mathbb{R}^3 , осевые относительно z и, в адекватной формулировке, обобщается на случай произвольной оси l .

- Следующее утверждение использовалось в [3].

Лемма 2. Пусть l_1, \dots, l_{n+1} суть попарно различные оси в \mathbb{R}^3 . Любой однородный гармонический полином P степени n представим в виде

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} P_k(x, y, z),$$

где каждый P_k есть гармонический полином, осевой относительно l_k .

Доказательство. Применим индукцию. При $n = 1$ утверждение верно. В самом деле, в этом случае $P = ax + by + cz = P_1 + P_2$, где

$P_1 = ax + by$ и $P_2 = z$ являются осевыми относительно z и x (или y) соответственно.

Дифференцируя полином P вдоль оси l_{n+1} получим однородный гармонический полином, степень которого равна $n - 1$. Для него, по индукционному предположению, имеем разложение

$$\partial_{l_{n+1}} P(x, y, z) = \sum_{k=1}^n W_k(x, y, z),$$

по гармоническим полиномам, осевым относительно l_1, \dots, l_n . Поскольку дифференцирования (как и интегрирования) вдоль разных осей перестановочны, каждый W_k есть производная вдоль оси l_{n+1} от некоторого гармонического полинома P_k , осевого относительно l_k . Поэтому имеем:

$$\partial_{l_{n+1}} \left[P(x, y, z) - \sum_{k=1}^n P_k(x, y, z) \right] = \partial_{l_{n+1}} P(x, y, z) - \sum_{k=1}^n W_k(x, y, z) = 0.$$

Следовательно, разность в квадратных скобках есть гармонический полином P_{n+1} , осевой относительно l_{n+1} , что равносильно утверждению леммы. \square

- Справедлив аналог этой леммы для произвольных (не обязательно гармонических) полиномов.

Лемма 3. *Однородный полином степени n представим в виде*

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} P_k(x, y, z),$$

где P_k суть полиномы, осевые относительно $n + 1$ произвольно выбранных попарно различных осей.

Доказательство. Используем индукцию. Пусть оси l_1, \dots, l_{n+1} выбраны. Пусть P – полином степени n ; тогда ΔP есть полином степени $n - 2$:

$$\Delta P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k(x, y, z)$$

с q_k , осевыми относительно l_1, \dots, l_{n-1} . В то же время $q_k = \Delta Q_k$, где Q_k тоже осевые. Следовательно, имеем:

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z) + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(x, y, z),$$

где Q – гармонический полином степени n . По лемме 1 имеем для него разложение по осевым гармоническим:

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k(x, y, z),$$

что дает требуемое разложение для P . \square

§2. ОСЕВЫЕ ПОЛИНОМЫ

Лемма 4. Пусть P – произвольный полином; тогда

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^N Q_k(x, y, z) q_k(x, y) \quad (2)$$

где q_k суть осевые гармонические полиномы с осью z , а Q_k – однородные осевые гармонические полиномы, оси которых могут быть выбраны в плоскости $\{z = 0\}$.

Доказательство. Используем индукцию по степени полинома P относительно z . Запишем P в виде

$$P(x, y, z) = z\tilde{P}(x, y, z) + p(x, y).$$

Для p по Лемме 1 имеем

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^N u_k(x, y) v_k(x, y),$$

где каждый сомножитель $u_k(x, y)$ можно переразложить по осевым гармоническим, выбрав оси в плоскости $\{z = 0\}$.

Для \tilde{P} используем представление (2). Вращением вокруг оси z любое слагаемое приводится к виду

$$Q(x, z)q(x, y) = (z^n + axz^{n-1} \dots)q(x, y).$$

Пусть L есть однородный гармонический полином вида

$$L(x, z) = z^{n+1} + \dots$$

Представление

$$zQ(x, z)q(x, y) = [zQ(x, z) - L(x, z)]q(x, y) + L(x, z)q(x, y)$$

приводит к нужному результату, поскольку в первом слагаемом степень z уменьшена, а второе уже имеет требуемый вид. \square

Тем самым, утверждение теоремы 1, касающееся осевых полиномов, доказано.

§3. ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

Лемма 5. Пусть P – произвольный полином. Справедливо представление

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^N Q_k(x, y, z) q_k(z, x^2 + y^2), \quad (3)$$

в котором Q_k и q_k суть гармонические полиномы.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда полином $P = P(z, x^2 + y^2)$ симметричен и однороден. Покажем, что его можно представить в виде

$$P(z, x^2 + y^2) = \sum_{k=0}^m q_k(z, x^2 + y^2) q_{n-k}(z, x^2 + y^2),$$

где каждый q_k есть осесимметрический однородный гармонический полином степени k , а суммирование проводится до $m = n/2$ или $m = (n - 1)/2$ в зависимости от четности n . Размерность пространства однородных полиномов равна числу слагаемых в сумме. Таким образом, достаточно проверить их линейную независимость. Пусть

$$0 = \sum_{k=0}^m b_k q_k(z, x^2 + y^2) q_{n-k}(z, x^2 + y^2);$$

Ограничение однородного гармонического осесимметрического полинома на единичную сферу это полином Лежандра от координаты z [5]. Заменяя $x^2 + y^2 \rightarrow 1 - z^2$,

$$\begin{array}{ccc} z & \rightarrow & z \\ 2z^2 - x^2 - y^2 & \rightarrow & 3z^2 - 1 \\ 2z^3 - 3z(x^2 + y^2) & \rightarrow & 5z^3 - 3z \\ \dots & \rightarrow & \dots \end{array}$$

получим равенство с полиномами Лежандра

$$0 = \sum_{k=0}^m b_k L_k(z) L_{n-k}(z) =: G(z)$$

Пусть n четно; тогда в силу ортогональности полиномов Лежандра,

$$0 = \int_{-1}^1 G(z) dz = b_m \int_{-1}^1 L_m(z) L_m(z) dz,$$

следовательно, $b_m = 0$. Далее, имеем равенства:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 z^2 G(z) dz = b_{m-1} \int_{-1}^1 [z^2 L_{m-1}(z)] L_{m+1}(z) dz = \\ &= b_{m-1} \int_{-1}^1 [z^{m+1} + \alpha z^m + \dots] L_{m+1}(z) dz = b_{m-1} \int_{-1}^1 z^{m+1} L_{m+1}(z) dz, \end{aligned}$$

справедливые поскольку $L_{m+1}(z)$ ортогонален всем z^k при $k < m+1$ и мы можем отбросить младшие члены. Последний интеграл заведомо отличен от нуля, так как, добавив к z^{m+1} соответствующие младшие члены, мы превратим его в $\int_{-1}^1 L_{m+1}^2(z) dz \neq 0$. Как следствие, заклю-

чаем, что $b_{m-1} = 0$. Рассматривая затем интегралы $\int_{-1}^1 z^{2k} G(z) z dz = 0$, установим обращение в ноль всех коэффициентов b_k .

Для нечетного n , используя равенства $\int_{-1}^1 G(z) z dz = 0$, $\int_{-1}^1 G(z) z^3 dz = 0, \dots$ по вполне аналогичной схеме, также приходим к $b_k = 0$.

Для однородного полинома $P(z, x^2 + y^2)(x + iy)^d$ имеет место разложение

$$P(z, x^2 + y^2)(x + iy)^d = \sum_{k=0}^m (x + iy)^d Q_k(z, x^2 + y^2) q_{n-k}(z, x^2 + y^2),$$

где суммирование проводится до $m = (n-d)/2$ или $m = (n-d-1)/2$, а Q_k есть однородный полином, такой что $(x + iy)^d Q_k$ гармоничен. Это условие определяет Q_k однозначно. Сравнение размерностей и проверка линейной независимости вполне аналогичны рассмотренному выше случаю $d = 0$.

Используя очевидные тождества

$$z^c \zeta^{k+d} \bar{\zeta}^k = z^c (x^2 + y^2)^k (x + iy)^d, \quad z^c \zeta^k \bar{\zeta}^{k+d} = z^c (x^2 + y^2)^k (x - iy)^d,$$

любой полином можно представить в виде суммы слагаемых вида $P(z, x^2 + y^2)(x + iy)^d$ или $P(z, x^2 + y^2)(x - iy)^d$, что ведет (3). \square

Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.P. Calderon, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, 1980, 65–73.
2. M. Yu. Kokurin, *On the Completeness of Products of Harmonic Functions and the Uniqueness of the Solution of the Inverse Acoustic Sounding Problem*. — Math. Notes **104**, No. 5 (2018), 689–695.
3. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об алгебре гармонических кватернионных полей в \mathbb{R}^3* . — Алгебра и анализ **31**, No. 1 (2019), 1–17.
4. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, N.Y., 2006.
5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1966.

Vakulenko A. F. On expansions over harmonic polynomial products in \mathbb{R}^3 .

In inverse problems, an important role is played by the following fact: the functions of the form

$$\sum_{k=1}^n f_k(x, y, z) g_k(x, y, z),$$

where f_k, g_k are the solutions of a second order elliptic equation in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, constitute a dense set in $L_2(\Omega)$.

This paper deals with the Laplace equation. We show that the density does hold if f_k and g_k are *harmonic polynomials*, whereas the factors g_k are invariant with respect to shifts or rotations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2021 г.