Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

М. И. Белишев, Н. А. Каразеева

ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ В BC-МЕТОДЕ ДЛЯ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

§1. Введение

• Метод граничного управления (BC-метод) это подход к обратным задачам, основанный на их связи с теорией граничного управления и теорией систем [2–6]. В статье рассматривается его локальный вариант. В нем зависящие от глубины параметры среды определяются по динамическим данным на части границы *в реальном времени*: большему времени наблюдения соответствует большая глубина восстановления параметров [2–5].

Численные алгоритмы, основанные на локальном варианте BC-метода, тестировались в [2,9–11,15,17,19–21,23]. Их дальнейшее развитие и возможное использование при работе с реальными данными является перспективной задачей.

В работах [4,13] локальный вариант использован для решения обратной задачи в полуплоскости. В [12] и [14] предложены простейшие тесты для апробации BC-алгоритмов.

• Содержательные обратные задачи нелинейны. Классический подход (И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, М. Г. Крейн, В. А. Марченко) сводит их к линейным задачам и уравнениям. BC-метод наследует это достижение. В нем, в частности, уравнения ГЛКМ связываются с (линейными) задачами граничного управления (см. [14]). Эта связь, во-первых, дает единый взгляд на классические уравнения и, во вторых, ведет к естественным многомерным обобщениям. В рамках BC-метода, решение важного класса динамических и спектральных обратных задач сводится к обращению *связывающего оператора* C^T динамической системы, соответствующей прямой задаче.

В силу последнего, численная реализация BC-алгоритмов в существенном сводится к обращению матрицы Грама $\hat{C}^T = \{(C^T f_i, f_j)\}_{i,j=1}^N$

Ключевые слова: BC-метод, динамическая двумерная обратная задача, связывающий оператор, обращение теплицевой матрицы.

Поддержано грантом РФФИ 18-01-00269 и Фондом Volkswagen Stiftung.

для достаточно большого набора управлений f_i. Выполняя обращение, мы сталкиваемся с двумя обычными проблемами:
1) для увеличения точности решения приходится увеличивать число управлений (размер матрицы) N, что, особенно в многомерном случае, ведет к быстрому росту числа операций;
2) с увеличением размера, обусловленность матрицы $\hat{C}^T$ ухудшается: нижняя граница ее спектра, быстро убывая, стремится к нулю.
Последнее осложнение неизбежно: оно отражает сильную некорректность *многомерных* обратных задач (и соответствующих задач граничного управления). Проблема решается регуляризацией. Способов регуляризации много; в настоящий момент наиболее перспективным для BC-алгоритмов представляется подход [21].

• В данной работе обсуждается проблема 1). Мы показываем, что простой прием позволяет свести нахождение $[\hat{C}^T]^{-1}$ к обращению матрицы, имеющей *блочно-теплицеву структуру.* Для таких матриц известны специальные алгоритмы, требующие существенно меньшего объема вычислений в сравнении с общим случаем. В разных вариантах этот прием использовался в [9, 10, 18]. Здесь мы расширяем подход [13], допуская области произвольной формы и снимая ограничения на форму граничных источников (управлений).

§2. Прямая и обратная задачи

Прямая задача. • Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ есть область с гладкой[1] границей Γ; dist – *внутреннее* расстояние в Ω в евклидовой метрике $ds^2 = dx^2+dy^2$. Через

$$\Omega^r_A := \{p \in \overline{\Omega} \mid \operatorname{dist}(p, A) < r\}, \qquad r > 0$$

обозначается метрическая окрестность множества $A \subset \overline{\Omega}$ радиуса r.

В области рассматривается начально-краевая задача

$$u_{tt} - \Delta u - \langle \nabla \ln \rho, \nabla u\rangle = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, T); \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в} \quad \overline{\Omega}; \tag{2}$$

$$\partial_n u = f \qquad \text{на} \quad \Gamma \times [0, T]; \tag{3}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $\langle \nabla \ln \rho, \nabla u\rangle = (\ln \rho)_x u_x + (\ln \rho)_y u_y$, $\rho = \rho(x, y)$ – гладкая ограниченная в Ω положительная функция (приведенная скорость звука), $f = f(\gamma, t)$ – граничное управление (Неймана), ∂_n –

[1] Всюду в работе *гладкий* означает C^∞-гладкий. Это требование является завышенным и принято для простоты.

производная по внутренней нормали n к границе Γ, $u = u^f(x,y,t)$ – решение (волна).

Пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть открытое подмножество границы. По принципу конечности области влияния для гиперболического уравнения (1), при $\operatorname{supp} f \subset \overline{\sigma} \times [0,T]$ (т.е. для управлений, действующих с σ) выполнено соотношение

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \Omega^t_\sigma, \qquad 0 < t \leqslant T. \tag{4}$$

Оно означает, что волны распространяются в Ω с единичной скоростью.

• В силу гиперболичности, для управлений f с носителями $\operatorname{supp} f \subset \overline{\sigma} \times [0,2T]$, *расширенная* задача

$$u_{tt} - \Delta u - \langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle = 0, \qquad p \in \Omega^T_\sigma,\ 0 < t < 2T - \operatorname{dist}(p,\sigma); \tag{5}$$

$$u = 0 \qquad \text{при} \quad t < \operatorname{dist}(p,\sigma); \tag{6}$$

$$\partial_n u = f \qquad \text{на} \quad \overline{\sigma} \times [0,2T], \tag{7}$$

где $p = (x,y) \in \Omega$, является корректной.

Динамическая система. Система (1)–(3) снабжается стандартными атрибутами теории управления: пространствами и операторами. Открытое множество $\sigma \subset \Gamma$ фиксировано.

• *Внешнее пространство* системы есть пространство $\mathscr{F}^T_\sigma := L_2(\sigma \times [0,T])$, состоящее из управлений, действующих с σ, снабженное скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathscr{F}^T_\sigma} = \int\limits_{\sigma \times [0,T]} f(\gamma,t)\, g(\gamma,t)\, \rho(\gamma)\, d\gamma\, dt, \tag{8}$$

где $d\gamma$ – элемент длины на Γ.

• *Внутреннее пространство* состояний (волн) это пространство $\mathscr{H}^T_\sigma := L_{2,\rho}(\Omega^T_\sigma)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{\mathscr{H}^T_\sigma} = \int\limits_{\Omega^T_\sigma} v(x,y)\, w(x,y)\, \rho(x,y)\, dx\, dy.$$

В силу (4), волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть его элементы.

• *Оператор управления* $W^T : \mathscr{F}^T_\sigma \to \mathscr{H}^T_\sigma$ действует по правилу

$$W^T f := u^f(\,\cdot\,,T). \tag{9}$$

Он компактен при всех $T>0$ и инъективен при

$$T<T_\sigma:=\inf\{t>0\,|\,\Omega^t_\sigma=\Omega\}\leqslant\infty.$$

Ключевым для BC-метода является соотношение

$$\overline{\operatorname{Ran}W^T}\ :=\ \mathscr{H}^T_\sigma, \qquad T>0, \tag{10}$$

которое устанавливает полноту волн в захваченной ими подобласти Ω^T_σ и интерпретируется как *приближенная граничная управляемость* системы (1)–(3). Оно выводится с использованием фундаментальной теоремы Хольмгрена-Йона-Татару [2].

• *Оператор реакции* $R^T:\mathscr{F}^T_\sigma\to\mathscr{F}^T_\sigma$,

$$R^Tf\ :=\ u^f\quad \text{на } \overline{\sigma}\times[0,T]$$

описывает реакцию системы на действие управления. Он также является компактным и имеет представление

$$(R^Tf)(\gamma,t):=\int\limits_0^t ds\int\limits_\sigma r(\gamma,\gamma';t-s)\,f(\gamma',s)\,d\gamma',\quad \gamma\in\sigma,\ \ 0\leqslant t\leqslant T,$$

в котором ядро r – кусочно-непрерывная функция.

• Задаче (5)–(7) отвечает *расширенный* оператор реакции

$$R^{2T}:\mathscr{F}^{2T}_\sigma\to\mathscr{F}^{2T}_\sigma,$$

$$R^{2T}f\ :=\ u^f\quad \text{на}\quad \overline{\sigma}\times[0,2T].$$

Он компактен и допускает представление

$$(R^{2T}f)(\gamma,t):=\int\limits_0^t ds\int\limits_\sigma r(\gamma,\gamma';t-s)\,f(\gamma',s)\,d\gamma',\qquad \gamma\in\sigma,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2T. \tag{11}$$

Оба оператора R^T и R^{2T} компактны и оба однозначно определяются только значениями функции ρ в Ω^T_σ (не зависят от значений ρ в $\Omega\backslash\Omega^T_\sigma$).

• Оператор $C^T:\mathscr{F}^T_\sigma\to\mathscr{F}^T_\sigma$,

$$C^T:=(W^T)^*W^T \tag{12}$$

называется *связывающим*. Для управлений $f,g\in\mathscr{F}^T_\sigma$ выполнено

$$\big(u^f(\,\cdot\,,T),u^g(\,\cdot\,,T)\big)_{\mathscr{H}^T_\sigma}\overset{(9)}{=}(W^Tf,W^Tg)_{\mathscr{H}^T_\sigma}=(C^Tf,g)_{\mathscr{F}^T_\sigma},$$

так что C^T связывает метрики внутреннего и внешнего пространств. Оператор C^T компактен и инъективен при $T < \inf\{t > 0 \mid \Omega^t_\sigma = \Omega\}$. Из определения (12) следует, что он самосопряженный и положительный.

• Одним из главных инструментов BC-метода является простая и явная формула, выражающая связывающий оператор через оператор реакции (см. [2–4]). Введем оператор нечетного продолжения $S^T : \mathscr{F}^T_\sigma \to \mathscr{F}^{2T}_\sigma$,

$$(S^T f)(\,\cdot\,, t) := \begin{cases} f(\,\cdot\,, t), & 0 \leqslant t < T; \\ -f(\,\cdot\,, 2T - t), & T \leqslant t \leqslant 2T; \end{cases}$$

и оператор интегрирования $J^{2T} : \mathscr{F}^{2T}_\sigma \to \mathscr{F}^{2T}_\sigma$,

$$(J^{2T} f)(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^t f(\,\cdot\,, s)\, ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Справедливо равенство

$$C^T = \frac{1}{2}\,(S^T)^* J^{2T} R^{2T} S^T. \tag{13}$$

Обратная задача. Пусть l_γ есть луч (полупрямая в $\mathbb{R}^2$), исходящий из точки $\gamma \in \sigma$ внутрь Ω по нормали n к границе. Через $B_\sigma = \cup_{\gamma\in\sigma} l_\gamma$ обозначим подобласть в Ω, покрываемую лучами (лучевую трубку); пусть $B^T_\sigma := B_\sigma \cap \Omega^T_\sigma$ есть ее часть, попадающая в область, захваченную волнами.

Пусть время $T < T_\sigma$ таково, что поле лучей регулярно в B^T_σ, (т.е. для каждой точки $p \in B^T_\sigma$ имеется единственный луч $l_\gamma \ni p$). *Обратная задача* состоит в нахождении функции ρ в области B^T_σ по заданному оператору реакции R^{2T}.

Эта задача решена в [4, 12] для $\Omega = \mathbb{R}^2_+$. Главный инструмент решения (т.н. *амплитудная формула*) использует полные в $\mathscr{F}^T_\sigma$ системы управлений. В [13] показано, что при специальном выборе управлений численный алгоритм решения сводится к обращению блочно-теплицевых матриц. Этот выбор специфичен и связан с формой границы.

В случае области произвольной формы, поставленная выше обратная задача решается по той же схеме с использованием адекватной версии амплитудной формулы. Мы не приводим решения, поскольку такое обобщение вполне очевидно. Наша цель – показать, что и в общем случае алгоритм решения сводится к обращению блочно-теплицевых матриц.

Задача граничного управления. • В рамках BC-метода, решение обратной задачи равносильно решению адекватной задачи граничного управления [1, 14]. Последняя, в нашем случае состоит в следующем.

Пусть $1^T_\sigma \in \mathscr{H}^T_\sigma$ есть функция, тождественно равная 1 в Ω^T_σ. Задача граничного управления заключается в нахождении управления f, для которого выполнено

$$u^f(\,\cdot\,,T) \,=\, 1^T_\sigma. \tag{14}$$

Иными словами, требуется найти управление f, при котором инициированная им волна u^f в финальный момент времени приобретает заданную форму 1^T_σ.

Можно показать, что в классе управлений $\mathscr{F}^T_\sigma$ эта задача неразрешима, а под ее решением естественно понимать последовательность управлений $f_1, f_2, \dots \in \mathscr{F}^T_\sigma$, обеспечивающую $\lim\limits_{j\to\infty} u^{f_j}(\,\cdot\,,T) = 1^T_\sigma$[2]. Существование таких последовательностей гарантировано свойством (10) и решение обратной задачи по существу сводится к их конструктивному описанию [3].

Цель нашей работы – показать, как в случае области произвольной формы блочно-теплицевы матрицы используются для построения последовательностей $\{f_j\}$.

• Выведем уравнение (17), содержащее связывающий оператор и эквивалентное задаче (14).

Запишем (14) в виде уравнения $W^T f = 1^T_\sigma$ (см. (9)) относительно f. Применяя сопряженный оператор, с учетом (12) получим

$$C^T f = (W^T)^* 1^T_\sigma \qquad \text{в } \mathscr{F}^T_\sigma. \tag{15}$$

Найдем правую часть. Пусть $\varkappa^T \in \mathscr{F}^T_\sigma,\ \varkappa^T(\gamma, t) := T - t$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$(W^T)^* 1^T_\sigma = -\varkappa^T. \tag{16}$$

---

[2] В таком же "асимптотическом" смысле понимается решение уравнения (**??**), которое эквивалентно задаче (14).

[3] Добавим, что для полного решения обратной задачи приходится решать не одну, а семейство задач $u^f(\,\cdot\,,\xi) \,=\, 1^\xi_\sigma$ для всех $0 < \xi \leqslant T$ [4, 12].

Доказательство. Выберем управление $g \in C_0^\infty(\sigma \times (0,T)) \subset \mathscr{F}_\sigma^T$. Так как g аннулируется вблизи $t=0$, в силу (4) волна $u^g(\,\cdot\,,T)$ аннулируется вблизи $\partial\Omega_\sigma^T \setminus \Gamma$. Кроме того, в силу (2) выполнено $u^g(\,\cdot\,,T) = \int\limits_0^T (T-t) u_{tt}^g(\,\cdot\,,t)\,dt$. Эти свойства используются в следующей выкладке при интегрировании по частям:

$$((W^T)^* 1_\sigma^T, g)_{\mathscr{F}_\sigma^T} = (1_\sigma^T, W^T g)_{\mathscr{H}_\sigma^T} = \int\limits_{\Omega_\sigma^T} u^g(x,y,T)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^T dt\,(T-t) \int\limits_{\Omega_\sigma^T} u_{tt}^g(x,y,t)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$\overset{(1)}{=} \int\limits_0^T dt\,(T-t) \int\limits_{\Omega_\sigma^T} \left(\Delta u^g(x,y,t) + \frac{\nabla\rho(x,y)}{\rho(x,y)} \nabla u^g(x,y,t)\right) \rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$= -\int\limits_0^T dt\,(T-t) \int\limits_{\partial\Omega_\sigma^T} \partial_n u^g(\gamma,t) \rho(\gamma)\,d\gamma$$

$$\overset{(3)}{=} -\int\limits_0^T dt\,(T-t) \int\limits_{\partial\Omega_\sigma^T} g(\gamma,t)\rho(\gamma)\,d\gamma = (-\varkappa^T, g)_{\mathscr{F}_\sigma^T}.$$

Сопоставляя начало и конец выкладки и учитывая плотность $C_0^\infty(\sigma \times (0,T))$ в $\mathscr{F}_\sigma^T$, в силу произвольности g приходим к (16). □

Как следствие Леммы и соотношения (15), получаем уравнение

$$C^T f = -\varkappa^T \quad \text{в} \quad \mathscr{F}_\sigma^T, \tag{17}$$

равносильное задаче граничного управления (14). Уравнения (17) является двумерным аналогом классических уравнений ГЛКМ: см. [1, 14].

Теплицевы матрицы. Преобразуем уравнение (17) в уравнение в пространстве $\mathscr{F}_\sigma^{2T} = L_2(\sigma \times [0, 2T])$. Как будет видно, именно форма преобразованного уравнения объясняет появление и мотивирует использование теплицевых матриц.

Обозначим $\tilde f := S^T f \in \mathscr{F}_\sigma^{2T}$ и $p(\gamma,\gamma';t) := \int\limits_0^t r(\gamma,\gamma';s)\,ds$.

Лемма 2. *Уравнение* (17) *равносильно уравнению в* $\mathscr{F}_\sigma^{2T}$ *вида*

$$\int\limits_0^{2T} ds \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';|t-s|)\,\tilde f(\gamma',s)\,dx' = -4\,(T-t), \quad (\gamma,t)\in\sigma\times[0,2T]. \tag{18}$$

Доказательство. Согласно (11) оператор $M^{2T} := J^{2T}R^{2T}$ действует в $\mathscr{F}_\sigma^{2T}$ по правилу:

$$\begin{aligned}\left(M^{2T}\tilde f\right)(\gamma,t) &= \int\limits_0^t d\,s \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';t-s)\,\tilde f(\gamma',s)\,d\gamma'\\ &= \int\limits_0^t d\,s \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';|t-s|)\,\tilde f(\gamma',s)\,d\gamma', \quad (\gamma,t)\in\sigma\times[0,2T].\end{aligned}$$

Сопряженный оператор действует по правилу:

$$\begin{aligned}\left((M^{2T})^*\tilde f\right)(\gamma,t) &= \int\limits_t^{2T} ds \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';s-t)\,(\gamma',s)\,d\gamma'\\ &= \int\limits_t^{2T} ds \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';|s-t|)\,\tilde f(\gamma',s)\,d\gamma', \quad (\gamma,t)\in\sigma\times[0,2T].\end{aligned}$$

Как следствие, имеем:

$$\begin{aligned}&\left(\left[M^{2T}+(M^{2T})^*\right]\tilde f\right)(\gamma,t)\\ &= \int\limits_0^{2T} ds \int\limits_\sigma p(\gamma,\gamma';|t-s|)\,\tilde f(\gamma',s)\,d\gamma', \quad (\gamma,t)\in\sigma\times[0,2T].\end{aligned} \tag{19}$$

В то же время из (13) следует:

$$\begin{aligned} C^T &= (C^T)^* = \frac{1}{2}\left[C^T + (C^T)^*\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(S^T)^* J^{2T} R^{2T} S^T + \frac{1}{2}(S^T)^* (J^{2T} R^{2T})^* S^T\right] \\ &= \frac{1}{4}(S^T)^* \left[M^{2T} + (M^{2T})^*\right] S^T . \end{aligned}$$

Применяя S^T к обеим частям (17) и используя (19) и равенство $S^T(S^T)^* = I$, приходим к соотношению

$$\left[M^{2T} + (M^{2T})^*\right] \tilde{f} = -4\, \tilde{\varkappa}^T \quad \text{в} \quad \mathscr{F}_\sigma^{2T}$$

с $\tilde{\varkappa}^T := S^T \varkappa^T$, которое в подробной записи принимает вид (18). $\square$

Таким образом, чтобы получить решение f уравнения (17), можно решить (18) и затем взять $f = \tilde{f}|_{\sigma\times[0,T]}$. Теплицевы матрицы появляются при приближенном решении (18) как следствие зависимости ядра интеграла от $|t-s|$.

Теплицевы матрицы. • Решая уравнение (18) численно, будем искать решение $\tilde{f}$ в виде линейной комбинации элементов системы линейно независимых управлений в пространстве $\mathscr{F}_\sigma^{2T}$. Опишем возможный выбор такой системы.

Пусть $\overline{\sigma}$ есть отрезок границы Γ. Разобьем его на M частей $\overline{\sigma}_j = [\gamma_j, \gamma_{j+1}]$ точками $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_M$. Временной промежуток $[0, 2T]$ разобьем на N отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N-1$. Пусть $\Delta_j^i = \overline{\sigma}_j \times [t_i, t_{i+1}]$. Тогда множество (носитель управлений) $\overline{\sigma} \times [0, 2T]$ есть объединение

$$\overline{\sigma} \times [0, 2T] = \bigcup_{\substack{j=0,1,\ldots,M-1;\\ i=0,1,\ldots,N-1}} \Delta_j^i .$$

В качестве базисных управлений выберем (ненулевые) функции

$$g_j^0(\gamma, t) \in L_2(\sigma \times [0, 2T]), \quad j = 0, \ldots, M-1; \quad \operatorname{supp} g_j^0 = \Delta_j^0.$$

На остальных Δ_j^i (с номерами $i = 1, \ldots, N-1$), определим управления $g_j^i(\gamma, t) := g_j^0(\gamma, t - i\delta)$, где $\delta = \frac{2T}{N}$. При этом выполнено

$$\operatorname{supp} g_j^i = \Delta_j^i, \quad i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1$$

и функции g_j^i, очевидно, линейно независимы [4].

• Решая (18), мы ищем приближение в виде

$$\tilde{f}(\gamma,t) = \sum_{\substack{j=0,1,\dots,M-1;\\ i=0,1,\dots,N-1}} c_j^i \, g_j^i(\gamma,t)$$

с неизвестными c_j^i и приходим к линейной системе

$$\sum_{j=0,1,\dots,M-1; i=0,1,\dots,N-1} G_{jl}^{ik} \, c_j^i = -4(\tilde{\varkappa}^T, g_l^k)_{\mathscr{F}_\sigma^{2T}},$$
$$j,l = 0,\dots,M-1; \; i,k = 0,\dots,N-1 \tag{20}$$

с матрицей Грама

$$\begin{aligned}
G_{jl}^{ik} &:= \big([M^{2T} + (M^{2T})^*]g_j^i\,,\, g_l^k\big)_{\mathscr{F}^{2T}} \\
&\overset{(18)}{=} \int\limits_{\Delta_l^k} d\gamma\, dt\; g_l^k(\gamma,t) \int\limits_{\Delta_j^i} p(\gamma,\gamma';|t-s|)\, g_j^i(\gamma',s)\, ds\, d\gamma' \\
&= \int\limits_{\Delta_l^k} d\gamma\, dt\; g_l^0(\gamma,t-k\delta) \int\limits_{\Delta_j^i} p(\gamma,\gamma';|t-s|)\, g_j^0(\gamma',s-i\delta)\, ds\, d\gamma' \\
&= \int\limits_{\Delta_l^0} d\gamma\, dt\; g_l^0(\gamma,t) \int\limits_{\Delta_j^0} p(\gamma,\gamma';|t-k\delta-(s-i\delta)|)\, \tilde{g}_j^0(\gamma',s)\, ds\, d\gamma' \\
&= \int\limits_{\Delta_l^0} d\gamma\, dt\; g_l^0(\gamma,t) \int\limits_{\Delta_j^0} p(\gamma,\gamma';|t-s+(i-k)\delta|)\, g_j^0(\gamma',s)\, ds\, d\gamma'.
\end{aligned}$$

Эта матрица симметрична и положительно определена. Ее элементы G_{jl}^{ik} зависят от разности $k-i$. Как следствие, мы имеем *блочно-теплицеву* матрицу с $N\times N$ блоками размера $M\times M$. Такая специфика обусловлена адекватным выбором управлений g_j^i. В численных экспериментах с BC-алгоритмами она впервые использовалась В. Ю. Готлибом [9, 10].

---

[4]Вполне допустимо, к примеру, взять $g_j^i = \chi_{\Delta_j^i}$, где χ_A есть характеристическая функция множества A.

Правые части системы (20) суть

$$-4\,(\tilde{\varkappa}^T, g_l^k)_{\mathscr{F}_\sigma^{2T}} = -4 \int\limits_{\sigma\times[0,2T]} (T-t)\, g_l^k(\gamma,t)\, d\gamma\, dt$$

$$= -4 \int\limits_{\Delta_l^k} (T-t)\, g_l^k(\gamma,t)\, d\gamma\, dt =: \beta_l^k. \tag{21}$$

Вспоминая соотношение (13), заключаем: чтобы составить систему (20) и приступить к ее решению, достаточно располагать оператором реакции R^{2T} и задать базисные управления g_j^0. На этом основана процедура численного решения обратной задачи [4, 9, 11, 15].

§3. Алгоритм обращения матрицы

• Опишем, следуя [22], алгоритм обращения матрицы Грама

$$\mathbf{G} = \{G_{jl}^{ik}\}_{\substack{j,l=0,1,\dots,M-1;\\ i,k=0,1,\dots,N-1}} = \begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 & \dots & \Theta_{N-1} \\ \Theta_1 & \Theta_0 & \Theta_1 & \dots & \Theta_{N-2} \\ \Theta_2 & \Theta_1 & \Theta_0 & \dots & \Theta_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N-1} & \Theta_{N-2} & \Theta_{N-3} & \dots & \Theta_0 \end{pmatrix},$$

где блоки Θ_m являются $M \times M$ - матрицами с элементами G_{jl}^{ik}, $|i-k| = m$; $m = 0, \dots, N-1$. Индексы j и l принимают значения $0 \leqslant j,\, l \leqslant M-1$.

Введем вектор-строку неизвестных

$$\mathscr{C} := \left(c_0^0, \dots, c_{M-1}^0; c_0^1, \dots, c_{M-1}^1; \dots; c_0^{N-1}, \dots, c_{M-1}^{N-1}\right)$$

и вектор-строку правых частей β_l^k

$$\mathscr{B} := \left(\beta_0^0, \dots, \beta_{M-1}^0; \beta_0^1, \dots, \beta_{M-1}^1; \dots; \beta_0^{N-1}, \dots, \beta_{M-1}^{N-1}\right)$$

определенных в формуле (21). Эти строки будут иметь длину MN. Таким образом, система (20) эквивалентна системе

$$\mathscr{C}\mathbf{G} = \mathscr{B}. \tag{22}$$

• Чтобы решить систему (22), нужно обратить матрицу $\mathbf{G}$. Для этого мы используем алгоритм типа Левинсона. Построение обратной матрицы основано на Теореме 1, взятой из [22] и представленной ниже.

В дальнейшем знак $'$ обозначает операцию *блочного* транспонирования при которой блоки транспонируются, но их внутренняя структура не изменяется.

Пусть $Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1})'$ есть блочный столбец, удовлетворяющий соотношению

$$\mathbf{G}Y = \mathscr{I}_N = \begin{pmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где I и O – это единичная и нулевая $M \times M$ - матрицы соответственно. Такой Y существует и единственный, потому что матрица $\mathbf{G}$ неособенная. Блочный столбец $\mathscr{I}_N$ – это матрица, состоящая из MN строк и M столбцов; и Y – матрица того же размера. Более того, как показано в [22], $M \times M$-матрица Y_{N-1} также является *неособенной.*

Теорема 1. *Пусть Y – это матрица, определенная в* (23). *Тогда для матрицы G^{-1} имеет место представление*

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{N-1} & O & \dots & O \\ Y_{N-2} & Y_{N-1} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{N-1} \end{pmatrix} Y_{N-1}^{-1} \begin{pmatrix} Y_{N-1} & Y_{N-2} & \dots & Y_0 \\ O & Y_{N-1} & \dots & Y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & Y_{N-1} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ Y_0 & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N-2} & Y_{N-3} & \dots & O \end{pmatrix} Y_{N-1}^{-1} \begin{pmatrix} O & Y_0 & \dots & Y_{N-2} \\ O & O & \dots & Y_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O. \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Благодаря положительности матрицы $\mathbf{G}$, все матрицы вида

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} \Theta_0 & \Theta_1 & \dots & \Theta_k \\ \Theta_1 & \Theta_0 & \dots & \Theta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_k & \Theta_{k-1} & \dots & \Theta_0 \end{pmatrix}$$

порядка $k+1$ $(k = 0, \dots, N-1)$ симметричны и положительны. В частности, матрица Θ_0 положительна и, поэтому, обратима.

Чтобы найти блочный столбец Y, можно использовать следующую рекуррентную Процедуру. Пусть столбец

$$Y^{(k)} = \left(Y_0^{(k)}, Y_1^{(k)}, \ldots, Y_k^{(k)}\right)'$$

найден на предыдущих шагах. Тогда $Y^{(k)}$ состоит из $k+1$ блоков размера $M \times M$ и удовлетворяет системе (23) размера $k+1$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$.

В алгоритме Левинсона [22], который применяется здесь, используются *нормализующие множители* Q_k ($M \times M$- матрицы), возникающие из равенств

$$Y_l^{(k)} = \tilde{Y}_l^{(k)} Q_k; \qquad l = 0, \ldots, k \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

В Процедуре мы также будем использовать эти нормализующие множители.

- Процедура состоит в следующем.

  (1) На первом шаге мы определяем $\tilde{Y}_0^{(0)} = \Theta_0^{-1} Q_0^{-1}$, где Q_0 – это произвольная неособенная $M \times M$ - матрица. В частности, можно взять $Q_0 = I$.

  (2) Пусть теперь блочный вектор $\tilde{Y}^{(k-1)}$ и множитель Q_{k-1} уже найдены. Введем вспомогательные матрицы E_k и F_k при помощи равенства

$$E_k = \Theta_1 \tilde{Y}_0^{(k-1)} + \Theta_2 \tilde{Y}_1^{(k-1)} + \ldots + \Theta_k \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \qquad F_k = -Q_{k-1} E_k.$$

  В [22] доказано, что $I - F_k^2$ неособенные. Тогда множитель Q_k определяется из равенства

$$Q_k = (I - F_k^2)^{-1} Q_{k-1}.$$

  (3) На следующем шаге вычисляется блочный вектор $\tilde{Y}^{(k)}$ при помощи соотношения

$$\left(\tilde{Y}_0^{(k)}, \tilde{Y}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{Y}_k^{(k)}\right)' = \left(\tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}, \tilde{Y}_{k-2}^{(k-1)}, \ldots, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, 0\right)' F_k +$$
$$+ \left(0, \tilde{Y}_0^{(k-1)}, \tilde{Y}_1^{(k-1)}, \ldots, \tilde{Y}_{k-1}^{(k-1)}\right)'$$

  и далее определяются компоненты

$$Y_l^{(k)} = \tilde{Y}_l^{(k)} Q_k; \quad l = 0, \ldots, k.$$

  (4) Действуя таким образом до $k = N-1$, мы находим блочный столбец $Y^{(N-1)} = Y$. Тогда, используя формулу (24), мы находим матрицу $\mathbf{G^{-1}}$.

Алгоритм требует выполнения $\sim M^3N^2$ операций (против $\sim M^3N^3$ в методе Гаусса). Такие алгоритмы относят к “быстрым” [22].

Методы обращения теплицевых матриц рассматриваются также в работе [16]. Однако в ней не рассматриваются *блочные* матрицы, которые фигурируют в многомерных обратных задачах. Не исключено, что предложенные в [16] алгоритмы можно доработать для использования в таких задачах.

Список литературы

1. М. И. Белишев, *Уравнения Гельфанда-Левитана в многомерных обратных задачах для волновых уравнений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1990), 15–20.
2. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
3. M. I. Belishev, *How to see waves under the Earth surface* (*the BC-method for geophysicists*). Ill-Posed and Inverse Problems. S. I. Kabanikhin and V. G. Romanov (Eds). VSP, 2002, pp. 55–72.
4. M. I. Belishev, *Dynamical Inverse Problem for the Equation* $u_{tt}-\Delta u-\nabla\rho\cdot\nabla u=0$ *(the BC-Method).* — CUBO A Math. J. **10**, No 2 (2008), 17–33.
5. M. I. Belishev, *Boundary Control Method.* Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, vol. 1, pp. 142–146.
6. М. И. Белишев, *Метод граничного управления и томография Римановых многообразий (BC-метод).* — Успехи мат. наук **72**, No. 4 (2017), 3–66.
7. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, Н. А. Каразеева, *Простейший тест для трехмерной динамической обратной задачи (BC-метод).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **483** (2019), 19–40.
8. M. I. Belishev, I. A. Blagoveshchenskii, N. A. Karazeeva, *Toeplitz matrices in the Boundary Control method.* — EuroAsian J. Math. computer appl., vol. 9, Issue 3 (2021), 4–15. ISSN 2306–6172.
9. M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, *Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **7**, No. 3 (1999), 221–240.
10. M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, S. A. Ivanov, *The BC-method in multidimensional spectral inverse problem: theory and numerical illustrations*, Control, Optimization and Calculus of Variations, **2** (1997), October, 307–327.
11. M. I. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshkin, V. S. Semenov. *Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **24** (2016), Issue 2, 159–180. DOI: 10.1515/jiip-2015-0052.
12. М. И. Белишев, Н. А. Каразеева, *Простейший тест для двумерной динамической обратной задачи (BC-метод).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 38–58.
13. M. I. Belishev, N. A. Karazeeva, *Toeplitz matrices in the Boundary Control method.* `arXiv: 2107.03811v1 [math.NA] 8 Jul 2021`.
14. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **20**, No. 4 (2012), 461–488.

15. I. B. Ivanov, M. I. Belishev, V. S. Semenov, *The reconstruction of sound speed in the Marmousi model by the boundary control method.* `arXiv: 1609.07586v1 [physics.geo-ph] 24 Sept 2016.`
16. G. Heinig, K. Rost, *Fast algorithms for Toeplitz and Hankel matrices.* — Linear Algebra and its Appl., **435** (2011), 1–59. doi:10.1016/j.laa.2010.12.001.
17. M. V.De Hoop, P. Kepley, L. Oksanen, *Recovery of a smooth metric via wave field and coordinate transformation reconstruction.* — SIAM J. Appl. Math. **78**, No. 4 (2018), 1931–1953.
18. S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets, M. A. Shishlenin, *Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problems*, 2015/12/1, J. inverse and ill-posed problems, Volume 23, Issue 6, pp. 687–700.
19. L. Oksanen, *Solving an inverse obstacle problem for the wave equation by using the boundary control method.* Inverse Problems **29**, No. 3 (2013), 035004; doi:10.1088/0266-5611/29/3/035004.
20. L. Pestov, V. Bolgova, O. Kazarina, *Numerical recovering of a density by the BC-method.* Inverse Problems and Imaging, Volume 4, No. 4, 2010, 703–712. doi:10.3934/ipi.2010.4.703.
21. А. А. Тимонов, *Новые методы численных решений гибридной обратной задачи визуализации электрической проводимости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **499** (2020), 105–128.
22. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с Теплицевыми матрицами*, М., Наука, 1987.
23. T. Yang, Y. Yang, *A Non-Iterative Reconstruction Algorithm for the Acoustic Inverse Boundary Value Problem.* arXiv:2009.00641v1 [math.AP] 1 Sep 2020.

Belishev M. I., N. A. Karazeeva. Toeplitz matrices in the BC-method for the plane domains.

BC-method is an approach to inverse problems based on their relationship with boundary control theory and system theory. The main fragment of its numerical implementation is the inversion of the matrix of the so-called connecting operator. In multidimensional problems, the matrix is ill-conditioned and has a large size, which leads to a rapid growth in the number of operations needed for inverting. The paper reveals the block-Toeplitz structure of this matrix, using which it is possible to significantly reduce the amount of computations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
E-mail: `belishev@pdmi.ras.ru`
E-mail: `karazeev@pdmi.ras.ru`

Поступило 26 октября 2021 г.