Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

.

В. М. Бабич

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЛУЧЕВОЙ МЕТОД (ПВЛМ) ДЛЯ ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

§1. Введение

Работа посвящена математическому описанию волн шепчущей галереи, модулированных и по амплитуде и по частоте. Заметим, что в работах, включая самые недавние – см. [1] – посвященных волнам шепчущей галереи, частота – постоянный большой параметр. Предлагается соответствующий вариант пространственно-временного лучевого метода (ПВЛМ).

§2. Исходные формулы

Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с постоянной скоростью c:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

а на гладкой поверхности S выполняется краевое условие

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Удается построить формулы ПВЛМ для волн шепчущей галереи. Методика, используемая здесь – это методика пограничного слоя (см. [2] и указанную там литературу). Формальное асимптотическое разложение волны шепчущей галереи мы будем искать в виде:

$$u = e^{ip\theta(M,t)+ip^{1/3}\sigma(M,t)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j(t,M,\nu_1)}{p^{j/3}}. \tag{3}$$

Ключевые слова: поверхностные волны, волны шепчущей галереи, лучевой метод, пространственно-временные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-01-00627.

Здесь p – большой параметр, M – точка поверхности S, которую мы будем характеризовать координатами α^1, α^2. В качестве третьей координаты возьмем n – расстояние от поверхности S по нормали. Обозначим буквой $\mathbf{R}$ радиус вектор произвольной точки в окрестности S, тогда

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + n\mathbf{m}(\alpha^1, \alpha^2). \tag{4}$$

Предполагается, что формула (4) вводит в окрестности S координатную систему α^1, α^2, n: задав α^1, α^2, находим точку на поверхности S и единичную нормаль: $\mathbf{m}(\alpha^1, \alpha^2)$, в точке α^1, α^2. Прибавляя к радиусу вектору $\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2)$ точки на S вектор $n\mathbf{m}$ - получаем вектор $\mathbf{R}$ см. формулу (4). Как и в §3 монографии [2], мы считаем, что волновой процесс происходит при $n \leqslant 0$.

Мы полагаем, что $\nu_1 = np^{\frac{2}{3}}$. Коэффициенты разложения U_j при $\nu_1 \leqslant 0$ предполагаются гладкими функциями $\alpha^1, \alpha^2, \nu_1$, причем:

$$U_j|_{\nu_1=0} = 0, \;\; U_j|_{\nu_1 \to -\infty} \to 0. \tag{5}$$

Анзац (3) - это двумерный ПВ аналог анзаца (1.3) монографии [2] (глава 3 §1).

§3. Основные рекуррентные формулы ПВ лучевого метода для волн шепчущей галереи

Уравнение (1) запишем в координатах α^1, α^2, n. Наши построения являются пространственно-временным (ПВ) аналогом, и, заметим, очень близким аналогом, построений главы 3 монографии [2]. Так же как и там, предполагается, что волны шепчущей галереи распространяются вблизи поверхности S при $n < 0$. В полученных выражениях полагаем

$$n = \nu_1 p^{-2/3}.$$

Приравнивая нулю члены порядка p^2, приходим к равенству:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 = c^2 g^{ij}\theta_i\theta_j, \qquad i, j = 1, 2. \tag{6}$$

Мы будем считать, что уравнение (6) можно записать в виде уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\theta_t + H = 0, \quad H = c\left(g^{ij}\theta_i\theta_j\right)^{1/2}. \tag{7}$$

В формулах (6),(7) и далее g^{ij} – матрица, обратная матрице $g_{ij} = (\mathbf{r}_{\alpha^i}, \mathbf{r}_{\alpha^j})$ первой квадратичной формы поверхности S, $\theta_i = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha^i}, \theta_j = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha^j}$.

Найти решение уравнения (7) позволяет теория, восходящая к первой половине девятнадцатого века. Центральную роль в этой теории играет каноническая система уравнений: $\frac{d\alpha^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\theta_i}, \frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\alpha^i}$. В работах по ПВЛМ решения соответствующей системы уравнений принято называть ПВ лучами. ПВ луч можно представлять себе как бегущую по геодезической линии точку $\alpha^1(t), \alpha^2(t)$, причём задав момент времени t, мы однозначно определяем не только $\alpha^1(t), \alpha^2(t)$, но и $\theta_1(t), \theta_2(t)$ – компоненты градиента искомого эйконала в этой точке.

Потребуем, чтобы в уравнении (2) равнялись нулю члены порядка $p^{4/3}$. После соответствующих вычислений мы приходим к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению для U_0:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial\nu_1^2} + \left(-2b^{ij}\theta_i\theta_j\nu_1 - 2g^{ij}\theta_i\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha^j} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)U_0 = 0, \tag{8}$$

которое следует решать при краевых условиях – см. формулы (5):

$$U_0|_{\nu_1=0} = 0,\ \ U_0|_{\nu_1\to-\infty} \to 0. \tag{9}$$

Здесь $b^{ij} = g^{ii'}g^{jj'}b_{i'j'}$, где $b_{i'j'}$ – коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности S в координатной системе α^1, α^2.

Задача (8)-(9) – это задача отыскания собственной функции U_0 на промежутке $(-\infty, 0)$, причем в качестве собственного числа здесь $2g^{ij}\theta_i\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha^j}$. Введем обозначение: $-2b^{ij}\theta_i\theta_j := \psi$ и потребуем, чтобы выполнялось неравенство:

$$\psi = -2b^{ij}\theta_i\theta_j > 0 \qquad (10).$$

Это неравенство обеспечивает существование волны шепчущей галереи, распространяющейся в направлении, задавемом вектором θ_1, θ_2, т.е. градиентом θ. Неравенство (10) имеет простой геометрический смысл – см. последний раздел этой работы.

Сделаем замену переменных в уравнении (8) и краевых условиях (9):

$$\nu = \psi^{1/3}\nu_1. \tag{11}$$

Мы получим:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial\nu^2} + (\nu - \zeta)U_0 = 0,\ U_0|_{\nu=0} = 0,\ U_0|_{\nu\to-\infty} \to 0. \tag{12}$$

Здесь

$$\zeta = 2\left(g^{ij}\theta_i\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha^j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\psi^{-2/3}. \tag{13}$$

Из равенств (12) следует, что

$$U_0 = D_0(\alpha^1, \alpha^2, t)v(\zeta - \nu). \tag{14}$$

Здесь v – функция Эйри в определении Фока (см. [2]). Краевое условие при $\nu = 0$ имеет следствием равенство: $\zeta = q$, где q – корень функции Эйри, $v(q) = 0$. (Все корни функции Эйри v отрицательны). Итак мы пришли к уравнению , которому должно удовлетворять σ: это уравнение (13), где ζ какой-либо корень функции Эйри v. Уравнение, пользуясь которым можно найти множитель D_0, следует из дальнейших рассмотрений.

Приравняем в уравнении (2) нулю члены порядка p. Мы придем к равенству:

$$i\left(2g^{ij}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha^i}\frac{\partial U_0}{\partial\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial U_0}{\partial t} + (\Delta_2\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})U_0\right)$$
$$= -\psi^{2/3}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial\nu^2} + (\nu - \zeta)U_1\right). \tag{15}$$

Здесь Δ_2 – оператор Лапласа, соответствующий метрическому тензору g_{ij}. Равенство (15) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, где искомой функцией служит U_1. Как и в случае с U_0, уравнение (15) следует рассматривать при отрицательных ν и краевых условиях (см.(5))

Задача нахождения U_1 из уравнения (15) при краевых условиях (16) аналогична задаче Штурма–Лиувилля. Соответствующая однородная задача имеет решение $v(\zeta - \nu)$, не равное тождественно нулю. Такая задача, вообще говоря, неразрешима. Условием разрешимости ее является ортогональность левой части уравнения (15) и функции $v(\zeta - \nu)$ – т.е. равенство

$$\int_{-\infty}^{0} F(\nu)v(\zeta - \nu)d\nu) = 0, \qquad (17),$$

где $F(\nu)$ – левая часть равенства (15). Следствием равенств (15), (16), (17) является уравнение:

$$2g^{ij}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha^i}\frac{\partial D_0}{\partial\alpha^j} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial D_0}{\partial t} + \left(\Delta_2\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)D_0 = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) – это ПВ уравнение переноса, вполне аналогичное уравнениям переноса в других вариантах ПВЛМ (см. [3]). Если заданы соответствующие начальное условие в случае регулярности поля ПВ лучей, то его решение определяет волну шепчущей галереи в первом приближении. Приравнивая нулю члены порядка $p^{2/3}$ и проводя рассуждения, подобные только что описанным, мы получим уравнение переноса позволяющее найти U_1. Вот так, шаг за шагом, в принципе можно найти все U_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$

§4. Геометрический смысл неравенства (10)

Начнем с замечания, что из положительной определённости первой квадратичной формы поверхности S следует, что неравенство (10) эквивалентно отрицательности выражения

$$Q = \frac{b^{ij}\theta_i\theta_j}{g^{ij}\theta_i\theta_j}. \tag{19}$$

Имеет место формула:

$$\frac{d\alpha^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i} = c\frac{\partial}{\partial \theta_i}\sqrt{g^{ij}\theta_i\theta_j} = c\frac{g^{ij}\theta_j}{H}. \tag{20}$$

Она эквивалентна равенству

$$\theta_j = \frac{H}{c} g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}. \tag{21}$$

Если подставить вместо θ_1, θ_2 их выражения согласно формуле (21) в выражение (19), то после небольших вычислений мы придём к равенству:

$$Q = \frac{b_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}. \tag{22}$$

Здесь g_{ij} и b_{ij} соответственно матрицы первой и второй квадратичной формы поверхности S. Имеет место теорема (см. [4, гл. 2, §8, теорема 1]):

Отношение значений второй и первой квадратичных форм на касательном векторе к кривой совпадает с кривизной кривой на поверхности в трёхмерном пространстве, умноженной на косинус угла между нормалью к поверхности (в нашем случае это вектор $\mathbf{m}$*) и главной нормалью к кривой.*

Будем рассматривать кривую $\alpha_i = \alpha_i(t)$ на поверхности S как кривую в трехмерном пространстве. Тогда из этой теоремы следует равенство:

$$K \cos \Phi = \frac{b^{ij}\theta_i\theta_j}{g^{ij}\theta_i\theta_j}, \tag{23}$$

где K – кривизна рассматриваемой кривой, а Φ – угол между $\mathbf{m}$ и её главной нормалью.

Таким образом, неравенство (10) эквивалентно неравенствам $K > 0$ и $\cos \Phi < 0$. В нашем случае кривая – геодезическая линия и её главная нормаль (обозначим её $\mathbf{l}$) ортогональна поверхности S. Отрицательность $\cos \Phi$ означает, что $\cos \Phi = -1$. Итак: $K > 0$ и $\mathbf{m} = -\mathbf{l}$, то есть главная нормаль геодезической линии на поверхности направлена туда, где происходит волновой процесс.

Список литературы

1. М. М. Попов,. *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для строго выпуклых поверхностей, вложенных в R^3*. – Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 301–313.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, Изд-во ЛГУ. Л. 1974.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны,* Изд-во ЛГУ. Л. 1985.
4. В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия.* М. Наука. Гл. изд .физ-мат. лит. 1986.

Babich V. M. Space-time ray method for whispering gallery waves.

The work is devoted to the mathematical description of the whispering gallery waves modulated by amplitude and frequency. Space-time ray method for this problem is introduced.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
192288, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 16 февраля 2021 г.