Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

В. М. Бабич

КОММЕНТАРИИ К ВЫВОДУ ФОРМУЛ ДЛЯ ГАУССОВЫХ КВАЗИФОТОНОВ КОМПЛЕКСНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ (ПВЛМ).

§1. Введение

Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением:

$$\frac{1}{c^2(x^1, x^2, x^3)} u_{tt} - \Delta u = 0. \tag{1}$$

Квазифотоны – это “солитоноподобные” волновые “сгустки”, мчащиеся вдоль лучей – экстремалей интеграла – $\int \frac{ds}{c}$ – со скоростью c (см. [1, 2]).

В этой заметке показано, что методика построений квазифотонов, изложеннная в [1, 2], позволяет находить все квазифотоны того аналитического типа, который диктует ПВЛМ. В случае $c = \mathfrak{const}$ для соответствующих квазифотонов получаются явные (в том числе весьма непростые) формулы.

§2. Анзац

Мы будем здесь рассматривать формальное решение уравнения (1), осцилирующее в окрестности ПВ-луча и экспоненциально убывающее вне его при увеличении частоты колебаний. ПВ-луч – это характеристика уравнения эйконала:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + H(x, \frac{\partial\theta}{\partial x^1}, \frac{\partial\theta}{\partial x^2}, \frac{\partial\theta}{\partial x^3}) = \frac{\partial\theta}{\partial t} + c\sqrt{(\nabla\theta)^2} = 0 \tag{2}$$

В рассматриваемом случае удобно записывать уравнение эйконала в гамильтоновой форме (2).

Ключевые слова: квазифотон, пространственно-временной лучевой метод.
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-01-00627.

Характеристика уравнения эйконала – это линия в пространстве x^1, x^2, x^3, t. Её можно интерпретировать как точку, бегущую вдоль луча со скоростью c. В [1–2] строятся гауссово сосредоточенные в окрестности такой точки решения уравнения (1). В первом приближении соответствующий анзац имеет вид:

$$u = U(t)e^{ip\theta(t,\eta)}, \tag{3}$$

где

$$\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3), \eta^j = x^j - x^j(t), j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

а $x^j = x^j(t)$ – уравнения ПВ-луча, т.е. уравнения движения соответствущей летящей точки, p – большой параметр, $\theta(t, \eta)$ – эйконал.

В рассматриваемом приближении

$$\theta(t, \eta) = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)}. \tag{5}$$

Здесь $\theta^{(r)}$ однородный полином степени r от η^1, η^2, η^3, коэффициенты которого функции времени t. Предполагается, что они вещественны у $\theta^{(1)}$, а квадратичная форма $\theta^{(2)}$ имеет положительно-определённую мнимую часть.

Подставим выражение (5) в уравнение эйконала (2) и потребуем его выполнения в нулевом,первом и втором порядке малости по $|\eta|$. Мы получим, что $\theta^{(0)}$ произвольная константа, а коэффициенты линейной формы однозначно определены потому, что кривая $x^j(t)$ в пространстве x^1, x^2, x^3, t – ПВ-луч. Подробности см. в книге [2, глава 3]). Для нахождения матрицы коэффициентов квадратичной формы $\theta^{(2)}$ надо решать матричное уравнение Риккати. Будем в обозначениях следовать [2, главе 3, §2 книги].

Пусть $\Gamma = (\Gamma_{ij}(t))(\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji})$ – матрица квадратичной формы $2\theta^{(2)}$ – т.е. $2\theta^{(2)} = \Gamma_{ij}\eta^i\eta^j$. Требуя , чтобы уравнение эйконала удовлетворялось во втором порядке по η^i, придём к уравнению:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma A \Gamma + B\Gamma + \Gamma B^T + C, \tag{6}$$

где A,B,C - матрицы:

$$A = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^i \partial\theta^j}\right) = c\left(\frac{\theta^i\theta^j - |\nabla\theta|^2\delta_{ij}}{|\nabla\theta|^3}\right), \theta^i = \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial\eta^i}, \tag{7}$$

$$B = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial\theta^j}\right) = -\left(\frac{\partial c}{\partial x^i}\frac{\theta^j}{|\nabla\theta|}\right), \tag{8}$$

$$C = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\right) = -\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^i \partial x^j}\right)|\nabla\theta| \qquad (9)$$

Все функции и их производные берутся при $\eta^i = 0$ – т.е. на ПВ-луче, δ_{ij} – символ Кронекера, значок T означает транспонирование.

Следуя известному приёму, (см. например Математическую Энциклопедию (1984, т. 4, статья “Риккати уравнение”)), положим:

$$\Gamma = ZY^{-1}. \qquad (10)$$

Легко показать, что если выполняются уравнения:

$$\frac{dZ}{dt} = BZ + CY, \frac{dY}{dt} = -AZ - B^T Y, \qquad (11)$$

то матрица (10) удовлетворяет уравнению (6).

Если выполняется соотношение:

$$Y^T Z - Z^T Y = 0, \qquad (12)$$

и нормирующее условие;

$$Y^* Z - Z^* Y = i\mathrm{I} \qquad (13)$$

(здесь I – единичная матрица, $*$ – знак эрмитова сопряжения), то $\det Y \neq 0, \Gamma$, определяемая равенством (10), симметрична и удовлетворяет уравнению (6). Следствием соотношения (13) является положительная определённость мнимой части матрицы Г.

Уравнение переноса сводится в первом приближении к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка коэффициенты которого определяются однозначно, если изестны $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$. Подробности см. в книге [2].

Для $U(t)$ удаётся вывести формулу:

$$U(t) = \mathfrak{const}\sqrt{\frac{c(t)}{\det Y}}. \qquad (14)$$

§3. Комментарии

Пусть $t = t_0$ - фиксированный момент времени и

$$\Gamma|_{t=t_0} = \Gamma_0, \qquad (15)$$

где Γ_0 – симметричная матрица с положительно определённой мнимой частью.

Формулы (6) и (15) можно рассматривать как задачу Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати (6). Покажем, что решение этой задачи Коши существует и строится в виде (10), где матрицы Y и Z удовлетворяют системе уравнений (11) и соотношениям (12), (13).

Очевидно, что для этого достаточно , чтобы Y и Z решали задачу Коши с начальными данными Y_0 и Z_0, для которых выполнены соотношения (12) и (13) и условие:

$$Z_0 Y_0^{-1} = \Gamma_0. \tag{16}$$

Равенство (15) эквивалентно формуле : $Z_0 = \Gamma_0 Y_0$. Подставим в равенства (12) и (13) вместо Y и Z при $t = t_0$ соответственно $Y_0, \Gamma_0 Y_0$. Тогда равенство (12) будет выполнятся по причине симметричности матрицы Γ_0. Равенство (13) запишется в виде:

$$Y_0^* 2(\mathrm{Im}\Gamma_0) Y_0 = \mathrm{I}, \tag{17}$$

где I единичная матрица. В силу положительной определённости вещественной симметричной матрицы $2\mathrm{Im}\Gamma_0$ существует вещественная матрица Y_0' такая, что имеет место равенство (17). Равенство (17) означает, что положитеьно определённую квадратичную форму $(\eta, 2\mathrm{Im}\Gamma_0\eta)$ линейным преобразованием можно свести к сумме квадратов.

Итак, решение задачи Коши (6), (15) существует. Из того, что решение задачи Коши существует, следует единственность этого решения (см. комментарий 4).

Переходим к комментариям.

1. Вывод, который следует из этих рассмотрений – описанная методика даёт все (с точностью до множителя, независящего от времени) квазифотоны первого приближения.

2. В формуле (13) единичную матрицу можно заменть на любую положительно определённую симметричную вещественную матрицу - например на $2\mathrm{Im}\Gamma_0$.

3. Если Y и Z неособые матрицы, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (11), и E не зависящая от времени неособая матрица, то YE и ZE – тоже удовлетворяют этой системе уравнений, причём

$$ZE(YE)^{-1} = ZY^{-1} = \Gamma \tag{18}$$

Из 1, 2, 3, следует, что в начальных данных $Y|_{t=t_0} = Y_0$ и $Z|_{t=t_0} = Z_0$ можно считать Y_0 или Z_0 единичной матрицей.

4. С помощью весьма специальных приёмов удаётся установить разрешимость задачи Коши (6), (11). Естественно встаёт вопрос о единственности решения: уравнение (6) нелинейное. Опираясь на существование решения, нетрудно доказать его единственность в классе непрерывных с первой поизводной по t матриц. Мы опускаем это несложное доказательство.

В случае задачи Коши вообще говоря из существования решения следует его единственность.

§4. Случай $c = \mathfrak{const}$

Рассмотрим случай, когда квазифотон мчится вдоль оси x^3 со скоростью $c(= \mathfrak{const})$ и начальное условие для матрицы Γ задано при $t = 0$. Матрицы A, B, C (см. (7), (8), (9)) в этом случае равны:

$$A = c^2[-1, -1, 0], B = [0, 0, 0], C = [0, 0, 0]. \tag{19}$$

Здесь в обозначениях мы следуем классическому Курсу высшей математики (см. [3, глава 2]): $[k_1, k_2, k_3]$ обозначает диагональную матрицу с элементами k_1, k_2, k_3 на диагонали. Таким образом, матрицы B и C – матрицы аннулирования, все элементы которых равны нулю. Пусть, как и в начале §3 Y_0, Z_0, Γ_0 – значения соответствущих матриц в начальный момент времени – т.е. при $t = 0$. Пусть $Z_0 = 1$, 1 – единичная матрица. Тогда из (16) следует,что

$$Y_0 = \Gamma_0^{-1}. \tag{20}$$

Y_0 – симметричная матрица с отрицательно-определённой мнимой частью. Нетрудно доказать, что матрица, обратная к симметричной матрице с положительно определённой мнимой частью имееет отрицательно определённую мнимую часть (и обратно).

Мы пришли к задаче Коши для системы уравнений (11) с коэффициентами (19) и начальными условиями

$$Y_o = \Gamma_0^{-1}, Z_0 = \mathrm{I}. \tag{21}$$

Её решение находится легко:

$$Y = \Gamma_0^{-1} - At, Z \equiv Z_0 = 1. \tag{22}$$

Здесь I – единичная матрица, матрица $A = c^2[-1, -1, 0]$ (см. (19)).

Искомая матрица Γ – даётся формулой:

$$\Gamma = ZY^{-1} = (\Gamma_0^{-1} - At)^{-1}. \tag{23}$$

Для квазифотона, учитывая формулы (5) и $2\theta^{(2)} = \Gamma_{ij}\eta^i\eta^j$, получим:

$$u = U(t)e^{ip\theta}, \theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)}, \tag{24}$$

где

$$\theta^{(0)} = \mathfrak{const}, \theta^{(1)} = \frac{1}{c}\eta^3, \theta^{(2)} = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}(t)\eta^i\eta^j = \frac{1}{2}\left((\Gamma_0^{-1} - At)^{-1}\eta, \eta\right). \tag{25}$$

Здесь $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3), \eta^1 = x^1, \eta^2 = x^2, \eta^3 = x^3 - ct$.

$$U(t) = \frac{\mathfrak{const}}{\sqrt{\det Y}} = \mathfrak{const}\sqrt{\det(\Gamma_0^{-1} - At)} \tag{26}$$

3×3 – матрица Γ определяет соответствующий квазифотон (первого приближения) с точностью до постоянного множителя. В случае $c = \mathfrak{const}$ формула (19) это - аналитическое выражение всех этих матриц. Среди них есть матрицы, у которых все элементы отличны от нуля. Если Γ диагональная матрица, то формулы этого параграфа дают давно известные формулы для квазифотонов.

Список литературы

1. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–13.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков. *Пространственно-временной лучевой метод.* — Ленинград, Изд-во ЛГУ, (1986).
3. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики том 3, часть 1.* — Гос. Изд.-во Тех-Теор. Лит. ,М. (1958).

Babich V. M. Comments to deducing the formulas for gaussian quasiphotons by the complex space-times ray methods (STRM).

Quasiphotons-asymptotic solutions of wave equation with gaussian concentration around moving along rays points – are considered. It is stated in this note, that well-known procedures of obtaining the formulas for quasiphotons lead to complete class of quasiphotons, described by complex space-time ray method (STRM), in spite of very restrictive normalizing condition. It is possible, in the case of the constant velocity, to deduce formulas in explicit form for 3 ×-3 matrices, describing quasiphotons. (This matrices in particular can have all nonzero components).

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
192288 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 16 февраля 2021 г.