Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

Б. П. Харламов

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ИНТЕРВАЛЕ С НЕДОСТИЖИМЫМИ ГРАНИЦАМИ

§1. Диффузионный полумарковский процесс

Пусть $\mathcal{C}$ – стандартное метрическое пространство непрерывных функций ξ, определённых на интервале $[0,\infty)$ со значениями из $\mathbb{R}$ (выборочные траектории процесса), $\mathcal{F}$ – стандартная сигма-алгебра подмножеств $\mathcal{C}$ и P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$. Непрерывный случайный процесс общего вида $\mathcal{X}$ полностью характеризуется тройкой $(\mathcal{C},\mathcal{F},P)$, где в некоторых случаях удобно рассматривать не одну вероятностную меру, а согласованный набор вероятностных мер.

Пусть X_t $(t\geqslant 0)$ – функция с параметром t на $\mathcal{C}$, определяемая равенством $X_t(\xi)=\xi(t)$ (одно-координатная проекция траектории), и θ_t – оператор сдвига на $\mathcal{C}$, где $\theta_t(\xi)\in\mathcal{C}$ и для любого $s\geqslant 0$ справедливо $X_s(\theta_t(\xi))=\xi(t+s)$. Мы будем также рассматривать класс $\mathcal{T}$ измеримых отображений τ, где для любых ξ справедливо $0\leqslant\tau(\xi)\leqslant\infty$ (случайные моменты времени, допускающие бесконечные значения), а также класс $\mathcal{T}_0$ марковских моментов (времён), определяемых стандартным образом.

Пусть $\tau\in\mathcal{T}$. На множестве $\{\tau<\infty\}$ определим функционал X_τ и оператор θ_τ со случайным параметром, где

$$X_\tau(\xi)\equiv X_{\tau(\xi)}(\xi),\quad \theta_\tau(\xi)\equiv\theta_{\tau(\xi)}(\xi).$$

Обозначим $f_2\circ f_1\equiv f_2(f_1)$ (суперпозиция двух функций). Используя это обозначение, на множестве

$$\{\tau_1<\infty,\,\tau_2\circ\theta_{\tau_1}<\infty\}$$

можно записать

$$\theta_{\tau_2}\circ\theta_{\tau_1}=\theta_{\tau_2}(\theta_{\tau_1})=\theta_{\tau_2(\theta_{\tau_1})}(\theta_{\tau_1})=\theta_{\tau_3},$$

Ключевые слова: моменты регенерации, непрерывный полумарковский процесс, дифференциальное уравнение, регулярные и недостижимые границы интервала, альтернирующий процесс восстановления.

где

$$\tau_3 \equiv \tau_1 + \tau_2(\theta_{\tau_1}) \equiv \tau_1 \dot{+} \tau_2.$$

Это – так называемое сложение со сдвигом, определённое на множестве $\tau_1 < \infty$. Заметим, что операция $\dot{+}$ ассоциативна, но не перестановочна.

Итак

$$\theta_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = \theta_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}.$$

Из последнего выражения следует:

$$\theta_{\tau_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \tau_n} = \theta_{\tau_n} \circ \ldots \circ \theta_{\tau_1}. \tag{1}$$

В дальнейшем будем обозначать $X_\tau \equiv X(\tau)$, предполагая, что обе эти функции случайны (зависят от ξ).

Пусть (P_x) при $x \in \mathbb{R}$ – семейство вероятностных мер на $\mathcal{F}$ со свойством $P_x(S) \equiv P_x(X(0) = x,\, S)$ для любых x и множеств $S \in \mathcal{F}$. Будем предполагать, что это семейство измеримо относительно параметра x.

Марковский момент τ_1 называется моментом регенерации семейства мер (P_x) $(x \in \mathbb{R})$, если для любых x, $\mathcal{F}_{\tau_1}$-измеримой функции f_1 и $\mathcal{F}$-измеримой функции f_2 справедливо равенство

$$\begin{aligned} &E_x(f_1 \cdot (f_2 \circ \theta_{\tau_1});\, \tau_1 < \infty,\, \tau_2 \circ \theta_{\tau_1} < \infty) \\ &= E_x(f_1 \cdot E_{X(\tau_1)}(f_2;\, \tau_2 < \infty);\, \tau_1 < \infty), \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_{\tau_1}$ – стандартная сигма-алгебра событий (множеств), “предшествующих” моменту τ_1, и $E_x(f;\, S)$ – интеграл от функции f на множестве S по мере P_x.

Для непрерывных полумарковских процессов особую роль играют моменты первого выхода из открытых множеств. Пусть $\Delta = (a, b)$, где $a < b$. Обозначим σ_Δ момент первого выхода процесса $\mathcal{X}$ из множества Δ. Известно (см. [1, с. 194]), что σ_Δ является марковским моментом относительно натуральной фильтрации.

Непрерывный полумарковский процесс – это процесс, задаваемый семейством мер (P_x), для которого при любом Δ марковский момент σ_Δ является моментом регенерации.

Обозначим

$$\begin{aligned} g_\Delta(\lambda, x) &= E_x\left(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\, \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = a\right), \\ h_\Delta(\lambda, x) &= E_x\left(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\, \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = b\right). \end{aligned}$$

Это так называемые полумарковские переходные производящие функции. Известно (см. [2]), что система этих функций определяет полумарковский процесс.

Пусть $\Delta_1 = (c,d)$ и $\Delta = (a,b)$, где $\Delta_1 \subset \Delta$ и $x \in \Delta_1$. Из определения непрерывного полумарковского процесса следует, что выполняется следуюшая система двух уравнений:

$$g_\Delta(\lambda,x) = g_{\Delta_1}(\lambda,x)g_\Delta(\lambda,c) + h_{\Delta_1}(\lambda,x)g_\Delta(\lambda,d), \tag{2}$$

$$h_\Delta(\lambda,x) = g_{\Delta_1}(\lambda,x)h_\Delta(\lambda,c) + h_{\Delta_1}(\lambda,x)h_\Delta(\lambda,d), \tag{3}$$

Непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным полумарковским процессом на интервале Δ, если каждая из этих функций удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}y'' + A(x)y' - B(\lambda,\, x)y = 0 \tag{4}$$

с краевыми значениями

$$g_\Delta(\lambda,\, a) = h_\Delta(\lambda,\, b) = 1, \qquad g_\Delta(\lambda,\, b) = h_\Delta(\lambda,\, a) = 0.$$

В этом уравнении $A(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $B(\lambda,\, x)$ – функция положительная, непрерывная по второму аргументу, неубывающая, непрерывно дифференцируемая по первому аргументу и имеющая вполне монотонную частную производную по первому аргументу. Обоснование этого определения и, в частности, свойство коэффициента $A(x)$, который не зависит от λ, вытекает из свойств преобразования Лапласа (см. [2, с. 159–163]).

При $\lambda = 0$ уравнение (4) переходит в уравнение

$$\frac{1}{2}u'' + A(x)u' - B(0,x)u = 0,$$

где решение не зависит от λ. Известно (см., например, [3, с. 15]), что случай $B(0,x) \equiv 0$ относится к марковскому диффузионному процессу без обрыва. Это же свойство справедливо и для полумарковского диффузионного процесса без бесконечного интервала постоянства (т.е. без остановки “навсегда”). Это свойство следует из формулы (18) из статьи [4].

Граница a интервала (a,b) называется регулярной для непрерывного полумарковского процесса, если для любого $x \in (a,b)$ справедливо

$$P_x(\sigma_{(a,b)} < \infty, X(\sigma_{(a,b)}) = a) > 0.$$

Граница a интервала (a, b) называется недостижимой для непрерывного полумарковского процесса, если для любого $x \in (a, b)$ справедливо

$$P_x(\sigma_{(a,b)} < \infty, X(\sigma_{(a,b)}) = a) = 0.$$

Аналогично определяются регулярность и недостижимость правой границы интервала (a, b).

Нас интересует диффузионный полумарковский процесс со значениями на интервале (a_0, b_0), для которого обе границы являются недостижимыми.

В работе [5] были рассмотрены условия недостижимости границ интервала значений диффузионного полумарковского процесса, переходные производящие функции которого задаются дифференциальным уравнением (4) без слагаемого $B(\lambda, x)u$. Были получены необходимые и достаточные условия недостижимости в терминах коэффициента $A(x)$. Однако в этой работе предельное распределение не рассматривалось.

§2. Альтернирующий процесс восстановления

Для нахождения предельного (при $t \to \infty$) распределения мы используем результаты теории восстановления.

Процесс восстановления – это случайный, кусочно-постоянный процесс $\mathcal{Z}$ с неубывающими траекториями, для которого длины интервалов между скачками суть взаимно независимые положительные случайные величины (независимость понимается относительно некоторой вероятностной меры P).

Альтернирующий процесс восстановления $X(t)$ это процесс восстановления для которого все нечётные интервалы между скачками имеют одно и то же распределение F_1, а все чётные интервалы между скачками имеют одно и то же распределение F_2, где в общем случае $F_1 \neq F_2$ (названия нечётный и чётный определяются в соответствии с последовательностью точек скачков кусочно постоянного процесса $\mathcal{Z}$) (см., например, [6]). Мы будем использовать следующую теорему теории альтернирующих процессов восстановления:

Теорема 1. *Предел при $t \to \infty$ вероятности того, что $X(t)$ принадлежит чётному интервалу постоянства этого процесса равен величине p_1, где*

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

m_1 и m_2 суть математические ожидания длин нечётного и чётного интервалов соответственно.

Доказательство приведено в книге [6, с. 98].

Пусть $a_0 < a < b < b_0$ и $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность интервалов, где $\Delta_n \subset (a_0, b_0)$ и границы последнего интервала недостижимы, а каждая внутренняя точка интервала регулярна. Эта последовательность порождает множество неубывающих последовательностей $(T_k^n)_{n=1}^{\infty}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ точек на временно́й оси, где

$$T_1^1 = \sigma_{\Delta_1}, \quad T_k^{n+1} = T_k^n \dot{+} \sigma_{\Delta_{n+1}},$$

откуда

$$T_k^n = \sigma_{\Delta_k} \dot{+} \sigma_{\Delta_{k+1}} \dot{+} \ldots \dot{+} \sigma_{\Delta_n}.$$

Определяем также $T_k^{k-1} = 0$.

Пусть (t_n) – произвольная последовательность чисел, $(t_n \in \mathbb{R})$. Рассмотрим множество последовательностей случайных величин $(S_k^n)_{k=1}^n$, где

$$S_k^n = t_k \sigma_{\Delta_k} + S_{k+1}^n \circ \theta_{\sigma_{\Delta_k}}.$$

Определяем также $S_{n+1}^n = 0$.

Отсюда получаем

$$S_k^n = \sum_{m=k}^{n} t_m \, \sigma_{\Delta_m} \circ \theta_{T_k^{m-1}},$$

и, следовательно,

$$S_1^n = t_1 \sigma_{\Delta_1} + \sum_{k=2}^{n} t_k \, \sigma_{\Delta_k} \circ \theta_{T_1^{k-1}}$$

Пусть $\Delta_n = (a_0, b)$, если n нечётное, и $\Delta_n = (a, b_0)$, если n чётное.

Условие А. Для любого интервала Δ, где $\Delta \subset (a_0, b_0)$ и $\Delta \neq (a_0, b_0)$, и $x \in \Delta$ справедливо $P_x(\sigma_\Delta < \infty) = 1$, а также $P_x(\sigma_{(a_0,b_0)} < \infty) = 0$.

Из этого условия и определения недостижимости границ интервала (a_0, b_0) следует, что с P_a - вероятностью единица справедливо $X_{T_1^n} = b$, если n нечётное, и $X_{T_1^n} = a$, если n чётное.

Кроме того, из условия A следует, что для любого $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ справедливо $P_x(T_k^n < \infty) = 1$ и поэтому $E_x(f; T_k^n < \infty) = E_x(f)$.

Лемма 1. *Пусть a – начальная точка процесса $\mathcal{X}$ на интервале (a_0, b_0) с недостижимыми границами. Если выполняется условие A, то для любого $n \geqslant 2$ случайные величины $T_1^1, T_1^2 - T_1^1, \ldots T_1^n - T_1^{n-1}$ суть взаимно независимые случайные величины относительно меры P_a.*

Доказательство. Для упрощения записи до конца доказательства леммы будем обозначать

$$\tau_k \equiv \sigma_{\Delta_k}; \;\; \beta_k \equiv \theta_{\tau_k}; \;\; \phi_k \equiv t_k \tau_k,$$

а также опускать значок "$\circ$" между операторами там, где это не вызывает сомнения.

В этих обозначениях

$$S_k^n = \phi_k + S_{k+1}^n \beta_k,$$

где $T_1^1 = \tau_1$, $T_1^0 = 0$, а также θ_0 – оператор тождественного преобразования (т.е. $\theta_0(\xi) = \xi$).

Методом обратной математической индукции получаем

$$S_k^n = \sum_{m=k}^{n} \phi_m \theta_{T_k^{m-1}}. \tag{5}$$

Из условия A следует, что

$$E_a(\exp(iS_1^n)\,;\, T_1^{n-1} < \infty) = E_a(\exp(iS_1^n)),$$

где $i \equiv \sqrt{-1}$ (мнимая единица).

Благодаря полумарковскому свойству процесса получаем

$$E_a(\exp(iS_1^n)) = E_a(\exp(i\phi_1))E_b(\exp(iS_2^n))$$

Так как постоянная функция (например, $f \equiv 1$) измерима относительно любой сигма алгебры , то

$$E_b(\exp(iS_2^n)) = E_a(\exp(iS_2^n \beta_1)).$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
&E_a(\exp(iS_1^n)) = E_a(\exp(i\phi_1))E_a(\exp(iS_2^n\beta_1)) \\
&= E_a(\exp(i\phi_1))E_a(\exp(i\phi_2\beta_1))E_a(\exp(i\phi_3\beta_2\beta_1) \ldots E_a(\exp(i\phi_n\beta_{n-1} \ldots \beta_1)) \\
&= E_a(\exp(i\phi_1))E_a(\exp(i\phi_2\theta_{T_1^1})E_a(\exp(i\phi_3^n\theta_{T_1^2}) \ldots E_a(\exp(i\phi_n\theta_{T_1^{n-1}})) \\
&= E_a(\exp(it_1\tau_1))E_a(\exp(it_2\tau_2\theta_{T_1^1})E_a(\exp(it_3\tau_3\theta_{T_1^2}) \ldots E_a(\exp(it_n\tau_n\theta_{T_1^{n-1}})).
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$S_1^n = t_1\tau_1 + t_2\tau_2\theta_{T_1^1} + t_3\tau_3\theta_{T_1^2} + \cdots + t_n\tau_n\theta_{T_1^{n-1}}.$$

Отсюда и из известной теоремы о многомерных характеристических функциях (см., например, [**?**, с. 304]) следует, что случайные величины

$$\tau_1,\ \tau_2\theta_{T_1^1},\ \tau_3\theta_{T_1^2}, \ldots \tau_n\theta_{T_1^{n-1}}$$

суть взаимно независимые случайные величины относительно меры P_a.

Из определения T_1^n и ассоциативного свойства операции $\dot{+}$ следует, что $T_1^n - T_1^{n-1} = \tau_n\theta_{T_1^{n-1}}$, где $n \geqslant 1$.

Лемма доказана. □

Из Леммы 1 следует, что точечный процесс $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(a,b)$, определяемый последовательностью точек T_1^n на временно́й оси, является альтернирующим процессом восстановления с функциями распределения $F_1(t) \equiv P_a(\sigma_{(a_0,b)} < t)$ на нечётных интервалах и $F_2(t) \equiv P_b(\sigma_{(a,b_0)} < t)$ – на чётных.

§3. Предельная функция распределения

Обозначим

$$l_{(\delta,\beta)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(\delta,\beta)};\, \sigma_{(\delta,\beta)}) < \infty,\ X(\sigma_{(\delta,\beta)}) = \delta),$$
$$m_{(\delta,\beta)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(\delta,\beta)};\, \sigma_{(\delta,\beta)}) < \infty,\ X(\sigma_{(\delta,\beta)}) = \beta),$$

где $\delta < x < \beta$.

Пусть $a_0 < a < b < b_0$ и $N_t(a,b)$ – событие: {в момент t случайная величина X_t не принадлежит интервалу (b, b_0) альтернирующего процесса восстановления, соответствующего паре точек $\{a,b\}$}. Из этого определения видно, что событие $N_t(a,b)$ равно событию $\{X_t \in (a_0,b)\}$. Отсюда, согласно теореме 1, имеем выражение

$$\lim_{t\to\infty} P_a(X_t \in (a_0,b)) = \frac{m_{(a_0,b)}(a)}{l_{(a,b_0)}(b) + m_{(a_0,b)}(a)}.$$

Отсюда следует, что на интервале (a, b_0) эта дробь как функция от b не убывает и стремится к единице, когда $b \to b_0$.

Пусть $a_0 < c < a < b_0$ и $M_t(c,a)$ – событие: {в момент t случайная величина X_t не принадлежит интервалу (a_0, c) альтернирующего процесса восстановления, соответствующего паре точек $\{c,a\}$}. Из этого определения видно, что событие $M_t(c,a)$ равно событию $\{X_t \in (c,b_0)\}$. Отсюда, согласно теореме 1, имеем выражение

$$\lim_{t\to\infty} P_a(X_t \in (c,b_0)) = \frac{l_{(c,b_0)}(a)}{l_{(c,b_0)}(a) + m_{(a_0,a)}(c)}.$$

Отсюда следует, что на интервале (a_0,a) эта дробь как функция от c не убывает и стремится к единице, когда $c \to a_0$.

В результате мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. *Если выполняется условие A, то диффузионный полумарковский процесс $X(t)$ с вероятностной мерой P_a на конечном интервале значений (a_0,b_0) при $t\to\infty$ имеет функцию распределения*

$$K_a(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P_a(X(t) \in (a_0,x)) = \begin{cases} \dfrac{m(a_0,a,x)}{l(a,x,b_0)+m(a_0,a,x)}, & x \in (a,b_0),\\[2ex] \dfrac{m(a_0,x,a)}{l(x,a,b_0)+m(a_0,x,a)}, & x \in (a_0,a). \end{cases}$$

3.1. О вычислении математических ожиданий. Из определения переходных производящих функций следует, что существуют функции распределения $G_\Delta(t\,|\,x)$ и $H_\Delta(t\,|\,x)$ такие, что

$$g_\Delta(\lambda,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} dG_\Delta(t\,|\,x),$$

$$h_\Delta(\lambda,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} dH_\Delta(t\,|\,x).$$

Благодаря равномерной непрерывности по λ функций $g_\Delta(\lambda,x)$ и $h_\Delta(\lambda,x)$ ввиду этих интегральных представлений производные по λ от них могут быть получены как результат дифференцирования под знаком интегралов:

$$[g_\Delta(\lambda,x)]'_\lambda = \int\limits_0^\infty (-t) e^{-\lambda t} dG_\Delta(t\,|\,x),$$

$$[h_\Delta(\lambda,x)]'_\lambda = \int\limits_0^\infty (-t) e^{-\lambda t} dH_\Delta(t\,|\,x).$$

Полагая $\lambda = 0$ и $\Delta = (a, b)$, получаем уравнения

$$l_\Delta(x) = -[g_\Delta(\lambda, x)]'_{\lambda=0},$$
$$m_\Delta(x) = -[h_\Delta(\lambda, x)]'_{\lambda=0}.$$

Нашей очередной задачей является использование уравнения

$$\frac{1}{2}u'' + A(x)u' - B(\lambda, x)u = 0$$

для нахождения математических ожиданий, входящих в определение функции распределения $K_a(x)$.

Дифференцируя члены этого дифференциального уравнения по λ, меняя порядок дифференцирования по x и λ и полагая $\lambda = 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно переменной x для функции $l_\Delta(x)$:

$$l_\Delta(x)'' + 2A(x)\,l_\Delta(x)' + [2B(\lambda, x)]'_{\lambda=0}\,g_\Delta(0, x) - 2B(0, x)\,l_\Delta(x) = 0.$$

Последнее слагаемое левой части этого уравнения равно нулю благодаря свойству отсутствия бесконечного интервала постоянства у рассматриваемого процесса (см. выше). Известно также (см., [2, с. 172]), что для невырожденного непрерывного полумарковского процесса справедливо $B'_\lambda(0, x) > 0$. Отсюда

$$l_\Delta(x)'' + 2A(x)l_\Delta(x)' + 2B'_\lambda(0, x)]g_\Delta(0, x) = 0. \tag{6}$$

Аналогичным образом получаем второе уравнение

$$m_\Delta(x)'' + 2A(x)m_\Delta(x)' + 2B'_\lambda(0, x)h_\Delta(0, x) = 0. \tag{7}$$

Итак, мы получили два дифференциальных уравнения второго порядка вида

$$y''_i + 2A(x)y'_i + \gamma_i(x) = 0 \qquad (i = 1,\, 2),$$

где

$$\gamma_1(x) \equiv 2B'_\lambda(0, x)g_\Delta(0, x) > 0,$$
$$\gamma_2(x) \equiv 2B'_\lambda(0, x)h_\Delta(0, x) > 0.$$

Обозначим $z_i \equiv y'_i$. В результате мы получим два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$z'_i + 2A(x)z_i + \gamma_i(x) = 0 \qquad (i = 1,\, 2).$$

Решения этих уравнений могут быть записаны в явном виде (см., например, [8, с. 35]). На интервале (a,b) решение такого уравнения может быть представлено как

$$z_i(x) = e^{-F(x)}\left(z_i(c) - \int\limits_c^x \gamma_i(t)e^{F(t)}\,dt\right), \tag{8}$$

где $a_0 < c < b_0$ и $F(x) \equiv \int\limits_c^x 2A(t)\,dt$, а также используется тождество

$$\int\limits_c^x f(t)\,dt \equiv -\int\limits_x^c f(t)\,dt.$$

Для каждого из этих уравнений можем записать два краевых представления их решений относительно интервала $\Delta \equiv (a,b)$.

Условие В. В соответствии с интуитивным представлением об интервале с регулярными границами для a и b определяем

$$m_{(a,b)}(a) = m_{(a,b)}(b) = 0, \qquad l_{(a,b)}(a) = l_{(a,b)}(b) = 0.$$

Имея в виду сходимость a к a_0, мы представим функцию $m_\Delta(x)$ в терминах левого конца интервала. Если $x > a$, то

$$m'_{(a,b)}(x) \equiv z_2(x) = e^{-F_a(x)}\left(z_2(a) - \int\limits_a^x \gamma_2(t)e^{F_a(t)}\,dt\right),$$

где

$$F_a(x) \equiv \int\limits_a^x 2A(t)\,dt.$$

Имеем далее

$$m_{(a,b)}(y) = C + \int\limits_a^y m'_{(a,b)}(x)\,dx,$$

где из условия В следует, что произвольная постоянная C равна нулю. Итак,

$$m_{(a,b)}(y) = \int\limits_a^y e^{-F_a(x)}\left(m'_{(a,b)}(a) - \int\limits_a^x \gamma_2(t)e^{F_a(t)}\,dt\right)dx.$$

Для окончательного представления $m_{(a,b)}(y)$ в терминах коэффициентов исходного дифференциального уравнения не хватает только значения $m'_{(a,b)}(a)$.

Положим $y = b$. Тогда из условия B следует

$$m'_{(a,b)}(a) = \left(\int_a^b e^{-F_a(x)}\,dx\right)^{-1} \int_a^b e^{-F_a(x)} \int_a^x \gamma_2(t) e^{F_a(t)}\,dt\,dx.$$

Искомое представление математического ожидания $m_{(a,b)}(x)$ получено.

С другой стороны

$$l'_{(a,b)}(x) \equiv z_1(x) = e^{-F_b(x)}\left(l'_{(a,b)}(b) + \int_x^b \gamma_1(t) e^{F_b(t)}\,dt\right),$$

где $F_b(x) = \int_b^x 2A(t)\,dt$. Отсюда

$$l_{(a,b)}(x) = C - \int_x^b l'_{(a,b)}(t)\,dt.$$

Применяя два раза условие B, получаем $C = 0$ и

$$l'_{(a,b)}(b) = -\left(\int_a^b e^{F_b(x)}\,dx\right)^{-1} \int_a^b e^{-F_b(x)} \int_x^b \gamma_1(t) e^{F_b(t)}\,dt\,dx.$$

Искомое представление математического ожидания $l_{(a,b)}(x)$ получено.

Мы нашли представление функции $K_a(x)$ в терминах математических ожиданий времён первого выхода из конечных интервалов, одна из границ которых является недостижимой. Эти математические ожидания находятся в качестве пределов от математических ожиданий на интервалах с регулярными границами, найденными выше.

Список литературы

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов. Т.* 2, М., Наука, 1973.
2. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*, СПб, Наука, 2001.
3. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, М., Физматгиз, 1963.
4. Б. П. Харламов, *Финальное распределение диффузионного процесса с остановкой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 209–241.

5. Б. П. Харламов, *О недостижимой границе интервала значений диффузионного процесса: полумарковский подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 313–330.
6. Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*, М., Советское радио, 1967.
7. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, М., Наука, 1980.
8. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М., Наука, 1971.

Harlamov B. P. On the limit distribution function for meanings of a diffusion semi-Markov process on interval with unattainable boundaries.

A diffusion semi-Markov process on a finite interval with unattainable boundaries is considered. It is supposed that unattainable property is not be connected with process stop in the interval. A limit theorem for alternating renewal processes is applied for to derive the limit distribution function of the diffusion process.

Институт Проблем Машиноведения РАН
С.-Петербург, Россия
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 20 октября 2021 г.