Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

В. Н. Солев

ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМАКСНОГО РИСКА В ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ФУНКЦИИ В СТАЦИОНАРНОМ ГАУССОВСКОМ ШУМЕ

§1. Введение

В настоящей работе мы исследуем задачу оценивания неизвестной функции s, лежащей в заданном подмножестве $\mathscr{L}_*$ множества L^2_{loc} локально квадратично суммируемых функций, по наблюдениям над процессом

$$y(t) = s(t) + x(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью (далее всюду с.п.) f_*, допускающей при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{2}$$

Для $\varepsilon > 0$ и $T = 1/\varepsilon$ обозначим $f_\varepsilon(u), f^\varepsilon(u)$ — "средние" значения функции f в точке u,

$$f_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, dx, \quad f^\varepsilon(u) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Tx}{\pi T x^2}\, f(u+x)\, dx. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что для неотрицательная функция f выполнен следующий аналог условия Макенхаупта (см. подробнее в [6])

$$\sup_{u,\varepsilon>0} f^\varepsilon(u) \times \left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u) < \infty. \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00273, и программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики.”

Из условия (4) следует условие Макенхаупта

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_{u,\varepsilon>0} f_\varepsilon(u) \times \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u) < \infty. \tag{5}$$

Отметим (см. [6]), что при условии (5) локально квадратично суммируемая функция f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{6}$$

Если выполнено условие (4), то при некоторых $0 < c \leqslant C < \infty$, не зависящих от $\varepsilon > 0$ и $u \in \mathbb{R}$,

$$c\, f_\varepsilon(u) \leqslant f^\varepsilon(u) \leqslant C\, f_\varepsilon(u). \tag{7}$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ банахово пространства локально квадратично суммируемых функций s с нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$,

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int_x^{x+1} |s\,(t)|^2\, dt. \tag{8}$$

Пусть Λ – счетное множество в $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u-v| > 0. \tag{9}$$

Мы также будем предполагать, что точки спектрального множества Λ достаточно плотно расположены на отрезках $[-m, m]$ большой длины. Именно, мы будем предполагать, что при некоторых положительных d и m_0 для достаточно больших m, $m > m_0$, при $\gamma > 0$

$$d\, m^{2\gamma+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\gamma}. \tag{10}$$

Упомянутое центрально-симметричном подмножество $\mathscr{L}_*$ выделяется при некотором $\gamma > 0$ из класса Степанова $\mathscr{L}(\Lambda) \subset \mathscr{L}$ псевдопериодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{11}$$

(см. подробнее [4]) условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 (|u|+1)^{2\gamma} \leqslant L. \tag{12}$$

Определенное в (11) и (12) подмножество $\mathscr{L}_*$ будет обозначаться $\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$. Для наших целей $\gamma = n+\beta, \beta > 0$. Напомним (см. [4]), что при условии (9) линейное множество $\mathscr{L}(\Lambda)$ является подпространством в $\mathscr{L}$. Наряду с банаховой нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$, определенной в (8), будем также рассматривать на $\mathscr{L}(\Lambda)$ гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \left\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \right\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \|s\|_{T} := \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt \right\}^{1/2}$$

Как установили Н. Винер и Р. Пэли (см. [5]), при $\tau > 0$ найдется такое $T_0 = T_0(\tau) > 0$, что при $T > T_0$

$$c_1 \|s\|_*^2 \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}}^2 \leqslant C_1 \|s\|_*^2, \quad c_2 \|s\|_{T}^2 \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}}^2 \leqslant C_2 \|s\|_{T}^2. \tag{13}$$

Здесь константы $0 < c_1 \leqslant C_1 < \infty$ и $0 < c_2 \leqslant C_2 < \infty$ зависят только от τ. При указанном T_0, функции из $\mathscr{L}(\Lambda)$ однозначно определяются своими значениями любом из отрезков $[-T_0-\varepsilon, T_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ — линейное множество функций φ, удовлетворяющих условиям

$$\varphi \in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2},\ \text{где}\ \ \widehat{\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \tag{14}$$

При $T > 0$ пусть

$$\mathcal{D}_T := \{\varphi:\ \varphi\in\mathcal{D}, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\}, \tag{15}$$

$$\mathcal{D}_T^* := \{\varphi:\ \varphi\in L^2, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\}, \tag{16}$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2 f_*(u)\,du < \infty,\ \varphi\in\mathcal{D}_T^*;\ \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2 f(u)\,du < \infty,\ \varphi\in\mathcal{D}_T.$$

При $\varphi \in \mathcal{D}_T^*$ положим

$$(x,\varphi)_{T} := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\,x(t)\,dt, \quad (s,\varphi)_{T} := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt. \tag{17}$$

Как известно (см. [1]), если $\varphi \in \mathcal{D}_T^*$, то $\mathbf{E}\,(x,\varphi)_T = \mathbf{E}_{f_*}\,(x,\varphi)_T = 0$,

$$\mathbf{E}\,|(x,\varphi)_T|^2 = \mathbf{E}_{f_*}\,|(x,\varphi)_T|^2 = \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2\, f_*(u)\, du. \qquad (18)$$

Так что величина $(y,\varphi)_T$,

$$(y,\varphi)_T = (s,\varphi)_T + (x,\varphi)_T, \quad \varphi \in \mathcal{D}_T^*, \qquad (19)$$

является несмещенной оценкой значения функционала $(s,\varphi)_T$ по наблюдениям (19), причем

$$\mathbf{E}_{f_*}\,|(y,\varphi)_T - (s,\varphi)_T|^2 = \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2\, f_*(u)\, du. \qquad (20)$$

Очевидно, при условии (2) и (9) при $\gamma > 1$ задача оценивания функции s, лежащей в $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$, по наблюдениям (1) эквивалентна той же задаче по наблюдениям (19). Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$, построенной по наблюдениям (1) и предназначенной для оценивания s, будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*;f_*) = \sup_{s\in\mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f_*}\,\|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}}\,. \qquad (21)$$

Для минимаксного риска будем использовать обозначение $\mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*;f_*)$,

$$\mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*;f_*) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*;f_*)\,. \qquad (22)$$

В работе [12] найдена оценка сверху для для величины $\mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*;f_*)$. Настоящая работа посвящена оценке снизу величины минимаксного риска. Мы в основном будем использовать подход и обозначения, предложенные в работе [12].

Сопоставим функции $s(t)$ из $\mathscr{L}(\Lambda)$ вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(s) = (a(u),\ u\in\Lambda)$ ее коэффициентов в разложении (11), обозначая $\boldsymbol{A}$ соответствующий линейный оператор $\boldsymbol{A}s = \boldsymbol{a}(s)$. Пусть $\|\boldsymbol{a}\|_2$ норма вектора $\boldsymbol{a}$ в пространстве $l^2(\Lambda)$,

$$\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 = \|s\|_*^2. \qquad (23)$$

Риск от использования оценки $\widehat{\boldsymbol{a}}_T = (\widehat{a}_T(u),\ u\in\Lambda)$, построенной по наблюдениям (1) и предназначенной для оценки $\boldsymbol{a}$, будем измерять величиной

$$R_T(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*; f_*) = \sup_{\boldsymbol{a} \in \mathscr{L}^*} \mathbf{E}_{f_*} \|\widehat{\boldsymbol{a}}_T - \boldsymbol{a}\|_2^2, \quad \mathscr{L}^* = A\mathscr{L}_*. \tag{24}$$

Пусть $R_T^*(\mathscr{L}_*; f_*)$ – соответствующий минимаксный риск,

$$R_T^*(\mathscr{L}_*; f_*) = \inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}_T} R_T(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*; f_*). \tag{25}$$

Из (13) и (23) следует, что при $\tau > 0$ и $T > T_0$ существует такая константа $c = c(\tau)$, что

$$c(\tau)\, R_T^*(\mathscr{L}_*; f_*) \leqslant \mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*; f_*)\,. \tag{26}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa(u),\ u \in \Lambda)$ — вектор с неотрицательными координатами из $l^2(\Lambda)$,

$$\sum_{u \in \Lambda} |\kappa(u)|^2 (|u| + 1)^{2\gamma} \leqslant L. \tag{27}$$

Обозначим $\mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa})$ прямоугольник в $l^2(\Lambda)$ состоящий из векторов $\boldsymbol{a} = (a(u),\ u \in \Lambda)$, выделяемых условиями $|a(u)| \leqslant \kappa(u),\ u \in \Lambda$. Очевидно, $\mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa}) \subset \mathscr{L}_*$. Поэтому для любой оценке $\widehat{\boldsymbol{a}}_T = (\widehat{a}_T(u),\ u \in \Lambda)$, построенной по наблюдениям (1),

$$R_T(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa}); f_*) \leqslant R_T(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*; f_*). \tag{28}$$

Из (28) и (26) следует, что для построения оценки снизу для величины $\mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*; f_*)$ достаточно построить оценку снизу для величины $R_T^*(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa}); f_*)$,

$$R_T^*(\mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa}); f_*) = \inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}_T} R_T(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathscr{L}_*(\boldsymbol{\kappa}); f_*).$$

Нам потребуется одно вспомогательное утверждение, принадлежащее С.В. Решетову. Пусть

$$Y(u) = a(u) + X(u),\ u \in \Lambda_0, \tag{29}$$

где Λ_0 — конечное множество, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa(u),\ u \in \Lambda_0)$ — вектор с неотрицательными координатами. Обозначим $\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\kappa})$ прямоугольник, состоящий из векторов $\boldsymbol{a} = (a(u),\ u \in \Lambda_0)$, выделяемых условиями $|a(u)| \leqslant \kappa(u),\ u \in \Lambda_0$. Предположим, что $(X(u),\ u \in \Lambda_0)$ — гауссовский вектор с нулевым средним. Рассмотрим задачу оценивания вектора $\boldsymbol{a}$ по наблюдениям $(Y(u),\ u \in \Lambda_0)$. Риск от использования оценки

$\widehat{\boldsymbol{a}} = (\widehat{a}(u),\ u \in \Lambda_0)$, построенной по наблюдениям (29) и предназначенной для оценивания $\boldsymbol{a}$, будем измерять величиной

$$R(\widehat{\boldsymbol{a}};\boldsymbol{\kappa}) = \sup_{\boldsymbol{a}\in\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\kappa})} \mathbf{E} \sum_{u\in\Lambda_0} |a(u) - \widehat{a}(u)|^2. \tag{30}$$

Обозначая $R^*(\boldsymbol{\kappa})$ минимаксный риск,

$$R^*(\boldsymbol{\kappa}) = \inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}} R(\widehat{\boldsymbol{a}};\boldsymbol{\kappa}). \tag{31}$$

Мы хотим сравнить величину $R^*(\boldsymbol{\kappa})$ с величиной минимаксного риска $\mathcal{R}^*(\boldsymbol{\kappa})$ в той же задаче, но в предположении, что $(X(u),\ u \in \Lambda_0)$ — гауссовский вектор с нулевым средним и независимыми координатами.

Лемма 1.1. *Предположим, что гауссовский вектор* $(X(u),\ u \in \Lambda_0)$ *с нулевым средним удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{E}\,|X(u) - \sum_{v\in\Lambda_0, v\neq u} b(v)X(v)|^2 \geqslant \mathbf{E}\,|X(u)|^2(1-\rho^2), \quad u \in \Lambda_0, \tag{32}$$

где ρ *— константа,* $0 < \rho < 1$, *не зависящая от выбора коэффициентов* $(b(v),\ v \in \Lambda_0, v \neq u)$. *Тогда существует такая константа* $c_1 = c_1(\rho) > 0$, *что*

$$c\,\mathcal{R}^*(\boldsymbol{\kappa}) \leqslant R^*(\boldsymbol{\kappa}). \tag{33}$$

Заметим, что в (32) предположение о том, что $\rho = 0$, соответствует случаю, когда $(X(u),\ u \in \Lambda_0)$ — гауссовский вектор с независимыми координатами. В этом случае И.А. Ибрагимов и Р.З. Хасьминский установили в [2], что при некотором $1 < \mu < \infty$

$$R_L^*(\boldsymbol{\kappa}) \leqslant \mu\, R^*(\boldsymbol{\kappa}), \quad \text{где} \quad R_L^*(\boldsymbol{\kappa}) = \inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}_L} R(\widehat{\boldsymbol{a}}_L;\boldsymbol{\kappa}) \tag{34}$$

а нижняя грань берется по линейным оценкам $\boldsymbol{a}_L$. Обозначим $\sigma^2(u) = \mathbf{E}\,|X(u)|^2$. Поскольку (см. [3]) в случае, когда $(X(u),\ u \in \Lambda_0)$ — гауссовский вектор с независимыми координатами,

$$R_L^*(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{u\in\Lambda_0} \frac{\kappa^2(u)\,\sigma^2(u)}{\sigma^(u) + \kappa^2(u)},$$

то мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1.2. *В условиях леммы* 1.1 *существует такая константа* $c_2 = c_2(\rho) > 0$, *что*

$$c_2 \sum_{u\in\Lambda_0} \frac{\kappa^2(u)\,\sigma^2(u)}{\sigma(u)+\kappa^2(u)} \leqslant R^*(\boldsymbol{\kappa}). \tag{35}$$

§2. Пространство $L^2_T(\Lambda)$

Мы будем использовать обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T,T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1,s_2)_T := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\,\overline{s_2(t)}\,dt$$

и нормой $\|s\|_T$. Нам удобно предполагать, что функции из пространства L^2_T продолжены на всю числовую ось нулем вне отрезка $[-T,T]$. Обозначим $L^2_T(\Lambda)$ — подпространство пространства L^2_T, порожденное функциями из $\mathscr{L}(\Lambda)$. Пусть A_T — оператор умножения на индикаторную функцию $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$. Из (13) следует, что при $\tau(\Lambda)>0$ и $T>T_0$ оператор A_T является ограниченным и ограниченно обратимым оператором, $A_T:\ \mathscr{L}(\Lambda)\to L^2_T(\Lambda)$. При этом нормы операторов A_T равномерно ограничены по $T>T_0$ так же, как нормы обратных операторов $A_T^{-1}:\ L^2_T(\Lambda)\to\mathscr{L}(\Lambda)$.

Пусть $\varphi_u^T(t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\,e^{itu}$. Из упомянутого условия также следует, что система $\{\varphi_u^T(t),\ u\in\Lambda\}$ является базисом Рисса в $L^2_T(\Lambda)$, а потому существует сопряженная система $\{\psi_u^T,\ u\in\Lambda\}$ из $L^2_T(\Lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \varphi_u^T(t)\,\overline{\psi_u^T(t)}\ dt = \delta_{u,v}, \quad u,v\in\Lambda. \tag{36}$$

Сопряженная система $\{\psi_u^T,\ u\in\Lambda\}$ также является базисом Рисса в $L^2_T(\Lambda)$. В дальнейшем сопряженной системой будем называть любую систему $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ функций из L^2_T, удовлетворяющую (36), не обязательно лежащую в $L^2_T(\Lambda)$. В работе [9] такая система определена соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)}\, g(t) = \frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T-r; s)\, ds. \qquad (37)$$

Здесь $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$ — сопряженная система из $L_r^2(\Lambda),\ r > T_0$.

§3. Спектральная плотность

Мы предположили, что спектральная плотность f_* процесса процесса $x(t)$ представима при некотором $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 1$, в виде

$$f_* = f_0 f, \quad \text{где} \quad f_0(u) = \frac{1}{(1+u^2)^n}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \qquad (38)$$

а функция f удовлетворяет условию

$$\varrho := \sup_{u, T>0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Tx}{\pi T x^2}\, f(u+x)\, dx \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Tx}{\pi T x^2}\, \frac{1}{f(u+x)}\, dx < \infty. \quad (39)$$

Мы также отметили, что при условии (39) выполнено условие Макенхаупта

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_{u, \varepsilon>0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, dx \times \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{f(u+x)}\, dx < \infty, \qquad (40)$$

причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\, du < \infty. \qquad (41)$$

В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что существуют такие константы $\alpha > -1$ и $m_0 > 0$, что при некоторых $0 < b \leqslant B < \infty$, всех $m > m_0$ и достаточно малых $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$b\, \varepsilon^\alpha \leqslant \frac{1}{N(m)} \sum_{u \in \Lambda, |u| \leqslant m} f_\varepsilon(u)\, (1+|u|)^{-2n} \leqslant B\, \varepsilon^\alpha. \qquad (42)$$

Здесь для $m > 0$ через $N(m)$ обозначено число точек из Λ, содержащихся в отрезке $[-m, m]$, а константы b, B, m_0 и ε_0 зависят только от Λ. При этом величина m_0 выбирается, в частности, так, чтобы $N(m) > 0$.

Очевидно, $\tau(N(m)-1)\leqslant 2m$.

Легко выводится (подробнее см. в [10]), что при условии (39) существуют такие константы $0 < c \leqslant C < \infty$, зависящие только от ϱ, что при $\varepsilon = 1/T$

$$c\, f_\varepsilon(u) \leqslant f^\varepsilon(u) \leqslant C\, f_\varepsilon(u), \tag{43}$$

$$c\, \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u) \leqslant \left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon \leqslant C\, \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u). \tag{44}$$

Определение величин $f^\varepsilon(u)$, $\left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u)$ смотри в (3).

§4. Оценка снизу минимаксного риска

Оценим снизу величину минимаксного риска $\mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*; f_*)$. Напомним, что из (13) и (23) следует, что при $\tau > 0$ и $T > T_0$ существует такая константа $c = c(\tau)$, что

$$c(\tau)\, R_T^*\big(\mathscr{L}_*; f_*\big) \leqslant \mathscr{R}_T^*\,(\mathscr{L}_*; f_*)\,. \tag{45}$$

Поэтому достаточно оценить снизу величину $R_T^*\big(\mathscr{L}_*; f_*\big)$. Далее мы повторяем конструкцию работы [12].

Пусть $\mathscr{D} = (\mathbf{1} + \frac{d}{dt})$, где $\mathbf{1}$ – тождественный оператор. Перейдем от процесса

$$(y,\varphi)_T = (s,\varphi)_T + (x,\varphi)_T, \quad \varphi \in \mathcal{D}_T, \tag{46}$$

к процессу

$$(\mathscr{D}^n\, y,\varphi)_T = (\mathscr{D}^n\, s,\varphi)_T + (\mathscr{D}^n\, x,\varphi)_T, \quad \varphi \in \mathcal{D}_T, \tag{47}$$

полагая

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, \mathscr{D} y(t)\, dt := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, y(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dy(t).$$

Следует напомнить, что при условии (2) процесс $x(t)$ является
$n-1$ раз дифференцируемым в среднеквадратичном, причем последняя производная является процессом со стационарными приращениями и при условии (2) определены функционалы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, d\mathscr{D}^{n-1} x(t), \quad \varphi(t) \in \mathcal{D}_T.$$

Что касается функции s из $\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$, то она n раз непрерывно дифференцируемым при $\gamma=n+\beta,\ \beta>0$. Стало быть, процесс $((\mathscr{D}^n\,y,\varphi)_T),\ \ \varphi\in\mathcal{D}_T)$ вполне определен. При этом $\mathbf{E}\,(\mathscr{D}^n\,y,\varphi)_T=(\mathscr{D}^n\,s,\varphi)_T$ и

$$\mathbf{E}\,|(\mathscr{D}^n\,x,\varphi)_T|^2=\frac{1}{4T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}(u)^2\,f(u)\,du. \tag{48}$$

Пусть $\alpha>-1,\beta>1$, величина $\varepsilon=1/T$ связана с неотрицательным m соотношением $m^{1+2\beta+2n}\,\varepsilon^{1+\alpha}=1$. Обозначим Λ_T пересечение Λ с отрезком $[-m,m]$. Для простоты написания положим

$$Y_n(u)=(1+iu)^{-n}\,S_n(u)+(1+iu)^{-n}X_n(u),u\in\Lambda_T, \tag{49}$$

где

$$S_n(u)=(\mathscr{D}^n s,g_u^T)_T,\quad X_n(u)=(\mathscr{D}^n x,g_u^T)_T,$$

где $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ система, построенная в (37).

Отметим, что для $s\in\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$,

$$S_n(u)=(1+iu)^n\,a(u),\quad \text{если}\quad s(t)=\sum_{u\in\Lambda}a(u)\,e^{iut}. \tag{50}$$

Поэтому $\mathbf{E}\,Y_n(u)=a(u)$,

$$\mathbf{E}\,|Y_n(u)-a(u)|^2=\frac{1}{4T^2(1+u^2)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g_u^T}(v)|^2\,f(v)\,dv. \tag{51}$$

Приведем следующее утверждение, содержащееся в [11].

Лемма 4.1. *Пусть* $\tau=\tau(\Lambda)>0,\ \lambda(f)\leqslant\lambda<\infty$. *Тогда найдутся такие константы* $0<c(\tau,r,\lambda)\leqslant C(\tau,r,\lambda)<\infty$ *и* $T_0(r,\tau)>0$, *зависящие только от* λ,r *и* τ, *что при* $T>T_0(r,\tau)$ *для преобразования Фурье* $\widehat{g_u^T}$ *функции* g_u^T *при* $\varepsilon=1/T$ *справедливы оценки*

$$c(\tau,r,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u)\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}_u^T(x)|^2\,f(x)\,dx\leqslant C(\tau,r,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u). \tag{52}$$

В [9] установлено, что при условии (39), если величина $\tau=\tau(\Lambda)>0$, то найдется такая константа $c(\tau,r,\tau)>0$, что для любого конечного набора $\{b(v),\,v\in\Lambda\}$

$$\mathbf{E}\,|X_n(u)\sum_{v\neq u}b(u)X_v|^2\geqslant c(\tau,r,\lambda)\,\mathbf{E}|X_n(u)|^2. \tag{53}$$

Поэтому из леммы 1.2 получаем, что существует такая константа $c_2 = c_2(\rho) > 0$, что

$$c_2 \sum_{u\in\Lambda_m} \kappa^2(u) \wedge \sigma^2(u) \leqslant R^*(\boldsymbol{\kappa}), \tag{54}$$

при

$$\sigma^2(u) = \frac{1}{4T^2(1+u^2)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g_u^T}(v)|^2 f(v)\, dv,$$

Неотрицательную функцию $\kappa(u)$ выберем следующим образом при $|u| \leqslant m$

$$\kappa(u) = \frac{L\sigma^2(u)}{\sum\limits_{u\in\Lambda_m} \sigma^2(u)(1+|u|)^{2n+2\beta}}.$$

При $|u| > m$ полагаем $\kappa(u) = 0$. Далее в точности повторяя рассуждения работы [11], приходим к оценке

$$\sum_{u\in\Lambda_m} \kappa^2(u) \wedge \sigma^2(u) \geqslant C\, T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}}.$$

Теорема 4.2. *Пусть в задаче оценивания* (1) *параметрическое множество* $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$, *спектральная плотность* f_* *процесса* x *представима в виде* (1), *удовлетворяет аналогу условия Макенхаупта* (4) *и условию* (42). *Предположим, что для целого положительного* n *и* $\beta > 1/2$ *параметр* $\gamma = n + \beta$, *а спектральное множество* Λ *удовлетворяет условию отделимости и условию* (10). *Тогда для для некоторого* $C > 0$ *достаточно больших* $T > T_0$ *имеет место оценка*

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}_*; f_*) \geqslant C\, T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}}.$$

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* М.: Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* М., Мир, 1974.
3. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax risk over hyperrectangles, and implications.* — The Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 1416–1437.
4. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus, **181** (1925), 90–92.
5. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* М., Наука, 1964.
6. B. J. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* N.Y., Academic Press, 1981.

7. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
8. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.
9. В. Н. Солев, *Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
10. В. Н. Солев, *Локальная версия условия Маккенхаупта и точность оценивания неизвестной псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 261–275.
11. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме: новые спектральные условия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2018), 275–285.
12. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 277–290.
13. С. В. Решетов, *Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 181–189.
14. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, сер. 1 **2** (2010), 106–115.

Solev V. N. The lower bound of the minimax risk in a problem of estimating the function in stationary gaussian noise.

In the paper, we construct the lower bounds of the minimax risk in the estimation problem, as we observe the unknoun pseudo periodic function in a Gaussian stationary noise with the spectral density satisfying some version of the Muckenhoupt condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия

Санкт-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург 199034, Россия

E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 15 ноября 2021 г.