Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

И. А. Рагозин

НОВЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЭЛЕЯ, ОСНОВАННЫЕ НА НЕКОТОРОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ И НЕКОТОРОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ

§1. Введение.

Целью данной работы является построение и асимптотическое исследование новых критериев согласия распределения Рэлея, основанных на некоторой характеризации и специальном свойстве. Распределение Рэлея с параметром масштаба $\sigma > 0$ ($Rayleigh(\sigma)$) имеет следующую плотность распределения:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geqslant 0$$

и функцию распределения:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geqslant 0.$$

Начнем с введения специального свойства, которое войдет в основу построения критериев согласия для распределения Рэлея:

Пусть X, Y – независимые случайные величины, с распределением $Rayleigh(\sigma)$, тогда их частное имеет распределение, определяемое следующими функцией распределения и плотностью:

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \geqslant 0,$$

так как распределение частного не зависит от σ, то основанные на этом свойстве критерии согласия подходят для проверки сложной гипотезы согласия о принадлежности семейству распределений Рэлея с

Ключевые слова: характеризация распределений, распределение Рэлея, U-статистики, бахадуровская эффективность, большие уклонения, информация Кульбака–Лейблера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-ННИО (грант No. 20-51-12004).

произвольным параметром масштаба. Однако, к сожалению, это свойство не является характеризацией, так как, например, следующее семейство плотностей обладает таким же свойством:

$$\frac{\sigma^2}{x^3}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2x^2}\right), \quad \sigma > 0,\, x \geqslant 0.$$

До этого не было представлено ни одного асимптотического исследования критериев согласия для распределения Рэлея, поэтому для разнообразия построим еще критерии согласия и сравним их с критериями, основанными на специальном свойстве. Используя характеризацию М. М. Десу [1] для экспоненциального семейства распределений, можно получить следующую характеризацию для семейства распределений Рэлея, которая тоже будет положена в основу построения статистик для проверки сложной гипотезы согласия о принадлежности семейству распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба.

Пусть X и Y – независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с непрерывной функцией распределения R. Тогда

$$X \stackrel{d}{=} \sqrt{2}\,\min(X,Y),$$

тогда и только тогда, когда R принадлежит семейству распределений Рэлея с произвольным параметром формы $\sigma > 0$ с плотностью $r(x,\sigma)$, $\sigma > 0$, $x \geqslant 0$, где

$$r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

При помощи теории U-статистик, основываясь на введенных фактах, будут построены новые критерии согласия для проверки сложной гипотезы о принадлежности к классу распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба σ. Затем на основе полученных значений бахадуровской эффективности будет выполнено асимптотическое сравнение с сопутствующим нахождением предельного распределения и логарифмической асимптотики вероятности больших уклонений. Отметим, что помимо всего, также будет освещена задача о различении распределений Рэлея и Райса, что является важной и актуальной задачей в статистической радиотехнике [6].

§2. Построение статистик

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.с.в. с функцией распределения R. Используя характеризацию и специальное свойство из введения, будем проверять сложную гипотезу согласия H_0, согласно которой R – ф.р. рэлеевского закона с плотностью $r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x \geqslant 0,\ \sigma > 0$, против альтернативы H_1, состоящей в том, что гипотеза H_0 не выполняется.

Как уже отмечалось во введении, характеризация выполняется для семейства распределений Рэлея, и если рассматривать случайные величины с некоторым параметром масштаба, то распределение частного не изменится, а значит, на самом деле мы можем проверять сложную гипотезу согласия, заключающуюся в принадлежности семейству распределений Рэлея, инвариантных относительно масштаба.

Для начала построим статистики основанные на характеризации. Для этого сначала рассмотрим следующую U-эмпирическую функцию распределения:

$$U_{1,n}(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{1}\left\{\sqrt{2}\,\min(X_i, X_j) < t\right\}.$$

Введем следующие статистики: интегральную статистику:

$$IU_{1,n} = \int_0^\infty (F_n(t) - U_{1,n}(t))\, dF_n(t)$$

и статистку типа Колмогорова:

$$KU_{1,n} = \sup_{t\geqslant 0} |F_n(t) - U_{1,n}(t)|,$$

где $F_n(t)$ – стандартная эмпирическая функция распределения.

Теперь построим статистики, основанные на специальном свойстве. Для этого сначала рассмотрим следующую U-эмпирическую функцию распределения:

$$U_{2,n}(t) = \binom{n}{2}^{-1} \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{\mathbf{1}\{\frac{X_i}{X_j} < t\} + \mathbf{1}\{\frac{X_j}{X_i} < t\}}{2} \right)\right).$$

Введем следующие статистики: интегральную статистику:

$$IU_{2,n} = \int\limits_{o}^{\infty} \left(U_n(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

взвешенную интегральную статистику:

$$IU_{2,n,\sigma} = \int\limits_{o}^{\infty} \left(U_n(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) \sigma^2\, t\, e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, dt$$

и статистику типа Колмогорова:

$$KU_{2,n} = \sup_{t\geqslant 0} \left| U_n(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right|.$$

Эти статистики будут поставлены в основу для проверки H_0 против альтернативы H_1. По теореме Гливенко–Кантелли для U-эмпирических функций [2] ввиду рассматриваемой характеризации и специального свойства построенные статистики при основной гипотезе должны быть малы. Однако статистики, основанные на специальном свойстве, как было отмечено во введении, не являются состоятельными, так как не могут гарантировать соответствия именно семейству распределений Рэлея. Но при этом годятся для отклонения нулевой гипотезы.

§3. Эффективность по Бахадуру

Одна из целей данной работы – асимптотическое сравнение построенных статистик, так как статистики типа Колмогорова $KU_{1,n}$ и $KU_{2,n}$ не являются асимптотически нормальными, то понятие бахадуровской эффективности представляется наиболее удобным для сравнения таких статистик, поэтому изложим основные факты теории Бахадура [7, 8].

Пусть есть последовательность наблюдений $s = (X_1, X_2, \dots)$ с общим распределением $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Будем проверять гипотезу $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против гипотезы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Допустим, что для проверки указанной гипотезы используется последовательность статистик $T_n(s) = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, считая критическими их большие значения. Введем следующие обозначения:

$$G_n(t) = \mathbf{P}_{\theta_0}(s : T_n(s) < t), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0,$$
$$L_n(s) = 1 - \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \{G_n(T_n(s))\},$$

где величина $L_n(s)$ называется достигаемым уровнем или P-значением. Теперь определим одно из основных понятий в этой теории – точный бахадуровский наклон $c_T(\theta)$ последовательности $\{T_n\}$ при H_1, определяемый как положительная и конечная функция, описывающая скорость экспоненциального убывания достигаемого уровня последовательности статистик при альтернативе H_1, равная:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln(L_n(s)) = -\frac{1}{2}c_T(\theta), \quad \text{п.н.} \quad \mathbf{P}_\theta.$$

Однако вычислить точный наклон по этой формуле невозможно, и для этого воспользуемся фундаментальной теоремой Бахадура [6, 7], которая утверждает, что точный бахадуровский наклон для последовательности статистик T_n существует и вычисляется следующим образом:

$$c_T(\theta) = 2k(b(\theta)), \quad \forall\theta\in\Theta_1,$$

где функции $k(\cdot)$, $b(\cdot)$ и последовательность статистик $\{T_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $T_n \to b(\theta)$ по $\mathbf{P}_\theta$-вероятности, $\theta\in\Theta_1$, где $-\infty < b(\theta) < \infty$, и
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbf{P}_\theta(T_n \geqslant a) = -k(a)$ для любого $\theta\in\Theta_0$ и любых a из некоторого открытого интервала I, где функция k непрерывна на I, причем $\{b(\theta),\, \theta\in\Theta_1\}\subset I$.

Для бахадуровского точного наклона выполнено следующее неравенство:

$$c_T(\theta) \leqslant 2K(\theta),$$

где $K(\theta)$ – информация или "расстояние" Кульбака–Лейблера между альтернативой и семейством распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба [6, 7]. Поэтому естественно локальную бахадуровскую эффективность последовательности $\{T_n\}$, определить следующей формулой:

$$\mathrm{eff}_T = \lim_{\theta\to 0}\frac{c_T(\theta)}{2K(\theta)}. \tag{1}$$

§4. Информация Кульбака–Лейблера

Сначала опишем альтернативы $f_i(x,\theta)$, $x\geqslant 0$, $i = 1,\ldots,4$, которые будут рассмотрены в этой работе:

- Альтернатива Вейбулла с плотностью:

$$f_1(x,\theta) = \frac{(1+\theta)}{2^\theta}\, x^{2\theta+1} \exp\left(-\frac{x^{2\,(1+\theta)}}{2^{1+\theta}}\right).$$

- Альтернатива Лемана с плотностью:

$$f_2(x,\theta) = (1+\theta)\, f(x)\, F^\theta(x) = (1+\theta) x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^\theta.$$

- Гамма альтернатива с плотностью:

$$f_3(x,\theta) = \frac{x^{\theta+1}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{\theta}{2}}\, \Gamma\left(\frac{\theta}{2}+1\right)}.$$

- Альтернатива Райса с плотностью:

$$f_4(x,\theta) = x \exp\left(-\frac{(x^2+\theta^2)}{2}\right) I_0(x\cdot\theta),$$

  где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого типа порядка 0.

Теперь вычислим информацию Кульбака–Лейблера, так как в нашем случае гипотеза H_0 сложная, то для альтернативной плотности $f(x,\theta)$ $K(\theta)$ определяется следующим образом:

$$K(\theta) = \inf_{\sigma>0} \int\limits_0^\infty \ln \frac{f(x,\theta)}{r(x,\sigma)}\, f(x,\theta)\, dx,$$

где в нашем случае функция $r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$.

Лемма 1. *Для некоторой альтернативной плотности $f(x,\theta)$ при $\theta \to 0$ можно получить следующее выражение для информации Кульбака–Лейблера*:

$$2K(\theta) = \theta^2\left(I(0) - \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2\right),$$

где $I(0)$ – информация Фишера.

Доказательство. Инфимум в определении информации Кульбака–Лейблера достигается при $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx}$. Тогда

$$K(\theta) = \int\limits_0^\infty \ln(f(x,\theta))\, f(x,\theta)\, dx$$
$$+ \int\limits_0^\infty f(x,\theta) \left(-\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx\right) + \frac{x^2}{\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx} \right) dx.$$

Из определения очевидно, что K(0)=0. Теперь найдем $K'(\theta)$:

$$K'(\theta) = \int\limits_0^\infty (\ln(f(x,\theta)) - \ln(x))\, f'_\theta(x,\theta)\, dx + \frac{\int\limits_0^\infty x^2\, f'_\theta(x,\theta)\, dx}{\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx}.$$

В точке $\theta = 0$, $K'(0) = 0$, в силу того, что $\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,0)\, dx = 2$. Вычислим теперь вторую производную:

$$K''(\theta) = \int\limits_0^\infty \frac{(f'(x,\theta))^2}{f(x,\theta)}\, dx + \int\limits_0^\infty (\ln(f(x,\theta)) - \ln(x))\, f''_{\theta^2}(x,\theta)\, dx$$
$$+ \frac{\int\limits_0^\infty x^2\, f''_{\theta^2}(x,\theta)\, dx * \int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx - \left(\int\limits_0^\infty x^2\, f'_\theta(x,\theta)\, dx\right)^2}{\left(\int\limits_0^\infty x^2\, f(x,\theta)\, dx\right)^2}.$$

Подставив значение $\theta = 0$, получим:

$$K''(0) = \int\limits_0^\infty \frac{(f'(x,0))^2}{f(x,0)}\, dx - \frac{\left(\int\limits_0^\infty x^2\, f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2}{4}$$
$$= I(0) - \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2.$$

При помощи разложения Тейлора $K(\theta) = K(0) + K'(0)\,\theta + \frac{1}{2}\,K''(0)\,\theta^2 + o(\theta^2)$ получаем то, что утверждалось в лемме. □

Заметим, что этой асимптотики θ^2 недостаточно для альтернативы Райса, так как $f'_{4,\theta}(x,0) \equiv 0$. В случае этой альтернативы получено следующее: $K_4(\theta) = \frac{1}{128}\,\theta^8 + o(\theta^8)$. Для остальных альтернатив соберем выражения для информации Кульбака–Лейблера в таблице ниже:

Таблица 1. Информация Кульбака–Лейблера при $\theta \to 0$.

Альтернативы	f_1	f_2	f_3
$2K_i(\theta)$	$\frac{\pi^2}{6}\,\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{36}\right)\,\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\,\theta^2$

§5. Интегральные статистики

5.1. Предельные свойства статистики $IU_{1,n}$. Сначала рассмотрим вспомогательную функцию: $g(x,y;z) = \frac{1}{2} - \mathbf{1}\left\{\sqrt{2}\,\min(x,y) < z\right\}$. Тогда интегральная статистика $IU_{1,n}$ асимптотически эквивалентна U-статистике степени 3 со следующим центрированным ядром:

$$\Phi_1(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(g(x,y;z) + g(y,z;x) + g(x,z;y)\right).$$

Найдем проекцию этого ядра:

$$\Psi_1(t) = \mathbf{E}\left(\Phi_1(X,Y,Z)|Z=t\right) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{4}{9}e^{-\frac{3t^2}{2}}, \quad t \geqslant 0.$$

Теперь вычислим дисперсию проекции:

$$\Delta_1^2 = \mathbf{E}\Psi_1^2(X) \approx 0.00291,$$

следовательно ядро Φ_1 невырождено, а тогда по теореме Хёффдинга [2]:

$$\sqrt{n}\,IU_{1,n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 9\Delta_1^2\right).$$

Так как ядро Φ_1 центрировано и ограничено, то мы можем воспользоваться результатами о больших уклонениях U-статистик из работы [3]:

Теорема 2. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbf{P}(IU_{1,n} > t) = h_1(t),$$

где h – некоторая непрерывная функция, у которой важна асимптотика к нуле и равная $h_1(t) \sim -\frac{t^2}{18\,\Delta_1^2}$, при $\quad t \to 0$.

5.2. Предельные свойства статистики $IU_{2,n,\sigma}$. Теперь рассмотрим интегральную статистику $IU_{2,n,\sigma}$, основанную на специальном свойстве. Эта статистика эквивалентна U-статистике степени 2 с центрированным ядром:

$$\begin{aligned}\Phi_2(x,y;\sigma) &= \frac{e^{-\frac{\sigma^2\,x^2}{2y^2}} + e^{-\frac{\sigma^2\,y^2}{2x^2}}}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\,e^{\frac{\sigma^2}{2}}\,\sigma^2\ \mathrm{Ei}\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\\ &= \frac{e^{-\frac{\sigma^2\,x^2}{2y^2}} + e^{-\frac{\sigma^2\,y^2}{2x^2}}}{2} - c(\sigma),\end{aligned}$$

где $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция. Отметим, что введенная ранее статистика $IU_{2,n}$ является частным случаем при $\sigma = 1$. Вычислим проекцию этого ядра:

$$\begin{aligned}\Psi_2(t;\sigma) &= \mathbf{E}\left(\Phi_1(X,Y;\sigma)|Y=t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2+t^2} + \sigma\, t\, K_1(\sigma\cdot t)\right) - c(\sigma), \quad t \geqslant 0,\end{aligned}$$

где $K_1(t)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Введем функцию дисперсии проекции:

$$\Delta_2^2(\sigma) = \mathbf{E}\Psi_2^2(X;\sigma) = \int\limits_0^\infty \Psi_1^2(x;\sigma)\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx > 0,$$

также можно заметить, что для каждого $\sigma > 0$ можно вычислить значение дисперсии с помощью числовых методов. Например, дисперсия проекции ядра статистики $IU_{2,n}$:

$$\Delta_{IU_2}^2 = \Delta_2^2(1) = \mathbf{E}\,\Psi_2^2(X;1) = 0.2903 - \left(\frac{\sqrt{e}\ \mathrm{Ei}(-\frac{1}{2})}{2} + 1\right)^2 \approx 0.000314.$$

Так как $\Delta_2^2(\cdot) > 0$, то ядро Φ_2 невырождено, а тогда по теореме Хёффдинга [2] при $n \to \infty$:

$$\sqrt{n}\, IU_{2,n,\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 4\Delta_2^2(\sigma)\right).$$

Так как ядро Φ_2 не только невырождено и центрировано, но и ограничено, то мы можем воспользоваться результатами о больших уклонениях U-статистик из работы [3]:

Теорема 3. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \left(\mathbf{P}(IU_{2,n,\sigma} > t)\right) = h_2(t,\sigma) \sim -\frac{t^2}{8\Delta_2^2(\sigma)} = -h_2(t,\sigma),$$

где h_2 *– некоторая непрерывная функция, у которой особенно важна асимптотика в нуле.*

5.3. Вычисление бахадуровской эффективности для интегральных статистик. Теперь мы можем вычислить локальный бахадуровский наклон по фундаментальной теореме Бахадура для наших последовательностей интегральных статистик по соответствующей формуле, которая следует из асимптотической нормальности и теорем 2 и 3.

$$c_{IU}(i,\theta) \sim h_i(b_{IU}(i,\theta)), \quad i = 1,2, \quad \text{при} \quad \theta \to 0,$$

где

$$b_{IU}(1,\theta) = \mathbf{E}_\theta \left(\Phi_1(X,Y,Z)\right), \quad b_{IU}(2,\theta) = \mathbf{E}_\theta \left(\Phi_2(X,Y;\sigma)\right).$$

Отметим, что в случае альтернатив $f_i(x,\theta)$, $i = 1,\ldots,3$, асимптотика локального бахадуровского наклона будет θ^2 при $\theta \to 0$, но в случае альтернативы Райса этой асимптотики будет недостаточно, и понадобится разложение до θ^8. Теперь вычисленные локальные бахадуровские наклоны и определенные формулой (1) эффективности для статистик $IU_{1,n}$ и $IU_{2,n}$ соберем в таблицу ниже, а также в последний столбец соберем максимальное значение бахадуровской эффективности для статистики $IU_{2,n,\sigma}$ и при каком значении σ соответственно достигается.

Таблица 2. Локальные бахадуровские эффективности для интегральных статистик.

	$IU_{1,n}$		$IU_{2,n}$		$IU_{2,n,\sigma}$	
Альтернативы	$c(\theta)$	eff	$c(\theta)$	eff	σ	eff(σ)
f_1	$1.1466 \cdot \theta^2$	0.697	$1.3197 \cdot \theta^2$	0.802	$\sigma = 1.982$	0.825
f_2	$0.4714 \cdot \theta^2$	0.807	$0.4699 \cdot \theta^2$	0.805	$\sigma = 3.25$	0.938
f_3	$0.1274 \cdot \theta^2$	0.198	$0.1303 \cdot \theta^2$	0.202	$\sigma = 3$	0.23
f_4	$0.0023 \cdot \theta^8$	0.149	$0.0045 \cdot \theta^8$	0.288	$\sigma = 1.101$	0.314

§6. Статистики типа Колмогорова и их свойства

Вернемся к рассмотрению асимптотических свойств статистик типа Колмогорова $KU_{1,n}$ и $KU_{2,n}$. К сожалению, их предельное распределение неизвестно, но при этом возможно вычислить функцию логарифмических больших уклонений при нулевой гипотезе. Введенные статистики типа Колмогорова можно рассматривать как супремум по t модуля семейства U-статистик с ядрами:

$$\Phi_1(x,y;t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}\{x<t\} + \mathbf{1}\{y<t\}\right) - \mathbf{1}\left\{\sqrt{2}\cdot\min(x,y) < t\right\}$$

и

$$\Phi_2(x,y;t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}\left\{\frac{x}{y}<t\right\} + \mathbf{1}\left\{\frac{y}{x}<t\right\}\right) - \frac{t^2}{1+t^2}$$

соответственно. Чтобы применить результат о больших уклонениях для таких статистик, вычислим проекцию каждого ядра:

$$\begin{aligned}\Psi_1(s;t) &= \mathbf{E}\left(\Phi_1(X,Y;t)|Y=s\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}\{s<t\} - e^{-\frac{t^2}{2}} - 1\right) + \mathbf{1}\left\{s > \frac{t}{\sqrt{2}}\right\} e^{-\frac{t^2}{4}},\\ \Psi_2(s;t) &= \mathbf{E}\left(\Phi_2(X,Y;t)|Y=s\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{s^2}{2t^2}} + 1 - e^{-\frac{t^2 s^2}{2}}\right) - \frac{t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Теперь вычислим функцию дисперсии и ее супремум:

$$\begin{aligned}&\Delta^2_{i,KU} = \sup_{t\geqslant 0}\Delta^2_{i,KU}(t) = \sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}\,\Psi_i^2(X;t), \quad i=1,2;\\ &i=1,\ \ \Delta^2_{1,KU} = \sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{1}{4}e^{-t^2}\left(e^{\frac{t^2}{2}}-1\right)\right) = \frac{1}{16};\ \ \text{в точке } t=\sqrt{2\ln(2)};\\ &i=2,\ \ \Delta^2_{2,KU} = \sup_{t\geqslant 0}\left(\frac{(t-1)^2\,t^2\,(t+1)^2\,(t^4+3t^2+1)}{4\,(t^2{+}1)^2\,(t^2{+}2)\,(t^2-t+1)\,(t^2+t+1)\,(2t^2{+}1)}\right)\\ &\qquad\qquad = 0.00954;\ \text{в точках } t=0.445 \quad\text{и}\quad t=2.257.\end{aligned}$$

Следовательно, ядра невырождены. Теперь, поскольку семейство ядер центрировано и ограничено, мы можем написать при справедливости H_0, применив теорему [5] о логарифмической асимптотике вероятностей больших уклонений для U-эмпирических статистик Колмогорова, следующее соотношение.

Теорема 4. *При $z > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left\{KU_{i,n} > z\right\} = h_i(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta^2_{i,KU}} = -w_i(z), \quad i = 1, 2,$$

где w_i – некоторая непрерывная функция, у которой важна асимптотика в нуле.

Теперь вычислим локальный бахадуровский наклон и локальную бахадуровскую эффективность наших статистик $KU_{i,n}$, $i = 1, 2$, при альтернативах $f_k(x, \theta)$, $k = 1, \ldots, 4$. Аналогично с формулой для бахадуровского наклона в случае интегральных статистик можно получить следующее выражение для бахадуровского наклона для статистики типа Колмогорова [4]:

$$c_{KU_i}(\theta, f) \sim w_i\left(b^2_{KU}(i;\theta)\right) = \frac{b^2_{KU}(i;\theta)}{4\Delta^2_i}; \quad \theta \to 0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$b_{KU}(i;\theta) = \sup_{t\geqslant 0}\left|\mathbf{E}_\theta\left(\Phi_i(X, Y; t)\right)\right|.$$

Так же как и в случае интегральных статистик локальный бахадуровский наклон при альтернативе Райса f_4 имеет асимптотику θ^8, $\theta \to 0$, в то время как для остальных рассматриваемых альтернатив асимптотика θ^2, $\theta \to 0$. Все вычисленные локальные бахадуровские наклоны и локальные бахадуровские эффективности соберем в таблицу ниже.

Таблица 3. Локальная бахадуровская эффективность для статистик типа Колмогорова.

	$KU_{1,n}$		$KU_{2,n}$	
Альтернативы	$c(\theta)$	eff	$c(\theta)$	eff
f_1	$0.2601 \cdot \theta^2$	0.158	$1.3134 \cdot \theta^2$	0.798
f_2	$0.1054 \cdot \theta^2$	0.181	$0.518 \cdot \theta^2$	0.886
f_3	$0.028 \cdot \theta^2$	0.043	$0.564 \cdot \theta^2$	0.821
f_4	$0.0085 \cdot \theta^8$	0.544	$0.0038 \cdot \theta^8$	0.243

§7. Заключение

В данной работе построены новые критерии согласия для семейства распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба σ, основанные на специальном свойстве и характеризации, полученной из характеризации Десу для экспоненциального распределения, что позволяет проверять сложную гипотезу согласия. До этого не было ни одной статьи, посвященной асимптотическому исследованию и сравнению критериев согласия для семейства распределений Рэлея, в том числе и для простых гипотез согласия тоже. Для каждого критерия получена логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений при нулевой гипотезе и вычислена локальная бахадуровская эффективность для подходящих альтернатив. Было выполнено асимптотическое сравнение критериев на основе значений бахадуровской эффективности в случае альтернативного распределения Райса, что является важной и актуальной задачей в статистической радиотехнике. Неожиданно, что лучшим критерием в бахадуровском смысле является статистика типа Колмогорова, основанная на характеризации Десу. Также в половине случаев (для f_1 и f_2) наиболее эффективным критерием является интегральная статистика $IU_{2,\sigma}$ с рэлеевским весом, которая при всех альтернативах может достигать значения бахадуровской эффективности выше, чем другие рассмотренные интегральные статистики. Нельзя не отметить довольно высокие значения бахадуровской эффективности критерия типа Колмогорова, основанного на специальном свойстве, который во при всех альтернативах оказался эффективнее интегрального критерия IU_1, что является нечастым явлением в этой теории, так как обычно интегральный критерий превосходит супремальный [6], в бахадуровском смысле.

Таблица 4. Локальная бахадуровская эффективность тестовых статистик.

	Альтернативы			
	f_1	f_2	f_3	f_4
IU_1	0.697	0.807	0.198	0.149
IU_2	0.802	0.805	0.202	0.288
$IU_{2,\sigma}$	0.825	0.938	0.23	0.314
KU_1	0.158	0.181	0.043	0.544
KU_2	0.798	0.886	0.821	0.243

Благодарности

Автор благодарен ушедшему из жизни Я. Ю. Никитину за постановку данной задачи и за многочисленные ценные советы для продолжения данного исследования.

Список литературы

1. M. M. Desu, *A characterization of the exponential distribution by order statistics.* — Ann. Math. Statist. **42**, No. 2 (1971), 837–838,
2. В. С. Королюк, Ю. В. Боровских, *Теория U-статистик,* Наукова думка, 1989.
3. Ya. Yu. Nikitin, E. V. Ponikarov, *Rough large deviation asymptotics of Chernoff type for von Mises functionals and U-statistics.* — Proc. St.Petersburg Math. Soc. **7** (1999), 124–167.
4. Ya. Yu. Nikitin, K. Yu. Volkova, *Efficiency of exponentiality tests based on a special property of exponential distribution.* — Math. Methods Statist. **25**, No. 1 (2016), 54–66.
5. Ya. Yu. Nikitin, *Large deviations of U-empirical Kolmogorov–Smirnov tests, and their efficiency.* — J. Nonpar. Statist. **22** (2010), 649–668.
6. Я. Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических статистических критериев,* М., Наука, 1995.
7. R. R. Bahadur, *Some Limit Theorems in Statistics*, Philadelphia, SIAM, 1971.
8. R. R. Bahadur, *Stochastic comparison of tests.* — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 276–295.

Ragozin I. A. New goodness-of-fit tests for the family of Rayleigh distributions, based on a special property and a characterization.

In this paper we construct new goodness-of-fit tests for Rayleigh distribution family with an arbitrary scale-parameter σ, based on some property and some characterization. We describe their limiting distributions, calculate local Bahadur efficiencies under close alternatives and perform asymptotic comparison of our test statistics.

Национальный исследовательский
университет "Высшая школа
экономики" (НИУ ВШЭ),
ул. Союза Печатников, 16,
190008, С.-Петербург, Россия
E-mail: ragza@yandex.ru

Поступило 9 ноября 2021 г.