Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

В. А. Приезжев, П. А. Приезжев, С. Б. Тихомиров

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ ДЛЯ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ С УБЫВАЮЩИМИ ОШИБКАМИ

§1. Введение

Теория отслеживания псевдотраекторий на данный момент является классическим разделом качественной теории динамических систем (см., например, монографии [1, 2]). Задача об отслеживании связана со следующим вопросом: при каких условиях рядом с любой псевдотраекторией f найдётся точная траектория?

Известно, что диффеоморфизм обладает свойством отслеживания в окрестности гиперболического множества [3, 4]. Более того, если f является структурно устойчивым (см. определение, например, [5, 6]), то свойство отслеживания выполнено на всём многообразии [7, 8]. В то же время нетрудно дать пример не структурно устойчивого диффеоморфизма, обладающего свойством отслеживания (см., например, [9]). Таким образом, отслеживание не равносильно структурной устойчивости.

При этом при некоторых дополнительных условиях отслеживание и структурная устойчивость равносильны. Например, C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания, совпадает с множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов [10, 11]. В работе [12] Абденур и Диац выдвинули гипотезу, что для C^1-типичного диффеоморфизма отслеживание раносильно структурной устойчивости; они доказали гипотезу для так называемых *tame* диффеоморфизмов. В [13] показано, что липшицево свойство отслеживания равносильно структурной устойчивости. Таким образом, множество не структурно устойчивых диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания, не очень большое.

Ключевые слова: отслеживание, косое произведение, сдвиг Бернулли, принцип больших уклонений, задача о разорении игрока.

работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 21-11-00047.

Возникает естественный вопрос найти какое свойство отслеживания выполнено для более широкого класса диффеоморфизмов. Одним из подходов является рассмотрение вероятностного отслеживания: наделение пространства псевдотраекторий вероятностной мерой и поиск достаточных условий, при которых вероятность отслеживания близка к 1 или хотя бы положительна. Впервые это понятие было введено в [14]. Позднее в [15] было показано, что у транзитивных диффеморфизмов, не обладающих классическим свойством отслеживания, вероятность отслеживания псевдотраектории равна 0. В работах [17, 18] были сформулированы гипотезы об отслеживании псевдотраеторий конечной длины для негиперболических отображений. Позднее было показано, что эти гипотезы не могут быть улучшены [9]. В работе [16] был предложен подход, совмещающий вероятностный подход и отслеживание конечных псевдотраекторий, и показано, что для линейного косого произведения вероятность отслеживания псевдотраектории с длиной, гёльдеровски зависящей от размера скачка, близка к 1. Позднее в [19] результат был обощен на более широкий класс отображений.

В данной работе мы развиваем результаты [16] для случая, когда скачки псевдотраекторий убывают с номером скачка. Такого рода псевдотраектории рассматриваются при изучении предельного свойства отслеживания, например, [20, 21]. В работе мы изучаем зависимость длины отслеживаемой псевдотраектории от скорости убывания размера скачков. Доказательство тесно связано с задачей о разорении игрока и основано на принципе больших уклонений.

§2. Постановка задачи

Пусть $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Наделим Σ стандартной вероятностной мерой ν и следующей метрикой

$$\operatorname{dist}(\{\omega^i\},\{\tilde\omega^i\}) = \frac{1}{2^k}, \quad \textit{где } k = \min\{|i| : \omega^i \neq \tilde\omega^i\}.$$

Для последовательности $\omega = \{\omega^i\} \in \Sigma$ обозначим за $t(\omega)$ нулевой элемент последовательности: $t(\omega) = \omega^0$. Определим сдвиг Бернулли как

$$(\sigma(\omega))^i = \omega^{i+1}.$$

Рассмотрим пространство $Q = \Sigma \times \mathbb{R}$ с мерой произведения $\mu = \nu \times \mathrm{Leb}$ и метрикой:

$$\operatorname{dist}((\omega,x),(\tilde\omega,\tilde x)) = \max(\operatorname{dist}(\omega,\tilde\omega),\operatorname{dist}(x,\tilde x)).$$

Для $q \in Q$ и $a > 0$ обозначим через $B(a, q)$ открытый шар радиуса a с центром в точке q.

Зафиксируем $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$0 < \lambda_0 < 1 < \lambda_1, \quad \lambda_0\lambda_1 \neq 1. \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $f\colon Q \to Q$, определённое следующим образом:

$$f(\omega, x) = (\sigma(\omega), \lambda_{t(\omega)}x). \tag{2}$$

Классическое понятие свойства отслеживания основывается на следующих определениях [1, 2].

Определение 1. Для интервала $I = (a, b) \cap \mathbb{Z}$, где

$$a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\},$$

последовательность точек $\{y_k\}_{k \in I}$ называется d-псевдотраекторией, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(y_{k+1}, f(y_k)) < d, \ \ k, k+1 \in I.$$

Определение 2. Отображение f обладает свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$ такое, что для любой d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что

$$\operatorname{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon, \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Определение 3. Отображение f обладает липшицевым свойством отслеживания, если существуют константы ε_0, $L_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ и d-псевдотраектории $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с $d = \varepsilon / L_0$ существует траектория $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что выполнено неравенство (3).

В этой статье мы рассмотрим обобщение классического свойства отслеживания. Рассмотрим положительные убывающие последовательности $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$.

Определение 4. Для интервала $I = [a, b) \cap \mathbb{Z}$, где

$$a \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

последовательность точек $\{y_n\}_{n \in I}$ называется d_n-псевдотраекторией, если выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(y_{k+1}, f(y_k)) < d_{k+1}, \quad k, k+1 \in I.$$

Определение 5. Будем говорить, что d_n-псевдотраектория $\{y_n\}_{n\in I}$ является ε_n-отслеживаемой на интервале I, если для некоторой траектории $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ выполнены следующие неравенства:

$$\mathrm{dist}(x_k, y_k) < \varepsilon_k, \quad k \in I.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 1. *Если* $\frac{d_k}{d_{k+1}} \geqslant 2$ *или* $1 \leqslant \frac{d_k}{d_{k+1}} \leqslant 2$, *то* d_n*-псевдотраектория сдвига Бернулли является* d_n*-отслеживаемой.*

Доказательство этой леммы прямолинейно, для полноты изложения мы приводим его в приложении в конце статьи. Отметим, что возможны некоторые обобщения этого утверждения, однако детальное изучение вопроса отслеживания d_k-псевдотраекторий для сдвига Бернулли не является целью этой работы и будет рассмотрено в последующих работах.

В этой статье изучается вероятностное отслеживание для d_n-псевдотраекторий в стилистике статьи [16]. Введём вероятностную меру на пространстве псевдотраекторий по аналогии с [14, 16].

Для $q \in Q, N \in \mathbb{N}$, последовательности $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, такой что $d_n > 0$, обозначим за $\Omega_{q,d_n,N}$ множество d_n-псевдотраекторий длины N, начинающихся в $q_0 = q$. Если мы рассматриваем q_{k+1} как случайную точку в $B(d_{k+1}, f(q_k))$, выбранную равномерно по отношению к мере μ, то $\Omega_{q,d_n,N}$ образует конечную марковскую цепь. Это наделяет $\Omega_{q,d_n,N}$ вероятностной мерой $\mathbf{P}$.

Для последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, такой что $\varepsilon_n > 0$, обозначим за $\mathbf{P}(q, d_n, N, \varepsilon_n)$ вероятность того, что псевдотраектория из $\Omega_{q,d_n,N}$ является ε_n-отслеживаемой. Заметим, что это событие измеримо, так как оно образует открытое подмножество в $\Omega_{q,d_n,N}$.

Аналогично [16, Лемма 1] доказывается следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть* $q = (\omega, x), \tilde{q} = (\omega, 0)$. *Тогда для последовательностей* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}, \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, *таких что* $d_n, \varepsilon_n > 0$, *выполнено:*

$$\boldsymbol{P}(q, d_n, N, \varepsilon_n) = \boldsymbol{P}(\tilde{q}, d_n, N, \varepsilon_n).$$

Для $N \in \mathbb{N}$, последовательностей $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}, \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, таких что $d_n, \varepsilon_n > 0$, определим

$$\mathbf{P}(d_n, N, \varepsilon_n) := \int\limits_{\Sigma} \mathbf{P}((\omega, 0), d_n, N, \varepsilon_n) d\nu(\omega).$$

При этом $\mathbf{P}(d_n, N, \varepsilon_n)$ может быть интерпретировано как вероятность того, что d_n-псевдотраектория длины N является ε_n-отслеживаемой.

В работе [16] была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению* (1)*, существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_0 < \infty$, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$, выполняется:*

(1) *если $c < c_0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 0$;*
(2) *если $c > c_0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(\varepsilon/N^c, N, \varepsilon) = 1$.*

В данной работе мы исследуем свойства пределов

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(d_n/N^c, N, d_n).$$

Для этого нам понадобятся дополнительные условия на последовательности $\{d_n\}$.

Условие 1. *Последовательность $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ не возрастает и*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha\ \forall M \geqslant 0\ \forall k \geqslant 0 : \frac{d_k}{d_{k+M}} < \alpha e^{\varepsilon M} \quad \text{и} \quad \frac{d_k}{d_{k+1}} \leqslant 2.$$

Условие 2. *Верно следующее*

$$\exists\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 : 0 < \theta_1 \leqslant \theta_2,\ \forall M \geqslant 0\ \forall k \geqslant 0 : \alpha_1 e^{\theta_1 M} \leqslant \frac{d_k}{d_{k+M}} \leqslant \alpha_2 e^{\theta_2 M}.$$

При этом выполнено одно из двух: либо $\alpha_1 e^{\theta_1} \geqslant 2$, либо $1 \leqslant \alpha_1 e^{\theta_1} \leqslant \alpha_2 e^{\theta_2} \leqslant 2$.

Примером последовательности, удовлетворяющей условию 1, является последовательность $d_n = \frac{1}{n^\gamma}$, где $\gamma > 0$. Примером последовательности, удовлетворяющей условию 2, является: $d_0 = a$, где $a > 0$, $d_{k+1} = \frac{1}{e^{j_k}} d_k$, где $\theta_1 \leqslant j_k \leqslant \theta_2$.

Замечание 1. Отметим, что если последовательность $\{d_n\}$ удовлетворяет условию 2 и $\theta_1 > -\ln\lambda_0$, то для достаточно большого $L > 0$ любая d_n-псевдотраектория может быть Ld_n отслежена. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству свойства отслеживания для гиперболических систем.

В дальнейшем в статье мы предполагаем, что выполнено следующее условие:

Условие 3. $-\ln\lambda_0 > \theta_1$.

В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. *Для любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих соотношению* (1), *и любой последовательности* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, *удовлетворяющей условию* 1, *существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_0 < \infty$, *что для всех* $L > 0$, *удовлетворяющих* $Ld_0 < \varepsilon_0$, *выполнено:*

(1) *если* $c < c_0$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;

(2) *если* $c > c_0$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Теорема 3. *Для любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих соотношению* (1) *и неравенству* $\ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 + 2\theta_1 > 0$, *и любой последовательности* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, *удовлетворяющей условиям* 2, 3, *существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$, $0 \leqslant c' \leqslant c'' < \infty$, *что для всех* $L > 0$, *где* $Ld_0 < \varepsilon_0$, *выполнено:*

(1) *если* $c < c'$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;

(2) *если* $c > c''$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Замечание 2. Если $\theta_1 < -\ln\lambda_0 < \theta_2$, то $c' = 0$.

Теорема 4. *Для любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих соотношению* (1) *и неравенству* $\ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 + 2\theta_2 < 0$, *и любой последовательности* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, *удовлетворяющей условиям 2, 3, существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$, $0 \leqslant \check{c} \leqslant \check{\check{c}} < \infty$, *что для всех* $L > 0$, *где* $Ld_0 < \varepsilon_0$, *выполнено:*

(1) *если* $c < \check{c}$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;

(2) *если* $c > \check{\check{c}}$, *то* $\lim\limits_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Отметим, что эти теоремы не покрывают случаи

$$-2\theta_2 < \ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 < -2\theta_1, \tag{4}$$

$$c \in (c', c''), \quad c \in (\check{c}, \check{\check{c}}). \tag{5}$$

Случай (4) соответствует отсутствию неравномерной гиперболичности и не рассматривается в данной работе. Случай (5) требует дополнительных предположений и рассмотрен далее.

Условие 4. *Предположим, что* $\ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 + 2\theta_1 > 0$, $\theta_2 < -\ln\lambda_0$ *и верно следующее:*

$$\liminf_{N\to\infty}\left(\max_{\substack{\beta\ln N\leqslant j\leqslant \ln^2 N\\ 0\leqslant s\leqslant N-\ln^2 N}}\frac{1}{j}\ln\frac{d_s}{d_{s+j}}\right)=\theta_1,$$

$$\limsup_{N\to\infty}\left(\min_{\substack{\beta\ln N\leqslant s\leqslant N\\ 0<j\leqslant N-s}}\frac{1}{j}\ln\frac{d_s}{d_{s+j}}\right)=\theta_2,$$

где β– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\ln\lambda_0+\theta_2}{\ln\lambda_0+\theta_1}\frac{1}{\beta}}+e^{\frac{\ln\lambda_1+\theta_2}{\ln\lambda_0+\theta_1}\frac{1}{\beta}}\right)=1.$$

Если обозначить $a_0=\ln\lambda_0, a_1=\ln\lambda_1$ и b'– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\left(e^{-b'(a_0+\theta_2)}+e^{-b'(a_1+\theta_2)}\right)=1,$$

то β можно записать так: $\beta=-\frac{1}{b'(a_0+\theta_1)}$.

Условие 5. *Предположим, что* $\ln\lambda_0+\ln\lambda_1+2\theta_2<0$ *и верно следующее:*

$$\limsup_{N\to\infty}\left(\min_{\substack{\check\beta\ln N\leqslant j\leqslant \ln^2 N\\ 0\leqslant s\leqslant N-\ln^2 N}}\frac{1}{j}\ln\frac{d_s}{d_{s+j}}\right)=\theta_2,$$

$$\liminf_{N\to\infty}\left(\max_{\substack{\check\beta\ln N\leqslant s\leqslant N\\ 0<j\leqslant N-s}}\frac{1}{j}\ln\frac{d_s}{d_{s+j}}\right)=\theta_1,$$

где $\check\beta$– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{-\ln\lambda_0-\theta_1}{-\ln\lambda_1-\theta_2}\frac{1}{\beta}}+e^{\frac{-\ln\lambda_1-\theta_1}{-\ln\lambda_1-\theta_2}\frac{1}{\beta}}\right)=1.$$

Обозначим $a_0=\ln\lambda_0, a_1=\ln\lambda_1$ и $\check b$– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\left(e^{-\check b(-a_0-\theta_1)}+e^{-\check b(-a_1-\theta_1)}\right)=1,$$

тогда $\check\beta=\frac{1}{\check b(a_1+\theta_2)}$.

Пример последовательностей, удовлетворяющих условию 4, приведён в приложении в конце статьи. Пример для условия 5 аналогичен.

Верны следующие теоремы, соответствующие случаю (5). Эти теоремы являются основным результатом данной статьи.

Теорема 5. *Для любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$*, удовлетворяющих соотношению* (1) *и неравенству* $\ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 + 2\theta_1 > 0$*, и любой последовательности* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$*, удовлетворяющей условиям* 2, 3 *и* 4*, верно, что для всех* c *таких, что* $0 \leqslant c' < c < c'' < \infty$ *и для всех* $L > 0$*, где* $Ld_0 < \varepsilon_0$*, выполнено:*

(1) $\liminf_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;
(2) $\limsup_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Теорема 6. *Для любых* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$*, удовлетворяющих соотношению* (1) *и неравенству* $\ln\lambda_0 + \ln\lambda_1 + 2\theta_2 < 0$*, и любой последовательности* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$*, удовлетворяющей условиям* 2, 3 *и* 5*, верно, что для всех* c *таких, что* $0 \leqslant \check{c} < c < \check{\check{c}} < \infty$ *и для всех* $L > 0$*, где* $Ld_0 < \varepsilon_0$*, выполнено:*

(1) $\liminf_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 0$;
(2) $\limsup_{N\to\infty} \boldsymbol{P}(Ld_n/N^c, N, Ld_n) = 1$.

Для доказательства основных теорем по аналогии с [16] нам понадобится эквивалентная вероятностная формулировка. Рассмотрим следующее распределение:

$$\gamma = \begin{cases} a_0, & \text{с вероятностью } 1/2; \\ a_1, & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

Зафиксируем $N > 0$. Рассмотрим случайное блуждание $\{A_i\}_{i\in[0,\infty)}$, порождённое γ, и независимые равномерно распределённые на отрезке $[-1; 1]$ величины $\{r_i\}_{i\in[1,\infty)}$. Определим последовательность $\{z_i\}_{i\in[0,\infty)}$ следующим образом:

$$z_0 = 0, \quad z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1}\cdot d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}. \tag{6}$$

Для данных $(\{A_i\}_{i\in[0,N]}, \{r_i\}_{i\in[1,N]})$ определим:

$$B(k,n) := \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}}, \quad 0 \leqslant k < n \leqslant N,$$

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) := \max_{0\leqslant k<n\leqslant N} B(k,n),$$

$$s(N,L) := \mathbf{P}(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]}, \{r_i\}_{i\in[1,N]}) < L).$$

Лемма 3. *Существуют* $\varepsilon_0 > 0$, $L_0 > 0$ *такие, что если последовательность* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *удовлетворяет либо условию* 1, *либо условию* 2, $L > L_0$, $N \in \mathbb{N}$, $Ld_n < \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *то выполнено равенство* $\boldsymbol{P}(d_n, N, Ld_n) = s(N, L)$.

Доказательство полностью аналогично [16, лемма 2].

§3. Доказательство теорем

Доказательства теорем 2–6 во многом схожи. Мы приводим полные доказательства теорем 3, 5. Доказательства теорем 2, 4 аналогичны доказательству теоремы 3, доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

Мы будем пользоваться следующими двумя фактами:

Лемма 4 (Принцип больших уклонений, [22, Раздел 3])**.** *Пусть* $(a_0 + a_1)/2 > 0$. *Существует возрастающая функция* $h : (0;\infty) \to (0;\infty)$ *такая, что для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *и для всех достаточно больших* n *выполняются следующие неравенства:*

$\boldsymbol{P}(\frac{A_n}{n} - \mathbf{E}(\gamma) < -\varepsilon) < \mathbf{e}^{-(\mathbf{h}(\varepsilon)-\delta)\mathbf{n}}$,

$\boldsymbol{P}(\frac{A_n}{n} - \mathbf{E}(\gamma) < -\varepsilon) > \mathbf{e}^{-(\mathbf{h}(\varepsilon)+\delta)\mathbf{n}}$.

Лемма 5 (Задача о разорении, [23, Глава XII, §4,5])**.** *Пусть* $(a_0 + a_1)/2 > 0$ *и* b *– единственный положительный корень уравнения*

$$\frac{1}{2}(e^{-ba_0} + e^{-ba_1}) = 1.$$

Тогда для любых $\delta > 0$ *и для достаточно больших* $C > 0$ *выполняются следующие неравенства:*

$$\boldsymbol{P}(\exists i \geqslant 0 : A_i \leqslant -C) \leqslant e^{-C(b-\delta)},$$

$$\boldsymbol{P}(\exists i \geqslant 0 : A_i \leqslant -C) \geqslant e^{-C(b+\delta)}.$$

Согласно лемме 3 для доказательства теорем 2, 5 достаточно доказать следующие теоремы:

Теорема 7. *Предположим, что* $(a_0 + a_1)/2 > 0$, *тогда*

(S1) *Если* $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *удовлетворяет условию* 1 *и* $c < \frac{1}{b}$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0.$$

(S2) *Если последовательность* $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *не возрастает и* $c > \frac{1}{b}$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1.$$

Теорема 8. *Предположим, что* $a_0 + a_1 + 2\theta_1 > 0$ *и* $a_0 + \theta_2 < 0$, $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ *удовлетворяет условиям* 2 *и* 4. *Рассмотрим единственный положительный корень* b' *уравнения*

$$\frac{1}{2}(e^{-b'(a_0+\theta_2)} + e^{-b'(a_1+\theta_2)}) = 1.$$

и единственный положительный корень b'' — *уравнения*

$$\frac{1}{2}(e^{-b''(a_0+\theta_1)} + e^{-b''(a_1+\theta_1)}) = 1.$$

Предположим, что $\frac{1}{b'} < c < \frac{1}{b''}$. *Тогда:*
(S1″) $\liminf\limits_{N\to\infty} s(N, N^c) = 0$,
(S2″) $\limsup\limits_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1$.

Замечание 3. Если $a_0 + \theta_2 \geqslant 0$, то условия (S1″), (S2″) выполнены для $0 < c < \frac{1}{b''}$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.

Обозначим $v := \mathbf{E}(\gamma) = (\mathbf{a_0} + \mathbf{a_1})/\mathbf{2}$ и $\omega := v/2$.

Доказательство (S1). Возьмём число $q > \max(\frac{2}{b\omega}, \frac{2}{h(\omega)})$. Положим $M = q\ln N$. Предположим, что $c < \frac{1}{b}$. Выберем $c_1 \in (c, \frac{1}{b})$ и $\delta > 0$, такие, что

$$c_1(b+\delta) < 1, \quad q > \frac{2}{(b-\delta)\omega}. \tag{7}$$

Рассмотрим следующие события:

$$I = \{\exists i \in [0, M] : A_i \leqslant -c_1 \ln N;\ \text{и}\ A_{2M} \geqslant 0\},$$
$$I_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_i \leqslant -c_1 \ln N\},$$
$$I_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_i \leqslant -\omega M\}, \quad I_3 = \{A_{2M} - A_M \leqslant \omega M\}.$$

Верно включение $I_1 \subset I \cup I_2 \cup I_3$, и следовательно

$$\mathbf{P}(I) \geqslant \mathbf{P}(I_1) - \mathbf{P}(I_2) - \mathbf{P}(I_3). \tag{8}$$

Используя леммы 4, 5, получим:

$$\mathbf{P}(I_1) \geqslant \mathbf{P}(\exists i \geqslant 0 : A_i \leqslant -c_1 \ln N) - \mathbf{P}(\exists i > M : A_i \leqslant -c_1 \ln N)$$

$$\geqslant e^{-c_1 \ln N(b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \leqslant 0) \quad \geqslant N^{-c_1(b+\delta)} - \sum_{i=M+1}^{\infty} e^{-ih(v)}$$

$$\geqslant N^{-c_1(b+\delta)} - \frac{1}{1-e^{-h(v)}} e^{-(M+1)h(v)} \geqslant N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{9}$$

Из леммы 5 получаем:

$$\mathbf{P}(I_2) \leqslant \mathbf{P}(\exists i \geqslant 0 : A_i \leqslant -\omega M) \leqslant e^{-M\omega(b-\delta)} \leqslant N^{-\omega(b-\delta)q} = o(N^{-2}). \tag{10}$$

Из леммы 4 следует:

$$\mathbf{P}(I_3) \leqslant e^{-M(h(\omega)-\delta)} = N^{-(h(\omega)-\delta)q} = o(N^{-2}). \tag{11}$$

Объединяя неравенства (8)–(11) получаем:

$$\mathbf{P}(I) \geqslant N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{12}$$

Теперь предположим, что событие I совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству: $A_i < -c_1 \ln N$. Заметим, что из соотношения (6) следует, что следующие события независимы:

$$J_1 = \{r_i \in [1/2; 1]\}, \quad J_2 = \big\{z_{2M} - z_0 \geqslant \frac{r_i d_i}{e^{A_i}}\big\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(z_{2M} - z_0 \geqslant \frac{d_i}{2e^{A_i}}) \geqslant \mathbf{P}(J_1)\mathbf{P}(J_2) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8.$$

Поскольку $B(0; 2M) = \frac{e^{A_{2M}}|z_{2M} - z_0|}{d_{2M} + e^{A_{2M}}}$ и при достаточно больших M выполняется неравенство

$$\frac{e^{A_{2M}}}{d_{2M} + e^{A_{2M}}} \geqslant \frac{1}{2},$$

то выполнено

$$\mathbf{P}\left(B(0; 2M) > \frac{d_M N^{c_1}}{4}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(B(0; 2M) > \frac{d_i N^{c_1}}{4}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{8}\mathbf{P}(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{13}$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется: $N^c < \frac{d_M N^{c_1}}{4}$, и следовательно:

$$\mathbf{P}(B(0, 2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{14}$$

Покажем теперь, что для любого $k \in [0, N-2M]$ аналогично выполняется:

$$\mathbf{P}(B(k, k+2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Для фиксированного $k \in [0, N-2M]$ рассмотрим события:

$$Q = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leqslant -c_1 \ln N; \text{ и } A_{2M} - A_k \geqslant 0\},$$
$$Q_1 = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leqslant -c_1 \ln N\},$$
$$Q_2 = \{\exists i \in [0, M] : A_{k+i} - A_k \leqslant -\omega M\},$$
$$Q_3 = \{A_{k+2M} - A_{k+M} \leqslant \omega M\}$$

Аналогично (12) выполнено

$$\mathbf{P}(Q) \geqslant N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Теперь предположим, что событие Q совершилось и пусть $i \in [0, M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству $A_{k+i} - A_k < -c_1 \ln N$. Аналогично (13) выполняется

$$\mathbf{P}\left(B(k, k+2M) > \frac{1}{4}\frac{d_{k+M}}{d_k} N^{c_1}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(B(k, k+2M) > \frac{1}{4}\frac{d_{k+i}}{d_k} N^{c_1}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{8}\mathbf{P}(I) = \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется:

$$\frac{1}{4}\frac{d_{k+M}}{d_k} N^{c_1} > N^c.$$

Таким образом, для фиксированного $k \in [0, N-2M]$ имеем:

$$\mathbf{P}(B(k, k+2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что события в выражении

$$\mathbf{P}(B(k, k+2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2}),$$

для $k = 0, 2M, 2 \cdot 2M, \ldots, ([N/(2M)] - 1) \cdot 2M$ независимы, и следовательно:

$$\mathbf{P}(\exists k \in [0, N-2M] : B(k, k+2M) > N^c)$$
$$\geqslant 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8} N^{-c_1(b+\delta)} + o(N^{-2})\right)\right)^{[N/(2M)]}. \quad (15)$$

Используя (7), мы получаем:

$$\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)}+o(N^{-2})\right)\left[\frac{N}{2M}\right]\geqslant\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)}+o(N^{-2})\right)\left(\frac{N}{2q\ln N}-1\right)$$
$$=\frac{N^{1-c_1(b+\delta)}}{16q\ln N}+o(1)\longrightarrow\infty$$

и следовательно:

$$\left(1-\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(b+\delta)}+o(1)\right)\right)^{[N/(2M)]}\longrightarrow 0. \tag{16}$$

Из (15), (16) получаем:

$$\mathbf{P}(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]},\{r_i\}_{i\in[1,N]})>N^c)\longrightarrow 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} s(N,N^c)=0$. □

Доказательство $S2$. Возьмём $M=\ln^2 N$. Пусть $c>\frac{1}{b}$. Выберем $c_1\in(1/b,c)$ и $\delta>0$, удовлетворяющие неравенству $c_1(b-\delta)>1$. Согласно (6) последовательность $\{z_i\}$ определяется соотношением $z_{i+1}=z_i+\frac{r_{i+1}d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}$. Тогда для $n>k$ выполняется

$$e^{A_k}|z_n-z_k|\leqslant\sum_{i=k+1}^{n}e^{-(A_i-A_k)}d_i,$$

$$\frac{e^{A_n}}{d_ne^{A_k}+d_ke^{A_n}}=\frac{1}{d_k}\cdot\frac{e^{A_n}\frac{d_k}{d_n}}{e^{A_k}+e^{A_n}\frac{d_k}{d_n}}\leqslant\frac{1}{d_k}.$$

Следовательно,

$$B(k,n)=\frac{e^{A_n+A_k}|z_n-z_k|}{d_ne^{A_k}+d_ke^{A_n}}\leqslant\frac{1}{d_k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}e^{-(A_i-A_k)}d_i$$
$$=\sum_{i=k+1}^{n}e^{-(A_i-A_k)}\frac{d_i}{d_k},\quad k,n=1,\ldots,N.$$

Тогда

$$K(\{A_i\},\{r_i\})=\max_{0\leqslant k<n\leqslant N}B(k,n)\leqslant\max_{0\leqslant k<n\leqslant N}\sum_{i=k+1}^{n}e^{-(A_i-A_k)}\frac{d_i}{d_k}$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant N} \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i-A_k)}\frac{d_i}{d_k} =: D(\{A_i\}). \tag{17}$$

Верно следующее:

$$\mathbf{P}\left(D(\{A_i\}) < N^c\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\exists k \in [0,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i-A_k)}d_i}{d_k} \geqslant N^c\right)$$
$$\geqslant 1 - N\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i-A_0)} \geqslant N^c\right).$$

Заметим, что если $\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i-A_0)} > N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0,M] : e^{-A_i} > \frac{N^c}{2M},$$
$$\exists i \in [M,N] : e^{-A_i} > \frac{N^{c-1}}{2}.$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется

$$\frac{N^c}{2M} > N^{c_1}, \quad N^{c-1}/2 > e^{-\omega M},$$

и, следовательно (так же, как в S1), для достаточно больших N выполняется:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i-A_0)} > N^c\right) \leqslant \mathbf{P}(\exists i \in [0,M] : A_i < -c_1 \ln N)$$
$$+ \mathbf{P}(\exists i \in [M,N] : A_i < \omega M)$$
$$\leqslant e^{-(b-\delta)c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2}).$$

Наконец,

$$\mathbf{P}(D(\{A_i\}) \leqslant N^c) \geqslant 1 - N(N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})) \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

и, следовательно, из соотношения (17) следует $\lim\limits_{N\to\infty} s(N,N^c) = 1$. $\square$

Доказательство (S1$''$). Возьмём θ такое, что выполняются следующие два условия:

1) $\theta_1 < \theta < \theta_2$,

2) $\frac{1}{\tilde{b}} > c$, где $\tilde{b}$– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-\tilde{b}(a_0+\theta)} + e^{-\tilde{b}(a_1+\theta)}) = 1.$$

Такое θ существует поскольку $\frac{1}{b'} < c < \frac{1}{b''}$. Обозначим $\tilde{v} := (a_0+\theta+a_1+\theta)/2 > 0$ и $\tilde{\omega} := \tilde{v}/2$. Выберем такие $c_1 \in (c, \frac{1}{\tilde{b}})$ и $\delta > 0$, что

$$c_1(\tilde{b}+\delta) < 1. \tag{18}$$

Будем рассматривать такие N, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{d_k}{d_{k+i}} \leqslant e^{\theta i}, \text{ при } \frac{-c_1 \ln N}{a_0+\theta} \leqslant i \leqslant \ln^2 N, \quad 0 \leqslant k \leqslant N - \ln^2 N. \tag{19}$$

Такие сколь угодно большие N существуют по условию 4.

Возьмём $M = \ln^2 N$. Рассмотрим следующие события:

$$\begin{aligned} I &= \{\exists i \in [0,M] : A_i + i\theta \leqslant -c_1 \ln N; \text{и } A_{2M} + 2M\theta \geqslant 0\}, \\ I_1 &= \{\exists i \in [0,M] : A_i + i\theta \leqslant -c_1 \ln N\}, \\ I_2 &= \{\exists i \in [0,M] : A_i + i\theta \leqslant -\tilde{\omega} M\}, \\ I_3 &= \{A_{2M} - A_M + M\theta \leqslant \tilde{\omega} M\}. \end{aligned}$$

Аналогично, как и в случае S1, верно следующее

$$\mathbf{P}(I) \geqslant \mathbf{P}(I_1) - \mathbf{P}(I_2) - \mathbf{P}(I_3), \tag{20}$$

$$\mathbf{P}(I) \geqslant N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)} + o(N^{-2}). \tag{21}$$

Предположим, что событие I совершилось и пусть $i \in [0,M]$ номер одного из индексов, удовлетворяющих неравенству $A_i + i\theta < -c_1 \ln N$. Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы $i > \frac{-c_1 \ln N}{a_0+\theta}$ (так как длина шага вниз случайного блуждания A_i равна $|a_0+\theta|$). Тогда из соотношения (19) следует, что $\frac{1}{d_i} < e^{\theta i}$. Аналогично неравенству (14) для достаточно больших N выполнено

$$\mathbf{P}(B(0,2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Для любого $k \in [0, N-2M]$ аналогичным образом выполняется

$$\mathbf{P}(B(k,k+2M) > N^c) \geqslant \frac{1}{8} N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)} + o(N^{-2}).$$

Заметим, что события в выражении

$$\mathbf{P}(B(k,k+2M)>N^c)\geqslant\frac{1}{8}N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)}+o(N^{-2})$$

для $k=0,2M,2\cdot 2M,\ldots,([N/(2M)]-1)\cdot 2M$ независимы, и следовательно:

$$\mathbf{P}(\exists k\in[0,N-2M]:B(k,k+2M)>N^c)\\ \geqslant 1-\left(1-\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)}+o(N^{-2})\right)\right)^{[N/(2M)]}. \quad (22)$$

Используя (18), мы получаем

$$\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)}+o(N^{-2})\right)\left[\frac{N}{2M}\right]\\ \geqslant\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)}+o(N^{-2})\right)\left(\frac{N}{2(\ln^2 N)}-1\right)\\ =\frac{N^{1-c_1(\tilde{b}+\delta)}}{16\ln^2 N}+o(1)\longrightarrow\infty$$

и следовательно:

$$\left(1-\left(\frac{1}{8}N^{-c_1(\tilde{b}+\delta)}+o(1)\right)\right)^{[N/(2M)]}\longrightarrow 0. \quad (23)$$

Из (22), (23) получаем:

$$\mathbf{P}(K(\{A_i\}_{i\in[0,N]},\{r_i\}_{i\in[0,N]})>N^c)\longrightarrow 1.$$

Следовательно, $\liminf\limits_{N\to\infty} s(N,N^c)=0$, где предел берётся вдоль подпоследовательности N, удовлетворяющей условию (19). $\square$

Доказательство $S2''$**.** Возьмём θ такое, что выполняются следующие два условия:

1)$\theta_1<\theta<\theta_2$,

2)$\frac{1}{\tilde{b}}<c$, где $\tilde{b}$– единственный положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}(e^{-\tilde{b}(a_0+\theta)}+e^{-\tilde{b}(a_1+\theta)})=1.$$

Такое θ существует поскольку $\frac{1}{b'}<c<\frac{1}{b''}$. Обозначим $\tilde{v}:=(a_0+\theta+a_1+\theta)/2>0$ и $\tilde{\omega}:=\tilde{v}/2$. Выберем $c_1\in(\frac{1}{\tilde{b}},c)$ и $\delta>0$, удовлетворяющие неравенству $c_1(\tilde{b}-\delta)>1$.

Согласно (6) последовательность $\{z_i\}$ определяется равенством $z_{i+1} = z_i + \frac{r_{i+1}d_{i+1}}{e^{A_{i+1}}}$. Тогда для $n > k$ выполняется

$$e^{A_k}|z_n - z_k| \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i,$$

$$\frac{e^{A_n}}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} = \frac{1}{d_k} \cdot \frac{e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}}{e^{A_k} + e^{A_n} \frac{d_k}{d_n}} \leqslant \frac{1}{d_k}.$$

Значит,

$$B(k,n) = \frac{e^{A_n + A_k}|z_n - z_k|}{d_n e^{A_k} + d_k e^{A_n}} \leqslant \frac{1}{d_k} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} d_i = \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k}, \quad n, k = 1, \ldots, N.$$

Тогда

$$K(\{A_i\}, \{r_i\}) = \max_{0 \leqslant k < n \leqslant N} B(k,n) \leqslant \max_{0 \leqslant k < n \leqslant N} \sum_{i=k+1}^{n} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i - A_k)} \frac{d_i}{d_k} =: D(\{A_i\}). \quad (24)$$

Будем рассматривать такие N, что

$$\frac{d_i}{d_k} \leqslant e^{\theta(k-i)} \text{ при } -\frac{c_1}{a_0 + \theta} \ln N \leqslant k \leqslant i \leqslant N, \quad (25)$$

при этом заметим, что так как $\beta = -\frac{1}{b'(a_0+\theta_1)}$, то $\beta \leqslant -\frac{c_1}{a_0+\theta}$. Такие N существуют в силу условия 4.

Возьмём $M = \ln^2 N$. Обозначим $l = -\frac{c_1}{a_0+\theta} \ln N$. Верно следующее:

$$\mathbf{P}\left(D(\{A_i\}) < N^c\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\exists k \in [0, N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_i}{d_k} \geqslant N^c\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\exists k \in [0, N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_{k+(i-k)}}{d_k} \geqslant N^c\right)$$

$$\geqslant 1 - \left(\mathbf{P}\left(\exists k \in [0,l] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_{k+(i-k)}}{d_k} \geqslant N^c \right) \right.$$

$$\left. + \mathbf{P}\left(\exists k \in [l,N] : \sum_{i=k+1}^{N} \frac{e^{-(A_i - A_k)} d_i}{d_k} \geqslant N^c \right) \right)$$

$$\geqslant 1 - \mathbf{P}\left(\exists k \in [0,l] : \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i + i\theta_1 - A_k - k\theta_1)} \geqslant \alpha_1 N^c \right)$$

$$- \mathbf{P}\left(\exists k \in [l,N] : \sum_{i=k+1}^{N} e^{-(A_i + i\theta - A_k - k\theta)} \geqslant N^c \right)$$

$$\geqslant 1 - l\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta_1)} \geqslant \alpha_1 N^c \right) - N\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta)} \geqslant N^c \right).$$

Заметим, что если $\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta)} > N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0,M] : e^{-(A_i + i\theta)} > \frac{1}{2}\frac{N^c}{M},$$

$$\exists i \in [M,N] : e^{-(A_i + i\theta)} > \frac{1}{2} N^{c-1}.$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется

$$\frac{1}{2}\frac{N^c}{M} > N^{c_1}, \qquad \frac{N^{c-1}}{2} > e^{-\tilde{\omega} M},$$

и, следовательно (аналогично S1”), для достаточно больших N выполняется

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta)} > N^c \right) \leqslant \mathbf{P}(\exists i \in [0,M] : A_i + i\theta < -c_1 \ln N)$$

$$+\mathbf{P}(\exists i \in [M,N] : A_i + i\theta < \tilde{\omega} M)$$

$$\leqslant e^{-(\tilde{b} - \delta) c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(\tilde{b} - \delta) c_1} + o(N^{-2}).$$

Оценим теперь вероятность $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i + i\theta_1)} > \alpha_1 N^c \right)$. Обозначим $v'' := (a_0 + \theta_1 + a_1 + \theta_1)/2 > 0$ и $\omega'' := v''/2$. Заметим, что если

$\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1)} > \alpha_1 N^c$, то выполняется одно из следующих неравенств:

$$\exists i \in [0, M] : e^{-(A_i+i\theta_1)} > \frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M},$$

$$\exists i \in [M, N] : e^{-(A_i+i\theta_1)} > \frac{\alpha_1}{2} N^{c-1}.$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется

$$\frac{\alpha_1}{2}\frac{N^c}{M} > N^{c_1}, \quad \alpha_1 \frac{N^{c-1}}{2} > e^{-\omega'' M},$$

и, следовательно (так же, как в S1”), для достаточно больших N выполняется:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sum_{i=0}^{N} e^{-(A_i+i\theta_1)} > \alpha_1 N^c\right) &\leqslant \mathbf{P}(\exists i \in [0, M] : A_i + i\theta_1 < -c_1 \ln N) \\ &+ \mathbf{P}(\exists i \in [M, N] : A_i + i\theta < \omega'' M) \\ &\leqslant e^{-(b''-\delta)c_1 \ln N} + o(N^{-2}) = N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2}).\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D(\{A_i\}) \leqslant N^c) \geqslant 1 - N &\left(N^{-(b-\delta)c_1} + o(N^{-2})\right) \\ &- \frac{-c_1}{a_0+\theta} \ln N \left(N^{-(b''-\delta)c_1} + o(N^{-2})\right) \xrightarrow{N\to\infty} 1.\end{aligned}$$

и, следовательно, из соотношения (24) следует $\limsup\limits_{N\to\infty} s(N, N^c) = 1$, где предел берётся вдоль подпоследовательности N, удовлетворяющей условию (25). $\square$

§4. Приложение

Доказательство леммы 1. Обозначим через $q_n = \left[\log_2 \frac{1}{d_n}\right]$. Отметим, что в случае 1: $d_n/d_{n+1} \geqslant 2$, выполнено $q_{n+1} \geqslant q_n + 1$; в случае 2: $d_n/d_{n+1} \leqslant 2$, выполнено $q_{n+1} \leqslant q_n + 1$.

Рассмотрим d_n-псевдотраекторию $\omega^n \in \Sigma$. Тогда

$$\omega_k^n = \omega_{k-1}^{n-1}, \quad k \in [-q_n, q_n]. \tag{26}$$

Заметим, что в обоих случаях если $n_1 - k_1 = n_2 - k_2 = l$ и $k_1 \in [-q_{n_1}, q_{n_1}]$, $k_2 \in [-q_{n_2}, q_{n_2}]$, то для любого $n_3 \in [n_1, n_2]$ и $k_3 = n_3 - l$

выполнено включение $k_3 \in [-q_{n_3}, q_{n_3}]$ и, следовательно, из равенств (26) следует, что

$$\omega_{k_1}^{n_1} = \omega_{k_2}^{n_2}. \tag{27}$$

Рассмотрим последовательность $x \in \Sigma$, заданную равенствами

$$x_{k-n} = \omega_k^n, \quad k \in [-q_n, q_n].$$

Отметим, что в силу (27) последовательность определена корректно. При этом выполнены равенства $(\sigma^n x)_k = \omega_k^n$ и, следовательно, $\operatorname{dist}(\sigma^n x, \omega^n) < d_n$, что доказывает утверждение леммы. □

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условиям 2,4.

Пример 1. Разобьём $\mathbb{N}$ на конечные отрезки так, чтобы для n-ого отрезка $[a, b]$ было верно $b \geqslant e^{an}$. Зададим последовательность следующим образом:

$$\frac{1}{d_0} = 1,$$

$$\frac{1}{d_k} = \begin{cases} e^{\theta_1} \frac{1}{d_{k-1}}, & \text{при } k, \text{ принадлежащим промежутку} \\ & \text{ с чётным номером;} \\ e^{\theta_2} \frac{1}{d_{k-1}}, & \text{при } k, \text{ принадлежащим промежутку} \\ & \text{с нечётным номером.} \end{cases}$$

Лемма 6. *Последовательность, построенная в примере* 1*, удовлетворяет условию* 4.

Доказательство. Покажем, что

$$e^{\theta_1 M} \leqslant \frac{d_k}{d_{k+M}} \leqslant e^{\theta_2 M}.$$

Действительно, $\frac{1}{d_{k+M}} = e^{\theta_{i_1}} \cdot \ldots \cdot e^{\theta_{i_M}} \frac{1}{d_k}$, где $\theta_1 \leqslant \theta_{i_j} \leqslant \theta_2$. Значит,

$$M\theta_1 \leqslant \ln \frac{d_k}{d_{k+M}} = \theta_{i_1} + \cdots + \theta_{i_M} \leqslant M\theta_2.$$

При этом

$$\frac{d_k}{d_{k'}} = \begin{cases} e^{\theta_1(k'-k)} & \text{при } k, k', \text{ принадлежащих одному} \\ & \text{ и тому же промежутку с чётным номером,} \\ e^{\theta_2(k'-k)} & \text{при } k, k', \text{ принадлежащих одному} \\ & \text{и тому же промежутку с нечётным номером.} \end{cases}$$

Докажем утверждение для $\liminf$. Для $\limsup$ доказательство аналогично. Для этого покажем, что для любого $\theta : \theta_1 < \theta < \theta_2$ существует бесконечно много N таких, что выполнено следующее:

$$\max_{\substack{\beta \ln N \leqslant i \leqslant \ln^2 N \\ 0 \leqslant k \leqslant N - \ln^2 N}} \frac{1}{i} \ln \frac{d_k}{d_{k+i}} < \theta. \tag{28}$$

В качестве N будем брать такие b, что $F = [a, b]$ – чётный отрезок разбиения из примера и

$$b > \exp\left(\frac{1}{\beta}\Big(\frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} + 1\Big)a\right). \tag{29}$$

Согласно конструкции примера имеем $\ln \frac{d_k}{d_{k+i}} = l\theta_2 + m\theta_1$, где $l + m = i$. Чтобы выполнялось (28), нам необходимо, чтобы $m > \frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} l$. Заметим, что l и m зависят от i и от k. Далее для i из промежутка F из конструкции примера выполняется равенство $\frac{1}{d_i} = e^{\theta_1} \frac{1}{d_{i-1}}$ и, следовательно, неравенство $l \leqslant a$. Заметим, что это неравенство выполняется независимо от $k : 0 \leqslant k \leqslant N - \ln^2 N$, при условии, что для $\tau : \beta \ln N \leqslant \tau \leqslant N$ верно $\tau \in F$. Тогда из последнего замечания и условия на m для выполнения соотношения (28) на промежутке F достаточно, чтобы

$$b - a > \frac{\theta_2 - \theta}{\theta - \theta_1} a + (b - \beta \ln b).$$

Последнее равносильно неравенству (29). □

Список литературы

1. K. Palmer, *Shadowing in Dynamical Systems*, Theory and Applications. Kluwer, Dordrecht, 2000.
2. S. Yu. Pilyugin, *Shadowing in Dynamical Systems.* Lecture Notes Math., vol. 1706, Springer, Berlin, 1999.
3. D. V. Anosov, *On a class of invariant sets of smooth dynamical systems.* Proc. 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscill. 2 (1970), 39–45.
4. R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms.* Lecture Notes Math., vol. 470, Springer, Berlin, 1975.
5. B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
6. S. Yu. Pilyugin, *Spaces of Dynamical Systems.* De Gruyter Studies in Mathematical Physics, 3. De Gruyter, Berlin, 2012.

7. C. Robinson, *Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems.* — Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), 425–437.
8. K. Sawada, *Extended f-orbits are approximated by orbits*, Nagoya Math. J. 79 (1980), 33–45.
9. S. Tikhomirov, *Hölder Shadowing on finite intervals.* — Ergodic Theory Dynam. Systems, **35**, No. 6 (2015), 2000–2016.
10. S. Yu. Pilyugin, A. A. Rodionova, *Sakai K. Orbital and weak shadowing properties.* Discrete Contin. Dyn. Syst., **9** (2003), 287–308.
11. K. Sakai, *Pseudo-orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms of closed manifolds.* — Osaka J. Math., **31** (1994), 373–386.
12. F. Abdenur, L. Diaz, *Pseudo-orbit shadowing in the C1 topology,* — Discrete Contin. Dyn. Syst. A **17** (2007) 223–245.
13. S. Yu. Pilyugin, S. B. Tikhomirov, *Lipschitz Shadowing implies structural stability*, Nonlinearity **23** (2010), 2509–2515.
14. G. Yuan, J. Yorke, *An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 909–918.
15. S. Tikhomirov, *On Absolute nonshadowability of transitive Maps.* Differential Equations and Control Processes, No. 3 (2016), 57–65.
16. S. Tikhomirov, *Shadowing in linear skew products.* J. Math. Sci., **209**, No. 6 (2015), 979–987.
17. S. M. Hammel, J. A. Yorke, C. Grebogi, *Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?* — J. of Complexity **3** (1987), 136–145.
18. S. M. Hammel, J. A. Yorke, C. Grebogi, *Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits*, — Bulletin of the American Mathematical Society **19** (1988), 465–469.
19. G. Monakov, S. Tikhomirov, *Shadowing in a linear skew product over Bernoulli shift*, `arXiv:2012.08264`.
20. S. Yu. Pilyugin, *Sets of dynamical systems with various limit shadowing properties*, J. Dynam. Diff. Eq., **19** (2007), 747–775.
21. D. Todorov, *Generalizations of analogs of theorems of Maizel and Pliss and their application in shadowing theory.* – Discrete Contin. Dyn. Syst.**33** , No. 9 (2013), 4187–4205.
22. S. R. S. Varadhan, *Large deviations and applications.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 46. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1984.
23. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.,* John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1971.

Priezzhev V. A., Priezzhev P. A., Tikhomirov S. B. Probabilistic shadowing for pseudotrajectories with decreasing errors.

We consider the shadowing property of pseudotrajectories with decreasing errors for a linear skew product. The probabilistic properties of finite pseudotrajectories are studied. It is shown that for pseudotrajectories with errors decreasing exponentially, the typical dependence between the length of the pseudotrajectory and the shadowing accuracy is polynomial. The proof is based on the large deviation principle and the gambler's ruin problem.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9, 199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: v.priezgev@mail.ru
E-mail: p.priezgev@mail.ru
E-mail: s.tikhomirov@spbu.ru

Поступило 7 ноября 2021 г.