Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

А. К. Николаев

АНАЛОГ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

§1. Введение

Пусть $w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$ – стандартный винеровский процесс. Рассмотрим случайную меру $\mu(t, \cdot)$, заданную на борелевских подмножествах $\mathbf{R}$ как

$$\mu(t, A) = \mathfrak{m}\,\{\tau\,:\,w(\tau) \in A, 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

где $\mathfrak{m}$ – мера Лебега на $\mathbf{R}$, A – произвольное борелевское подмножество $\mathbf{R}$.

Мера $\mu(t, A)$ есть время пребывания процесса $w(\tau)$ в множестве A до момента времени t.

Согласно теореме о замене меры, для любой измеримой интегрируемой функции f справедливо соотношение

$$\int\limits_0^t f(w(\tau))\,d\tau = \int\limits_{\mathbf{R}} f(y)\,\mu(t, dy). \tag{1}$$

Известно, что с вероятностью единица мера $\mu(t, A)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега [2, с. 21]. Производная Радона–Никодима

$$l(t, x) = \frac{d\mu}{d\mathfrak{m}}\,(t, x) \tag{2}$$

называется локальным временем процесса $w(\tau)$ в точке x к моменту времени t, оно характеризует долю времени, которое процесс $w(\tau)$ проводит в точке x до момента времени t.

Ключевые слова: случайные процессы, локальное время, комплексный винеровский процесс.

Работа автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-01-00657а) и Международного математического института им. Л. Эйлера (соглашение № 075-15-2019-1620).

С учетом (2), соотношение (1) может быть переписано в виде

$$\int_0^t f(w(\tau))\,d\tau = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,l(t,y)\,dy. \tag{3}$$

Далее, положим в (3) $f = \delta\,(x - \cdot)$, где δ – дельта-функция Дирака. Тогда выражение для функции $l(t,x)$ примет вид

$$l(t,x) = \int_0^t \delta(x - w(\tau))\,d\tau. \tag{4}$$

Используя анализ Фурье, формуле (4) можно придать строгий математический смысл (используемый подход изложен в статье С. М. Бермана [3]). Именно, в классе обобщенных функций справедливо тождество

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\,(y-x)}\,dp = \frac{1}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} e^{ip\,(y-x)}\,dp. \tag{5}$$

С учетом (5), выражение (4) может быть переписано как

$$\begin{aligned} l(t,x) &= \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(w(\tau)-x)}\,dp\right) d\tau \\ &= (L_2)\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} e^{-ipx}\int_0^t e^{ipw(\tau)}\,d\tau\,dp. \end{aligned} \tag{6}$$

Предел в правой части (6) существует в метрике пространства $L_2(\Omega\times \mathbf{R},\, P\times\mathfrak{m})$, где Ω – вероятностное пространство, на котором задан винеровский процесс $w(\tau)$, P – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах пространства Ω.

В настоящей работе будет построен аналог локального времени для процесса комплексного броуновского движения $\sigma\, w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, где σ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \arg\sigma \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma| = 1.$$

Отметим, что локальное время такого процесса не может быть определено путем формальной замены $w(\tau)$ на $\sigma\, w(\tau)$ в формуле (6). Действительно, нетрудно показать, что при такой замене не существует предела в правой части (6). Поэтому мы определим аналог локального времени $m(t,x)$ процесса $\sigma\, w(\tau)$ с помощью построения специальной регуляризации функционального интеграла (6). Построенный процесс $m(t,x)$ унаследует некоторые важные свойства броуновского локального времени. В частности, в работе будет показано, что для решения $u(x)$ дифференциального уравнения

$$-\frac{\sigma^2}{2}\, u''(x) = f(x), \qquad f(x) \in L_2(\mathbf{R})$$

справедливо вероятностное представление $u(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}\, f * m\,(t,x)$.

§2. Основные обозначения и определения

Далее через $W_2^\alpha(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство Соболева функций (см. [1, гл. 1]), определенных на $\mathbf{R}$. В пространстве $W_2^\alpha(\mathbf{R})$ мы выберем норму

$$\|\psi\|^2_{W_2^\alpha(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2\alpha})|\widehat{\psi}(p)|^2\, dp,$$

где через $\widehat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ, которое в данной работе определяется как $\widehat{\psi}(p) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ipx}\psi(x)\, dx$.

Через $L_\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций, определенных на $\mathbf{R}$, с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{R}} |u(x)|$ (см. [6, с. 190]).

§3. Аналог локального времени для комплексного винеровского процесса. Определение и свойства.

Пусть $\sigma = a + ib$ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \arg\sigma \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma| = 1.$$

Определим функцию $h(t,\tau,\cdot)$, $0<\tau\leqslant t$, ее преобразованием Фурье $\widehat{h}(t,\tau,p)$ как

$$\widehat{h}(t,\tau,p) = H(t,p)\cdot \mathbb{1}_{[0,\sqrt{\frac{t}{b\tau}}]}(|p|), \tag{7}$$

где функция $H(t,p)$ определена с помощью формулы

$$H(t,p)=\begin{cases}1, & |p|<\frac{1}{\sqrt{b}}\\ \frac{1-e^{-\frac{t\sigma^2p^2}{2}}}{1-e^{-\frac{t\sigma^2}{2b}}}, & |p|\geqslant\frac{1}{\sqrt{b}}\end{cases}.$$

Отметим, что функция $h(t,\tau,\cdot)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, поскольку ее преобразование Фурье имеет финитный носитель. Отметим также, что в случае $\sigma^2=i$, функция $h(t,\tau,\cdot)$ определена только для значений $t\neq 2\sqrt{2}\pi k,\ k\in\mathbf{N}$.

Далее, определим случайную функцию $m=m(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}$, полагая

$$m(t,x)=\int\limits_0^t h(t,\tau,\,x-\sigma w(\tau))\,d\tau. \tag{8}$$

Получим выражение для функции $\widehat{m}(t,\cdot)$, которое понадобится нам в дальнейшем. Используя (7), преобразуем выражение, стоящее в правой части (8). Имеем

$$m(t,x)=\int\limits_0^t\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|p|<\sqrt{\frac{t}{b\,\tau}}} H(t,p)\,e^{-ip(x-\sigma w(\tau))}\,dp\right)d\tau$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} H(t,p)\Big(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{ip\sigma w(\tau)}\,d\tau\Big)e^{-ipx}\,dp,$$

где $r(p)=\min\,(1,\frac{1}{b\,p^2})$.

Таким образом, преобразование Фурье функции $m(t,\cdot)$ имеет вид

$$\widehat{m}(t,p)=H(t,p)\cdot\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{ip\sigma w(\tau)}\,d\tau. \tag{9}$$

Ниже будет показано, что функция $m(t,x)$ выступает некоторым аналогом локального времени для комплексного винеровского процесса $\sigma\,w(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, в частности, для нее выполнено соотношение, аналогичное (3).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При каждом $t > 0$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}\, m(t,x) = (L_2) \lim_{M\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_0^t \delta_M(x - \sigma w(\tau))\, d\tau, \tag{10}$$

где $\delta_M(x) = \frac{\sin(Mx)}{\pi\, x}$ *– ядро Дирихле.*

Доказательство. Вычислим математическое ожидание $\mathbf{E}\, m(t,x)$.

Используя (9), а также соотношение

$$\mathbf{E}\, e^{ip\sigma w(\tau)} = e^{-\frac{\tau p^2 \sigma^2}{2}},\ \tau > 0,\ p \in \mathbf{R},$$

получаем

$$\mathbf{E}\, m(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} H(t,p) \Big(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} \mathbf{E}\, e^{ip\sigma w(\tau)}\, d\tau \Big) e^{-ipx}\, dp$$

$$= -\frac{1}{\pi\sigma^2} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\, \frac{e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} - 1}{p^2}\, dp. \tag{11}$$

С другой стороны, имеем

$$(L_2) \lim_{M\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_0^t \delta_M(x - \sigma w(\tau))\, d\tau$$

$$= (L_2) \lim_{M\to\infty} \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} e^{-ipx}\, \mathbf{E}\, e^{ip\sigma w(\tau)}\, dp \right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{\pi\sigma^2} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\, \frac{e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} - 1}{p^2}\, dp. \quad \square$$

Далее, определим свертку функции h с функцией $f \in L_2(\mathrm{R})$, полагая

$$(h * f)(t,\tau,x) = \int\limits_{\mathbf{R}} h(t,\tau,\, x-y)\, f(y)\, dy. \tag{12}$$

Важно отметить, что свертка $(h*f)(t,\tau,\cdot)$, $0 < \tau \leqslant t$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, поскольку функция $\widehat{h}(t,\tau,\cdot)$ имеет финитный носитель при каждом $\tau > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1. *Для любого* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *функция* $m(t, \cdot)$ *с вероятностью единица принадлежит пространству* $W_2^\alpha(\mathbf{R})$.

2. *Для любой функции* $f \in L_2(\mathbf{R})$ *выполнено соотношение*

$$\int_0^t (h * f)(t, \tau, \sigma\, w(\tau))\, d\tau = \int_{\mathbf{R}} f(y)\, m(t, y)\, dy. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать конечность математического ожидания $\mathbf{E}\, \|m(t, \cdot)\|^2_{W_2^\alpha}$.

Заметим, что если мы докажем сходимость интеграла

$$I = \int_{|p|\geqslant 1} |p|^{2\alpha}\, \mathbf{E} \Big| \int_0^{t\cdot r(p)} e^{ip\sigma w(\tau)} d\tau \Big|^2 dp, \tag{14}$$

то, с учетом (9), конечность соответствующего математического ожидания будет доказана.

Нам понадобится легко проверяемая формула. Для каждой функции $\varphi \in L_1\,[0, t]$ справедливо соотношение

$$\Big| \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \Big|^2 = 2 \int_{0<\tau_2<\tau_1<t} \mathrm{Re}[\varphi(\tau_1)\overline{\varphi(\tau_2)}]\, d\tau_1\, d\tau_2. \tag{15}$$

Вычислим математическое ожидание, стоящее в формуле (14). Используя (15), получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \Big| \int_0^{t\cdot r(p)} e^{ip\sigma w(\tau)}\, d\tau \Big|^2 \\ &= 2 \cdot \mathrm{Re} \int_{0<\tau_2<\tau_1<t\cdot r(p)} \mathbf{E}\, e^{ip\sigma(w(\tau_1)-w(\tau_2))}\, \mathbf{E}\, e^{-2bp\, w(\tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2 \\ &= 2 \cdot \int_0^{t\cdot r(p)} \Big(\mathrm{Re} \int_{\tau_2}^{t\cdot r(p)} e^{-\frac{p^2\sigma^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}\, d\tau_1 \Big) e^{2b^2p^2\,\tau_2}\, d\tau_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, заметим, что выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\tau_2}^{t\cdot r(p)} e^{-\frac{p^2\sigma^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}\, d\tau_1 \leqslant \frac{2|e^{-\frac{p^2\sigma^2(t\cdot r(p)-\tau_2)}{2}}-1|}{p^2} \leqslant \frac{4}{p^2}. \tag{17}$$

Используя (16), (17), а также легко проверяемые неравенства

$$r(p) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad r(p)\, p^2 \leqslant \frac{1}{b},$$

получаем оценку интеграла I

$$I \leqslant 8 \int\limits_{|p|\geqslant 1} \frac{1}{|p|^{2-2\alpha}} \Bigg(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{2b^2p^2\,\tau}\, d\tau \Bigg)\, dp \leqslant 8t \int\limits_{|p|\geqslant 1} \frac{r(p)}{|p|^{2-2\alpha}}\, e^{2b^2p^2\, t\cdot r(p)}\, dp$$

$$\leqslant 8t\, e^{2b\,t} \int\limits_{|p|\geqslant 1} \frac{1}{|p|^{2-2\alpha}}\, dp < \infty.$$

Теперь докажем второе утверждение теоремы.

Преобразуем левую часть формулы (13). Используя (7), получаем

$$\int\limits_0^t (h*f)(t,\tau,\sigma\, w(\tau))\, d\tau$$

$$= \int\limits_0^t \Bigg(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|p|<\sqrt{\frac{t}{b\,\tau}}} H(t,p)\, \widehat{f}(p)\, e^{-ip\sigma\, w(\tau)}\, dp \Bigg)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{f}(p)\, H(t,p) \cdot \Bigg(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{-ip\sigma w(\tau)}\, d\tau \Bigg)\, dp.$$

С другой стороны

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(y)\, m(t,y)\, dy$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}} f(y) \Big[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ipy}\, H(t,p) \cdot \Big(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{-ip\sigma w(\tau)} d\tau \Big)\, dp \Big]\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{f}(p)\, H(t,p) \cdot \Big(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{-ip\sigma w(\tau)}\, d\tau \Big)\, dp. \quad \square$$

Замечание. Из п.1 теоремы вытекает, что с вероятностью единица случайная функция $m(t,\cdot)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α для всех $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Поясним конструкцию случайной функции $m(t,x)$. Как уже было отмечено выше, локальное время винеровского процесса $l(t,x)$ при каждом $t > 0$ допускает представление в виде интеграла Фурье

$$l(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \int\limits_0^t e^{ipw(\tau)}\, d\tau\, dp$$

$$= (L_2) \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} e^{-ipx} \int\limits_0^t e^{ipw(\tau)}\, d\tau\, dp. \quad (18)$$

Однако, если в (18) вместо $w(\tau)$ подставить процесс $\sigma\, w(\tau)$ (σ – комплексное число), интеграл расходится. Таким образом, мы не можем определить комплексный аналог броуновского локального времени путем соответствующей формальной замены. Поэтому предложенная конструкция случайной функции $m(t,x)$ является по сути регуляризацией функционального интеграла (18). Именно, мы заменяем в (18) допредельную функцию на

$$r_M(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} H(t,p) \Big(\int\limits_0^{t\cdot r(p)} e^{ip\sigma w(\tau)}\, d\tau \Big) e^{-ipx}\, dp.$$

При этом функция $r_M(t,x)$ подобрана таким образом, что последовательность $r_M(t,\cdot)$ при $M \to \infty$ сходится в метрике пространства

$L_2(\Omega\times\mathbf{R}, P\times\mathfrak{m})$ к функции $m(t,\cdot)$, а при каждом $t>0$ и $M>0$ выполнено $\mathbf{E}\, l_M(t,x)=\mathbf{E}\, r_M(t,x)$ (здесь $l_M(t,x)$ – функция, полученная путем замены процесса $w(\tau)$ на $\sigma\, w(\tau)$ в правой части формулы (18)). Из последнего соотношения следует справедливость (10). Отметим также, что в случае $b=0$ функция $m(t,x)$ совпадает с локальным временем винеровского процесса.

Покажем теперь, что именно такой способ регуляризации функционального интеграла (18) является наиболее естественным, поскольку построенная таким образом случайная функция $m(t,x)$ наследует одно важное свойство локального времени винеровского процесса.

Справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in L_2(\mathbf{R})$ удовлетворяет соотношениям*

$$1.\ \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx=0,$$

$$2.\ \int_{\mathbf{R}} x\,f(x)\,dx=0,$$

$$3.\ \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\,(1+x^2)\,dx<\infty.$$

Определим функцию $u(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbf{R}$, полагая

$$u(t,x)=\mathbf{E}\, f*m\,(t,x).$$

Тогда

1. *В случае $\operatorname{Re}\sigma^2>0$ существует равномерный по x предел*

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)=u(x), \tag{19}$$

где функция $u(x)$ является единственным решением уравнения

$$-\frac{\sigma^2}{2}\,u''(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R},$$

удовлетворяющим условию $u(x)\in L_2(\mathbf{R})\cap L_\infty(\mathbf{R})$.

2. *В случае $\operatorname{Re}\sigma^2=0$ потребуем дополнительно, чтобы функция $f\in L_2(\mathbf{R})$ помимо соотношений 1) и 2) удовлетворяла также соотношениям*

4. $\int\limits_{\mathbf{R}} x^2\, f(x)\, dx = 0$

5. $\int\limits_{\mathbf{R}} x^3\, f(x)\, dx = 0$

6. $\int\limits_{\mathbf{R}} |f(x)|\, (1 + x^4)\, dx < \infty$

В этом случае предел (19) *существует, но только в смысле поточечной сходимости.*

Доказательство. Используя (11), перепишем выражение для функции $u(t,x)$ в виде

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \int\limits_{\mathbf{R}} f(x-y)\, \mathbf{E}\, m(t,y)\, dy \\
&= -\frac{1}{\pi\sigma^2} \int\limits_{\mathbf{R}} f(x-y) \left(\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipy}\, \frac{e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} - 1}{p^2}\, dp \right) dy \\
&= -\frac{1}{\pi\sigma^2} \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{f}_x(-p)\, \frac{e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} - 1}{p^2}\, dp, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

где $\widehat{f}_x(p) = e^{ipx}\widehat{f}(-p)$ – преобразование Фурье функции $f_x(y) = f(x-y)$.

Таким образом, выражение для функции $u(t,x)$ принимает вид

$$
u(t,x) = -\frac{1}{\pi\sigma^2} \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{f}(p)\, \frac{e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} - 1}{p^2}\, e^{-ipx}\, dp. \qquad (21)
$$

Далее, заметим, что функция $\widehat{f}(p)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению $\widehat{f}(p) = O(p^2)$, $p \to 0$, что является следствием условий 1), 2) и 3). Таким образом, интеграл из формулы (21) может быть представлен в виде суммы двух сходящихся интегралов $I_1(t,x)$ и $I_2(x)$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= -\frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}(p)}{p^2}\, e^{-\frac{t\sigma^2 p^2}{2}} e^{-ipx}\, dp + \frac{1}{\pi\sigma^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}(p)}{p^2}\, e^{-ipx}\, dp \\
&= I_1(t,x) + I_2(x).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Заметим, что функция $I_2(x)$ является решением дифференциального уравнения $-\frac{\sigma^2}{2}\, u''(x) = f(x)$, что проверяется непосредственным дифференцированием. Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что слагаемое $I_1(t,x)$ при $t \to \infty$ стремится к 0.

В случае, если $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$, сходимость может быть доказана при помощи неравенства Шварца

$$
|I_1(t,x)| < \Bigg(\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{f}(p)|^2}{p^4}\, dp\Bigg)^{1/2} \cdot \Bigg(\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-tp^2\cdot \operatorname{Re}\sigma^2}\, dp\Bigg)^{1/2} \leqslant \frac{C}{t^{1/4}}. \tag{23}
$$

При этом из неравенства (23) следует, что сходимость допредельной функции $u(t,x)$ к решению соответствующего дифференциального уравнения $u(x)$ в этом случае будет равномерной.

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$. Используя интегрирование по частям, перепишем выражение для функции $I_1(t,x)$ в виде

$$
\begin{aligned}
I_1(t,x) &= -\frac{1}{\pi t}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}(p)}{p^3}\, e^{-ipx}\, d(e^{-\frac{itp^2}{2}}) \\
&= -\frac{1}{\pi t}\, \frac{\widehat{f}(p)}{p^3}\, e^{-ipx}\, e^{-\frac{itp^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi t}\int\limits_{\mathbf{R}} \Big(\frac{\widehat{f}(p)}{p^3}\, e^{-ipx}\Big)'_p\, e^{-\frac{itp^2}{2}}\, dp \\
&= \frac{1}{\pi t}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}\,'(p)}{p^3}\, e^{-ipx}\, e^{-\frac{itp^2}{2}}\, dp - \frac{3}{\pi t}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}(p)}{p^4}\, e^{-ipx}\, e^{-\frac{itp^2}{2}}\, dp \\
&- \frac{ix}{\pi t}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\widehat{f}(p)}{p^3}\, e^{-ipx}\, e^{-\frac{itp^2}{2}}\, dp = R_1(t,x) + R_2(t,x) + R_3(t,x).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Покажем теперь, что функция $R_1(t,x)$ при $t \to \infty$ равномерно по x стремится к нулю. Для этого нам понадобятся легко проверяемые неравенства $\sup_{p\in\mathbf{R}} |\widehat{f}\,'(p)| \leqslant C$ и $|\widehat{f}\,'(p)| \leqslant C|p|^3$, $p \in \mathbf{R}$, которые являются следствием соотношений (2), (4), (5) и (6).

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |R_1(t,x)| \leqslant \frac{1}{\pi t} \int\limits_{|p|\leqslant 1} \frac{|\widehat{f}\,'(p)|}{|p|^3}\, dp + \frac{1}{\pi t} \sup_{p\in\mathbf{R}} |\widehat{f}\,'(p)| \cdot \int\limits_{|p|>1} \frac{1}{|p|^3}\, dp \leqslant \frac{C}{t}. \tag{25}$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |R_1(t,x)| = 0.$$

Аналогичным образом может быть показана справедливость соотношений

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |R_2(t,x)| = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} |R_3(t,x)| = 0, \;\; x \in \mathbf{R},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Отметим, что в случае, если $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$, в (19) есть не только равномерная сходимость, но и сходимость в L_2, поскольку L_2 – норма функции $I_1(t,\cdot)$ стремится к 0 при $t \to \infty$.

Действительно,

$$\|I_1(t,\cdot)\|^2_{L_2} = C \cdot \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|\widehat{f}(p)|^2}{p^4}\, e^{-tp^2\cdot \operatorname{Re}\sigma^2}\, dp \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-p^2\cdot\operatorname{Re}\sigma^2}\, dp \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Последнее неравенство следует из соотношений 1), 2) и 3).

Отметим еще, что функция $u(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, определенная с помощью формулы $u(t,x) = \mathbf{E}\, f * m\,(t,x)$, является решением уравнения

$$\partial_t\, u - \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{xx}\, u = f(x), \quad u(0,x) = 0, \tag{26}$$

что проверяется непосредственной подстановкой формулы (21) в (26).

Автор выражает благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. М. С. Агранович, *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, М., МЦНМО, 2013, с. 378.
2. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий.* — Тр. МИАН СССР, **195** (1994), 3–285.
3. S. M. Berman, *Local times and sample function properties of stationary Gaussian process.* — Trans. Amer. Math. Soc., **137** (1969), 277–299.
4. Kai Lai Chung, Zhongxin Zhao, *From Brownian motion to Schrodinger's equation.* — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1995).
5. I. A. Ibragimov, N. V. Smorodina and M. M. Faddeev, *Local time and local reflection of the Wiener process.* — In: Karapetyants A.N., Pavlov I.V., Shiryaev A.N. (eds) Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2020. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 358. Springer, Cham.
6. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры*, Л., Изд–во Ленингр. ун–та, 1981, с. 200.

Nikolaev A. K. An analogue of the local time of the complex Brownian motion process.

The aim of the present paper is to construct an analogue of local time for the standard Wiener process multiplied by complex constant.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия

Поступило 15 сентября 2021 г.

Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная набережная, 10,
197022, Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: nikolaiev.96@bk.ru