

А. А. Кравченко, А. А. Хартов

**АСИМПТОТИКИ СЛОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ
В СРЕДНЕМ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ЭЙЛЕРОВСКИХ ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ**

§1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы случайные процессы $X_1(t), \dots, X_d(t)$, $t \in [0, 1]$, с нулевыми математическими ожиданиями и непрерывными ковариациями $K^{X_1}(t, s), \dots, K^{X_d}(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$, соответственно, $d \in \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел). Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве случайное поле $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, имеющее нулевое математическое ожидание и следующую ковариационную функцию

$$K^{Y_d}(t, s) = \prod_{j=1}^d K^{X_j}(t_j, s_j),$$

где $t = (t_1, \dots, t_d)$ и $s = (s_1, \dots, s_d)$ из $[0, 1]^d$. Такое случайное поле $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, называют *d-тензорным произведением* случайных процессов $X_1(t), \dots, X_d(t)$, $t \in [0, 1]$ (см. [1]). Если у последних распределения в некотором смысле подобны, то поле $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, можно рассматривать как естественный многопараметрический аналог каждого из процессов $X_1(t), \dots, X_d(t)$, $t \in [0, 1]$.

В данной работе изучается зависимость аппроксимационных свойств случайных полей указанного типа от параметрической размерности d на примере важного их представителя – тензорного произведения эйлеровских интегрированных процессов.

Напомним, что *эйлеровским r-интегрированным процессом*, с целым $r \geq 0$, называется гауссовский случайный процесс $E_r(t)$, $t \in [0, 1]$,

Ключевые слова: постановка в среднем, сложность аппроксимации, трактability, эйлеровский интегрированный случайный процесс, тензорное произведение процессов, случайные поля, высокая размерность.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ–ННИО 20-51-12004.

имеющий нулевое математическое ожидание и ковариацию следующего вида

$$K^{E_r}(t, s) := \int_{[0,1]^r} \min\{t, x_1\} \min\{x_1, x_2\} \dots \min\{x_r, s\} dx_1 \dots dx_r, \quad (1)$$

где $K^{E_0}(t, s) = \min\{t, s\}$, $t, s \in [0, 1]$. Интересно, что ковариация (1), как ядро ковариационного интегрального оператора процесса $E_r(t)$, $t \in [0, 1]$, является итерированной версией ядра K^{E_0} и может быть представлена с помощью полиномов Эйлера, а сам случайный процесс $E_r(t)$, $t \in [0, 1]$, получается специальным r -кратным интегрированием стандартного винеровского процесса (см. подробнее в [2]).

Опишем постановку задачи аппроксимации в общем случае. Случайное поле $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, рассматривается как элемент пространства $L_2([0, 1]^d)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{2,d}$ и нормой $\|\cdot\|_{2,d}$. Для $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, будет изучаться *сложность аппроксимации в среднем* (*сложность аппроксимации для краткости*):

$$n^{Y_d}(\varepsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} : e^{Y_d}(n) \leq \varepsilon e^{Y_d}(0)\}. \quad (2)$$

Здесь

$$e^{Y_d}(n) := \inf\left\{\left(\mathbb{E}\|Y_d - \tilde{Y}_d^{(n)}\|_{2,d}^2\right)^{1/2} : \tilde{Y}_d^{(n)} \in \mathcal{A}_n^{Y_d}\right\}$$

есть наименьшая среднеквадратическая ошибка аппроксимации случайного поля $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, по всем линейным аппроксимациям $\tilde{Y}_d^{(n)}(t)$, $t \in [0, 1]^d$, ранга $n \in \mathbb{N}$ из класса

$$\mathcal{A}_n^{Y_d} := \left\{\sum_{m=1}^n (Y_d, \psi_m)_{2,d} \psi_m : \psi_m \in L_2([0, 1]^d)\right\},$$

число $\varepsilon \in (0, 1)$ – *порог ошибки*. Мы будем работать с *относительной ошибкой*, беря в учет “размер” поля $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$:

$$e^{Y_d}(0) := (\mathbb{E}\|Y_d\|_{2,d}^2)^{1/2} < \infty.$$

Величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$ может быть описана через собственные числа ковариационного оператора K^{Y_d} случайного поля $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$. Пусть $(\lambda_m^{Y_d})_{m \in \mathbb{N}}$ обозначает последовательность собственных чисел, а $(\psi_m^{Y_d})_{m \in \mathbb{N}}$ – соответствующую последовательность собственных функций K^{Y_d} , т.е. $K^{Y_d} \psi_m^{Y_d}(t) = \lambda_m^{Y_d} \psi_m^{Y_d}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]^d$. Предполагается, что элементы $(\lambda_m^{Y_d})_{m \in \mathbb{N}}$ занумерованы в невозрастающем порядке. Если оператор K^{Y_d} имеет конечный ранг $p \in \mathbb{N}$, то мы формально

полагаем $\lambda_m^{Y_d} := 0$ и $\psi_m^{Y_d} \equiv 0$ для $m > p$. Пусть Λ^{Y_d} обозначает след оператора K^{Y_d} , т.е. $\Lambda^{Y_d} := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{Y_d}$.

Известно (см. [3, 4] и [5]), что для любого $n \in \mathbb{N}$ следующее n -ранговое случайное поле

$$\tilde{Y}_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^n (Y_d, \psi_m^{Y_d})_{2,d} \psi_m^{Y_d}(t), \quad t \in [0, 1]^d, \quad (3)$$

является наилучшей линейной аппроксимацией для $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, в указанном среднеквадратическом смысле. При этом формула (2) принимает вид

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \mathbb{E} \|Y_d - \tilde{Y}_d^{(n)}\|_{2,d}^2 \leq \varepsilon^2 \mathbb{E} \|Y_d\|_{2,d}^2 \right\}.$$

Тогда с учетом (3) и того, что $\mathbb{E} (Y_d, \psi_m^{Y_d})_{2,d}^2 = (\psi_m^{Y_d}, K^{Y_d} \psi_m^{Y_d})_{2,d} = \lambda_m^{Y_d}$, $m \in \mathbb{N}$, мы получаем следующие представления сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ в терминах $\lambda_m^{Y_d}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n^{Y_d}(\varepsilon) &= \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d} \leq \varepsilon^2 \Lambda^{Y_d} \right\} \\ &= \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n \lambda_k^{Y_d} \geq (1 - \varepsilon^2) \Lambda^{Y_d} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Благодаря определенной тензорной ковариационной структуре $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, последовательность $(\lambda_m^{Y_d})_{m \in \mathbb{N}}$ представляет собой заномерованный в невозрастающем порядке массив чисел

$$\prod_{j=1}^d \lambda_{k_j}^{X_j}, \quad k_1, k_2, \dots, k_d \in \mathbb{N}.$$

где $(\lambda_k^{X_j})_{k \in \mathbb{N}}$ обозначает невозрастающую последовательность собственных чисел ковариационного оператора процесса $X_j(t)$, $t \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, d$. Отметим также, что след Λ^{Y_d} ковариационного оператора K^{Y_d} имеет вид

$$\Lambda^{Y_d} = \prod_{j=1}^d \Lambda^{X_j},$$

где Λ^{X_j} – след ковариационного оператора процесса $X_j(t)$, $t \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, d$. Таким образом, поведение сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$

полностью описывается последовательностями $(\lambda_k^{X_j})_{k \in \mathbb{N}}$, однако это описание по формуле (4) не вполне явно.

Далее процессами $X_1(t), \dots, X_d(t)$, $t \in [0, 1]$, будут выступать эйлеровские интегрированные процессы, вообще говоря, различных порядков $r_1, \dots, r_d$, а случайное поле $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, – их тензорным произведением. Мы будем изучать поведение сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при высокой параметрической размерности $d \in \mathbb{N}$, что является одной из задач весьма активно развивающейся *теории многопараметрических проблем* (основы, мотивация и другие задачи этой теории описаны в [6]). Более точно, мы интересуемся асимптотиками $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при сколь угодно малом, но фиксированном, пороге ошибки $\varepsilon \in (0, 1)$ и $d \rightarrow \infty$. Формально для решения этой задачи мы полагаем, что нам задана целая последовательность эйлеровских интегрированных процессов $X_j(t)$, $t \in [0, 1]$, с соответствующей последовательностью порядков r_j , $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, индуцируется последовательность случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, для каждого из которых определена величина $n^{Y_d}(\varepsilon)$.

Заметим, что последовательность собственных чисел ковариационного оператора эйлеровского r -интегрированного процесса известна (см. [2] и ссылки в ней), она имеет вид $(\pi(k - 1/2))^{-2r-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$\lambda_k^{X_j} = \left(\frac{1}{\pi(k - 1/2)} \right)^{2r_j+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Lambda^{X_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(k - 1/2)} \right)^{2r_j+2}.$$

Поэтому асимптотическое поведение $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при $d \rightarrow \infty$ полностью зависит от последовательности параметров r_j , $j \in \mathbb{N}$.

Следует отметить, что для тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов сложность аппроксимации уже изучалась в работе Лифшица, Папагеоргиу и Вожняковского [2] в неасимптотической постановке с произвольными $\varepsilon \in (0, 1)$ и $d \in \mathbb{N}$ с получением критериев для разных типов так называемой *трактабельности* (см. [6] и [7]). В интересующей асимптотической постановке, при фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ и $d \rightarrow \infty$, известен лишь результат Хартова из [8] (с. 848–852), полученный для весьма частного случая поведения параметров r_j , $j \in \mathbb{N}$. В настоящей работе мы дополним этот результат, рассмотрев достаточно широкий и важный класс случаев. В пункте 2 даны формулировки соответствующих утверждений, в пункте 3 приведены их доказательства.

В статье мы используем следующие обозначения. Для двух последовательностей x_n и y_n , $n \in \mathbb{N}$, мы пишем $x_n \sim y_n$, если $x_n/y_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Для произвольной функции распределения F величина $F^{-1}(p)$ при $p \in (0, 1)$ обозначает квантиль $\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$. Символом $\mathbf{1}(A)$ обозначается индикаторная функция со значением 1, если A выполнено, и со значением 0, если нет.

§2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Итак, рассматриваются величины $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, являющихся тензорными произведениями первых d эйлеровских интегрированных процессов из заданной последовательности $X_j(t)$, $t \in [0, 1]$, $j \in \mathbb{N}$, с соответствующими параметрами r_j , $j \in \mathbb{N}$.

Сначала выделим случай, когда при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ фактически нет зависимости роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$ от d и когда эта зависимость существенна.

Утверждение 1. *Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем $\sup_{d \in \mathbb{N}} n^{Y_d}(\varepsilon) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j} < \infty$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем $n^{Y_d}(\varepsilon) \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j} = \infty$.*

Нам интересен лишь случай, когда $n^{Y_d}(\varepsilon) \rightarrow \infty$, $d \rightarrow \infty$. Поэтому, в соответствии с утверждением 1, мы ограничиваемся условием $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j} = \infty$.

В статье [8] был получен следующий частный результат.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $c > 0$ выполнено*

$$\frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j \ln j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ верна асимптотика

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = D_c^{-1}(1 - \varepsilon^2) \ln d + o(\ln d), \quad d \rightarrow \infty,$$

где D_c – функция распределения сверточной c -степени закона Дикмана.

Подробнее о законе Дикмана и его сверточных степенях можно найти в [9].

Следующие теоремы дополняют приведенный результат случаями более медленного роста последовательности r_j , $j \in \mathbb{N}$. Более точно, мы будем предполагать, что при некоторых $c > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$ выполнено

$$\frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j^\alpha}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Случай $\alpha = 1$ также будет рассмотрен, но более общо:

$$\frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j(\ln j)^\beta}, \quad j \rightarrow \infty, \quad (6)$$

с некоторыми $c > 0$ и $\beta \in [0, 1)$.

Сначала рассмотрим частный случай, когда выполнено (5) с $\alpha = 0$. В силу того, что r_j принимают лишь целые неотрицательные значения, данное предположение в точности означает постоянность r_j при всех $j \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого значения.

Теорема 2. Пусть $r_j = r$ при всех $j \geq j_0 \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ верна асимптотика

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона,

$$a_d = c_1 d, \quad b_d = \sqrt{(c_2 - c_1^2)d}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Здесь

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \ln\left(\frac{\lambda_k}{\Lambda}\right) \right| \frac{\lambda_k}{\Lambda}, \quad c_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\left(\frac{\lambda_k}{\Lambda}\right) \frac{\lambda_k}{\Lambda}, \quad (8)$$

где

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{\pi(k-1/2)} \right)^{2r+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(k-1/2)} \right)^{2r+2}. \quad (9)$$

Видим, что в рассмотренном случае сложность аппроксимации $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, растет экспоненциально по d , причем таким же образом, как и для тензорных степеней процессов (см. [8] и [10]).

Далее отдельно рассматриваются случаи $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha = 1$.

Теорема 3. Пусть выполнено (5) с некоторыми $c > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ верна асимптотика:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона,

$$a_d = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{N_\alpha} \left| \ln \left(\frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \right) \right| \frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \sim \frac{c\alpha}{1-\alpha} \cdot d^{1-\alpha} \ln d,$$

$$b_d = \sqrt{\frac{c\alpha^2}{1-\alpha}} \cdot d^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln d, \quad d \in \mathbb{N},$$

где $N_\alpha = \lfloor \frac{3^{1/\alpha}-1}{2} \rfloor + 1$.

Здесь сложность аппроксимации $Y_d(t)$, $t \in [0, 1]^d$, растет субэкспоненциально по d .

Теорема 4. Пусть выполнено условие (6) с некоторыми $c > 0$ и $\beta \in [0, 1)$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ верна асимптотика:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона,

$$a_d = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^2 \left| \ln \left(\frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \right) \right| \frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \sim \frac{c}{2-\beta} \cdot (\ln d)^{2-\beta},$$

$$b_d = \sqrt{\frac{c}{3-\beta}} \cdot \ln^{\frac{3-\beta}{2}} d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В данной случае наблюдаем для величины $n^{Y_d}(\varepsilon)$ более чем полиномиальный рост по d .

По приведенным результатам можно заметить, что в “большинстве” регулярных случаев при условии $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j} = \infty$ в логарифмических асимптотиках $n^{Y_d}(\varepsilon)$ в качестве ε -компоненты выступает квантиль нормального закона и лишь в “пограничном” случае, когда ряд в условии “почти” сходится, этот принцип нарушается.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство утверждения 1. В соответствии с утверждениями 4 и 5 из [8] для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено $\sup_{d \in \mathbb{N}} n^{Y_d}(\varepsilon) < \infty$ или $\lim_{d \rightarrow \infty} n^{Y_d}(\varepsilon) = \infty$ в точности тогда, когда соответственно сходится или расходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}. \quad (12)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{3^{2r_j+2}} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \leq \left(1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^2}{(2k-1)^2}\right) \cdot \frac{1}{3^{2r_j+2}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда видно, что сходимость ряда (12) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. По теореме 1 из [8] для получения асимптотики (7) достаточно показать следующую сходимость:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{Y_d}}{\Lambda^{Y_d}} \mathbb{1} \left(\frac{\ln(\lambda_m^{Y_d}/\Lambda^{Y_d}) - a_d}{b_d} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad d \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Для этого на некотором вероятностном пространстве построим независимые случайные величины U_j , $j \in \mathbb{N}$, со следующими распределениями:

$$\mathbb{P}(U_j = -\ln(\lambda_k^{X_j}/\Lambda^{X_j})) = \frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Так как $r_j = r$ при $j \geq j_0$, случайные величины U_{l+j_0} , $l = 0, 1, \dots$ одинаково распределены: $\mathbb{P}(U_j = -\ln(\lambda_k/\Lambda)) = \lambda_k/\Lambda$, $k \in \mathbb{N}$, где λ_k и Λ определены по (9). Заметим, что $\mathbb{E}U_j = c_1$, $\mathbb{E}U_j^2 = c_2$ и $\mathbb{D}U_j = c_2 - c_1^2$, $j \geq j_0$, где c_1 и c_2 из (8). По центральной предельной теореме справедливо:

$$\mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=j_0}^d U_j - c_1(d - j_0 + 1)}{\sqrt{(c_2 - c_1^2)(d - j_0 + 1)}} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad d \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Благодаря тому, что j_0 фиксировано, а $d \rightarrow \infty$, выполнится сходимость

$$\mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=1}^d U_j - c_1 d}{\sqrt{(c_2 - c_1^2)d}} \leq x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad d \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

По лемме 1 из [8] (см. также лемму 3.1 из [10]) левая часть этого соотношения в точности равна

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{Y_d}}{\Lambda^{Y_d}} \mathbb{1} \left(\frac{-\ln(\lambda_m^{Y_d}/\Lambda^{Y_d}) - c_1 d}{\sqrt{(c_2 - c_1^2)d}} \leq x \right).$$

В соответствии с выражениями для a_d и b_d , $d \in \mathbb{N}$, приходим к (13). $\square$

Далее мы будем использовать обозначение:

$$\bar{\lambda}_k^{X_j} := \frac{\lambda_k^{X_j}}{\Lambda^{X_j}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 3. Мы воспользуемся общей теоремой 3 из [8] (полагая $G = \Phi$). Предварительно необходимо проверить условие (25) из [8]. В соответствии с замечанием 3 из [8] для этого достаточно выполнения сходимости $\bar{\lambda}_1^{X_j} \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$. Это, в свою очередь, легко увидеть из представления:

$$\bar{\lambda}_1^{X_j} = \frac{\lambda_1^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2r_j+2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2k-1)}\right)^{2r_j+2}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}},$$

с учетом того, что $r_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$.

Далее в теореме 3 из [8] можно принять $N = N_\alpha$. Действительно, рассмотрим ряд из условия (35) из [8]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=N_\alpha+1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=N_\alpha+1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=N_\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\leq C_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2N_\alpha+1)^{2r_j+2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где константа $C_\alpha = 1 + \sum_{k=N_\alpha+2}^{\infty} \left(\frac{2N_\alpha+1}{2k-1}\right)^2 < \infty$. Здесь, с учетом условия (5), имеем:

$$\frac{1}{(2N_\alpha+1)^{2r_j+2}} = (3^{-2r_j-2})^{\frac{\ln(2N_\alpha+1)}{\ln 3}} \sim \left(\frac{c}{j^\alpha}\right)^{\frac{\ln(2N_\alpha+1)}{\ln 3}}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду того, что $N_\alpha > \frac{3^{1/\alpha}-1}{2}$, т.е. $\alpha \ln(2N_\alpha+1) > \ln 3$, ряд в (14) сходится, что влечет выполнение (35) из [8].

В соответствии с теоремой 3 из [8] для получения асимптотики (10) с данными a_d и b_d достаточно проверить следующие условия:

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{N_\alpha} \bar{\lambda}_k^{X_j} \mathbb{1}(\bar{\lambda}_k^{X_j} < e^{-\tau b_d}) = 0, \quad \text{для любого } \tau > 0; \\
 (B) \quad & \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{b_d} \left(\sum_{j=1}^d M_{1, N_\alpha}^{X_j}(\tau b_d) - a_d \right) = 0, \quad \text{для любого } \tau > 0; \\
 (C) \quad & \lim_{\tau \rightarrow 0} \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \left(M_{2, N_\alpha}^{X_j}(\tau b_d) - (M_{1, N_\alpha}^{X_j}(\tau b_d))^2 \right) \\
 & = \lim_{\tau \rightarrow 0} \underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \left(M_{2, N_\alpha}^{X_j}(\tau b_d) - (M_{1, N_\alpha}^{X_j}(\tau b_d))^2 \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$M_{p, N_\alpha}^{X_j}(x) = \sum_{k=1}^{N_\alpha} |\ln^p \bar{\lambda}_k^{X_j}| \bar{\lambda}_k^{X_j} \mathbb{1}(\bar{\lambda}_k^{X_j} \geq e^{-x}), \quad x \geq 0, \quad p \in \{1, 2\}.$$

Рассмотрим числа $\bar{\lambda}_k^{X_j}$ при $k = 1, 2, \dots, N_\alpha$ и $j = 1, 2, \dots, d$. При $j \rightarrow \infty$ верно

$$\bar{\lambda}_k^{X_j} \sim \frac{\lambda_k^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} = (3^{-2r_j-2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} \sim \left(\frac{c}{j^\alpha} \right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{c}{j^\alpha} \right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} & \geq \left(\frac{c^{1/\alpha}}{d} \right)^{\frac{\alpha \ln(2k-1)}{\ln 3}} = \exp \left\{ (\ln c^{1/\alpha} - \ln d) \cdot \frac{\alpha \ln(2k-1)}{\ln 3} \right\}, \\
 & j = 1, \dots, d.
 \end{aligned}$$

Несложно видеть, что для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших d величина в правой части больше $e^{-\tau b_d}$. Таким образом, для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших d верно

$$\bar{\lambda}_k^{X_j} \geq e^{-\tau b_d}, \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

Отсюда, в частности, вытекает соотношение (A), т.к. индикаторные функции в нем обращаются в нуль. Несложно видеть, что с учетом выбора a_d соотношение (B) выполнено в силу равенства в нем единице всех индикаторных функций. Последнее верно и для соотношения (C),

суммы в котором при всех достаточно больших d принимают следующий вид

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \left[\sum_{k=1}^{N_\alpha} |\ln^2 \bar{\lambda}_k^{X_j} \bar{\lambda}_k^{X_j} - \left(\sum_{k=1}^{N_\alpha} |\ln \bar{\lambda}_k^{X_j} \bar{\lambda}_k^{X_j} \right)^2| \right]. \quad (15)$$

Выше было показано, что $\bar{\lambda}_1^{X_j} \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$. Из этого следует:

$$|\ln \bar{\lambda}_1^{X_j}| = -\ln(1 - (1 - \bar{\lambda}_1^{X_j})) \sim 1 - \bar{\lambda}_1^{X_j} \sim \bar{\lambda}_2^{X_j}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Далее заметим, что по определению $N_\alpha \geq 2$, а для любого $k \geq 2$ верно

$$|\ln \bar{\lambda}_k^{X_j}| = |\ln(\lambda_k^{X_j} / \lambda_1^{X_j})| + o(1) = (2r_j + 2) \ln(2k - 1) + o(1) \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty,$$

и также

$$\frac{\bar{\lambda}_{k+1}^{X_j}}{\bar{\lambda}_k^{X_j}} = \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right)^{2r_j+2} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда несложно убедиться, что при любом $k \in \mathbb{N}$ и $k \neq 2$ выполнено

$$|\ln \bar{\lambda}_k^{X_j} \bar{\lambda}_k^{X_j}| = o(|\ln \bar{\lambda}_2^{X_j} \bar{\lambda}_2^{X_j}|), \quad |\ln \bar{\lambda}_k^{X_j}|^2 \bar{\lambda}_k^{X_j} = o(|\ln \bar{\lambda}_2^{X_j}|^2 \bar{\lambda}_2^{X_j}), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_\alpha} |\ln^2 \bar{\lambda}_k^{X_j} \bar{\lambda}_k^{X_j} - \left(\sum_{k=1}^{N_\alpha} |\ln \bar{\lambda}_k^{X_j} \bar{\lambda}_k^{X_j} \right)^2| &\sim |\ln^2 \bar{\lambda}_2^{X_j} \bar{\lambda}_2^{X_j} - (|\ln \bar{\lambda}_2^{X_j} \bar{\lambda}_2^{X_j}|)^2| \\ &\sim |\ln^2 \bar{\lambda}_2^{X_j} \bar{\lambda}_2^{X_j}|, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, используя сходимость $\bar{\lambda}_1^{X_j} \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$, получаем

$$|\ln^2 \bar{\lambda}_2^{X_j} \bar{\lambda}_2^{X_j}| \sim |\ln^2(\lambda_2^{X_j} / \lambda_1^{X_j})| (\lambda_2^{X_j} / \lambda_1^{X_j}) = \ln^2(3^{2r_j+2}) 3^{-2r_j-2}, \quad j \rightarrow \infty.$$

По предположению (5) имеем

$$\ln^2(3^{2r_j+2}) 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c\alpha^2 \ln^2 j}{j^\alpha}, \quad j \rightarrow \infty.$$

В итоге все выражение в (15) при $d \rightarrow \infty$ эквивалентно следующей сумме

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \frac{c\alpha^2 \ln^2 j}{j^\alpha}.$$

Справедлива асимптотика (см. [11]):

$$\sum_{j=1}^d \frac{\ln^2 j}{j^\alpha} \sim \int_1^d \frac{\ln^2 x}{x^\alpha} dx \sim \frac{d^{1-\alpha} \ln^2 d}{1-\alpha}, \quad d \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \frac{c\alpha^2 \ln^2 j}{j^\alpha} \sim \frac{1}{b_d^2} \cdot \frac{c\alpha^2}{1-\alpha} d^{1-\alpha} \ln^2 d, \quad d \rightarrow \infty.$$

С учетом выбора b_d выражение справа равно единице. В частности, это означает, что в (С) верхние и нижние пределы при $d \rightarrow \infty$ равны единице. Это, очевидно, влечет справедливость всего (С).

Итак, все условия теоремы 3 из [8] проверены. По этой теореме справедлива асимптотика (10).

Осталось вывести асимптотику последовательности a_d , $d \in \mathbb{N}$. С учетом замечаний выше, имеем

$$a_d \sim \sum_{j=1}^d \left| \ln \left(\frac{\lambda_2^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \right) \right| \frac{\lambda_2^{X_j}}{\Lambda^{X_j}} \sim \sum_{j=1}^d \left| \ln \left(\frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} \right) \right| \frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = \sum_{j=1}^d \ln(3^{2r_j+2}) 3^{-2r_j-2},$$

$$d \rightarrow \infty.$$

По предположению (5) имеем

$$a_d \sim \sum_{j=1}^d \frac{c\alpha \ln j}{j^\alpha} \sim c\alpha \int_1^d \frac{\ln x}{x^\alpha} dx \sim \frac{c\alpha}{1-\alpha} \cdot d^{1-\alpha} \ln d, \quad d \rightarrow \infty. \quad \square$$

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся теоремой 3 из [8] (полагая $G = \Phi$). В предположении (6) справедлива сходимость $\bar{\lambda}_1^{X_j} \rightarrow 1$, $j \rightarrow \infty$, а значит, выполнено и необходимое для проверки условие (25) из теоремы 3 из [8]. Это показывается так же, как в доказательстве теоремы 3.

Далее в теореме 3 из [8] можно принять $N = 2$. Действительно, рассмотрим ряд из условия (35) из [8]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda_k^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \leq C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5^{2r_j+2}}, \quad (16)$$

где $C_1 := 1 + \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{5}{2^{k-1}} \right)^2 < \infty$. С учетом условия (6), имеем:

$$\frac{1}{5^{2r_j+2}} = (3^{-2r_j-2})^{\frac{\ln 5}{\ln 3}} \sim \left(\frac{c}{j(\ln j)^\beta} \right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Ряд в (16) сходится, что влечет выполнение (35) из [8].

По теореме 3 из [8] для получения асимптотики (11) с достаточно проверить условия (A)–(C) (см. доказательство теоремы 3) с $N_\alpha = 2$ и с данными a_d и b_d .

В виду сходимости $\bar{\lambda}_1^{X_j} \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$, имеем

$$\bar{\lambda}_2^{X_j} \sim \frac{\lambda_2^{X_j}}{\lambda_1^{X_j}} = \frac{1}{3^{2r_j+2}} \sim \frac{c}{j(\ln j)^\beta}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Заметим, что

$$\frac{c}{j(\ln j)^\beta} \geq \frac{c}{d(\ln d)^\beta} = \exp\{\ln c - \ln d - \beta \ln \ln d\}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Видно, что для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших d величина в правой части больше $e^{-\tau b_d}$. Таким образом, для любого $\tau > 0$ и всех достаточно больших d верно

$$\bar{\lambda}_1^{X_j} > \bar{\lambda}_2^{X_j} > e^{-\tau b_d}, \quad \text{при всех } j = 1, 2, \dots, d.$$

Отсюда вытекает соотношение (A), т.к. индикаторные функции в нем обращаются в нуль. Все индикаторные функции в условиях (B) и (C) равны 1 в пределе. Поэтому (B) выполнено в силу соответствующего выбора a_d , а для проверки (C) достаточно рассматривать поведение сумм

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \left[\sum_{k=1}^2 |\ln^2 \bar{\lambda}_k^{X_j}| \bar{\lambda}_k^{X_j} - \left(\sum_{k=1}^2 |\ln \bar{\lambda}_k^{X_j}| \bar{\lambda}_k^{X_j} \right)^2 \right].$$

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3, можно показать, что эти суммы эквивалентны следующим суммам

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \ln^2(3^{2r_j+2}) 3^{-2r_j-2}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Последние, в свою очередь, по предположению (6) эквивалентны

$$\frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \left(\ln^2 j \cdot \frac{c}{j(\ln j)^\beta} \right) = \frac{c}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \frac{(\ln j)^{2-\beta}}{j}.$$

Справедлива асимптотика (см. [11]):

$$\sum_{j=1}^d \frac{(\ln j)^{2-\beta}}{j} \sim \int_1^d \frac{(\ln x)^{2-\beta}}{x} dx = \frac{(\ln d)^{3-\beta}}{3-\beta}, \quad d \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{c}{b_d^2} \sum_{j=1}^d \frac{(\ln j)^{2-\beta}}{j} \sim \frac{1}{b_d^2} \cdot \frac{c}{3-\beta} (\ln d)^{3-\beta}.$$

С учетом выбора b_d выражение справа равно единице. Это влечет справедливость всего (С). В итоге по теореме 3 из [8] верна асимптотика (11).

Осталось проверить асимптотику для последовательности a_d , $d \in \mathbb{N}$. С учетом замечаний выше, имеем

$$a_d \sim \sum_{j=1}^d \left| \ln \left(\frac{\lambda_2^{x_j}}{\Lambda^{x_j}} \right) \right| \frac{\lambda_2^{x_j}}{\Lambda^{x_j}} \sim \sum_{j=1}^d \left| \ln \left(\frac{\lambda_2^{x_j}}{\lambda_1^{x_j}} \right) \right| \frac{\lambda_2^{x_j}}{\lambda_1^{x_j}} = \sum_{j=1}^d \ln(3^{2r_j+2}) 3^{-2r_j-2},$$

$$d \rightarrow \infty.$$

По предположению (6) находим

$$a_d \sim \sum_{j=1}^d \frac{c(\ln j)^{1-\beta}}{j} \sim c \int_1^d \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{x} dx = \frac{c}{2-\beta} \cdot (\ln d)^{2-\beta}, \quad d \rightarrow \infty.$$

Теорема полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Karol, A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators*. — Trans. Amer. Math. Soc. **360**, No. 3 (2008), 1443–1474.
2. M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes*. — Probab. Math. Stat., **32**, No. 1 (2012), 131–165.
3. J. L. Brown, *Mean Square truncation error in series expansions of random functions*. — J. Soc. Indust. Appl. Math., **8**, No. 1 (1960), 28–32.

4. K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No. 1733, Springer, Berlin, 2000.
5. G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Average case optimal algorithms in Hilbert spaces*. — J. Approx. Theory, **47** (1986), 17–25.
6. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.
7. M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *verage case tractability of non-homogeneous tensor product problems*. — J. Complexity, **28**, Nos. 5–6 (2012), 539–561.
8. A. A. Khartov, *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements*. — J. Complexity, **31** (2015), 835–866.
9. D. Hensley, *The convolution powers of the Dickman function*. — J. London Math. Soc., **33**, No. 3 (1986), 395–406.
10. M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimensionality in approximation of random fields*. — Probab. Math. Stat., **26**, No. 1 (2006), 97–112.
11. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1987.

Kravchenko A. A., Khartov A. A. Asymptotics of average case approximation complexity for tensor products of Euler integrated processes.

We consider random fields that are tensor products of d Euler integrated processes. The average case approximation complexity for a given random field is defined as the minimal number of values of continuous linear functionals that is needed to approximate the field with relative 2-average error not exceeding a given threshold ε . In the paper we obtain logarithmic asymptotics of the average case approximation complexity for such random fields for fixed ε and $d \rightarrow \infty$ under rather weak assumptions for the smoothness parameters of the marginal processes.

С.-Петербургский
Национальный Исследовательский
Университет Информационных Технологий,
Механики и Оптики (Университет ИТМО)
Кронверкский пр. 49,
197101 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sasha121196@mail.ru

Поступило 5 ноября 2021 г.

Смоленский Государственный Университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000 Смоленск, Россия
E-mail: alexeykharov@gmail.com