Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

Л. Б. Клебанов

О НОРМИРОВКАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение

При суммировании случайных величин часто применяется их нормировка (масштабирование) с целью получения собственного предельного распределения. Эта нормировка, как правило, состоит в умножении суммы (или, эквивалентно, слагаемых, входящих в сумму) на некоторое число, зависящее от количества слагаемых и стремящееся к нулю. В случае рассмотрения сумм целочисленных величин подобная нормировка выглядит довольно неестественно, так как выводит из класса рассматриваемых величин. Поэтому в теории предельных теорем для сумм целочисленных случайных переменных часто используются семейства прореживающих операторов, заменяющие собой классические нормировки. Одним из наиболее популярных семейств является семейство бернуллиевских операторов, заменяющих неотрицательную целочисленную случайную величину X суммой $\widetilde{X}(p) = \sum\limits_{k=1}^{X} \varepsilon_k$, где ε_k – независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха $p \in (0,1)$. Представляется, что прореживающим оператором можно было бы назвать любое семейство отображений $X \to \widetilde{X}(p)$, $p \in (0,1)$ множества неотрицательных целочисленных случайных величин в себя, при условии, что распределение величины $\widetilde{X}(p)$ в некотором смысле ближе к вырожденному в нуле, чем распределение величины X. Однако, это не так. Действительно, "классическая" нормировка меняет не форму распределения, а только его тип. Поэтому и "целочисленная" нормировка должна в каком-то смысле возможно более полно сохранять форму распределения преобразуемой случайной величины. Идеальным преобразованием оказалось бы такое, при котором распределение X перешло бы в смесь

Ключевые слова: целочисленные случайные величины; прореживающие операторы; распределение Сибуя; распределение Пуассона.

Работа была частично финансирована Грантовым Агентством Чешской Республики (Grant GAČR 19-04412S).

его же с распределением, сосредоточенным в нуле. Дадим соответствующее определение в терминах производящих функций вероятностей.

Определение 1.1. *Пусть X – случайная величина с производящей функцией вероятностей $\mathcal{P}(z)$, а $\mathcal{Q} = \{Q_a(z)\ a \in (0,1)\}$ – семейство производящих функций. Скажем, что семейство $\mathcal{Q}$ является прореживающим по отношению к $\mathcal{P}$ если*

$$\mathcal{P}(Q_a(z)) = (1-a) + a\mathcal{P}(z) \tag{1.1}$$

при всех $|z| \leqslant 1$ и $a \in (0,1)$.

Отметим, что если семейство $\mathcal{Q}$ является прореживающим по отношению к $\mathcal{P}$, то

$$\mathcal{R}(z) = \exp\{\lambda\big(\mathcal{P}(z)-1\big)\}, \quad (\lambda > 0) \tag{1.2}$$

является дискретным устойчивым распределением с прореживающим оператором $\mathcal{Q}$ (см. определения в [4] и [3]). Таким образом, каждый пример прореживающего семейства моментально дает также и пример соответствующего дискретного устойчивого распределения.

§2. Свойства прореживающих семейств

Весьма важным свойством прореживающих семейств является их коммутативность при операции суперпозиции.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{Q} = \{Q_a(z)\ a \in (0,1)\}$ – семейство прореживающих операторов по отношению к производящей функции вероятностей $\mathcal{P}(z)$. Тогда*

$$Q_a \circ Q_b = Q_b \circ Q_a \tag{2.1}$$

для всех $a, b \in (0,1)$, где $\circ$ – знак суперпозиции.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{P}(Q_a(Q_b(z))) = (1-a) + a\mathcal{P}(Q_b(z)) = (1-a) + a(1-b+b\mathcal{P}(z))$$
$$= 1 - ab + ab\mathcal{P}(z)) = \mathcal{P}(Q_b(Q_a(z))).$$

В силу монотонности функции $\mathcal{P}(z)$ на интервале $[0,1]$ и ее аналитичности в единичном круге комплексной плоскости получаем требуемое условие (2.1). $\square$

Отметим, что много примеров коммутирующих семейств производящих функций дано в работе [2].

С одной производящей функцией вероятностей может быть связано не более одного прореживающего семейства.

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathcal{Q} = \{Q_a(z),\ a \in (0,1)\}$ *и* $\{S_a(z)\}$, $a \in (0,1)$– *два семейства прореживающих операторов по отношению к производящей функции вероятностей* $\mathcal{P}(z)$. *Тогда* $Q_a(z) = S_a(z)$ *при всех* $a \in (0,1)$ *и всех* $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. В силу (1.1)

$$\mathcal{P}(Q_a(z)) = (1-a) + a\mathcal{P}(z) \text{ и } \mathcal{P}(S_a(z)) = (1-a) + a\mathcal{P}(z),$$

т.е. $\mathcal{P}(Q_a(z)) = \mathcal{P}(S_a(z))$. Требуемое следует из монотонности функции $\mathcal{P}(z)$ на интервале $[0,1]$ и ее аналитичности в единичном круге. □

Оказывается, что прореживающее семейство, по существу, определяет соответствующую производящую функцию.

Предложение 2.3. *Пусть* $\mathcal{Q} = \{Q_a(z)\ a \in (0,1)\}$ – *семейство прореживающих операторов по отношению к производящим функциям вероятностей* $\mathcal{P}(z)$ *и* $T(z)$. *Тогда* $T(z) = (1-A)\mathcal{P}(z) + A$ *для некоторого* $A \in [0,1]$. *Иными словами,* T *является смесью* $\mathcal{P}$ *и вырожденного в нуле распределения.*

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{P}(Q_a(z)) = 1 - a + a\mathcal{P}(z)$$

и

$$T(Q_a(z)) = 1 - a + aT(z).$$

Отсюда находим

$$Q_a(z) = \mathcal{P}^{-1}(1 - a + a\mathcal{P}(z)) = T^{-1}(1 - a + aT(z)).$$

Сделаем замену переменных:

$$F(u) = T(\mathcal{P}^{-1}(u)), \quad u = \mathcal{P}(z).$$

Получим

$$F(1 - a + au) = 1 - a + aF(u).$$

Полагая здесь $u = 0$ и обозначая $A = F(0)$, $v = 1 - a$ найдем

$$F(v) = (1-A)v + A.$$

Вспоминая, что $F(u) = T(\mathcal{P}^{-1}(u))$ приходим к требуемому результату.

□

§3. Примеры прореживающих семейств

Приведем теперь некоторые примеры прореживающих по отношению к различным функциям семейств.

Пример 3.1. *Положим* $Q_a(z) = 1 - a + az$, $0 < a < 1$. *Ясно, что это семейство является прореживающим для функции* $\mathcal{P}(z) = z$.

Небольшая модификация Примера 3.1 приводит к менее тривиальной прореживаемой функции.

Пример 3.2. *Выберем некоторое* $\gamma \in (0,1)$ *и определим семейство* $Q_a(z) = 1 - a^{1/\gamma} + a^{1/\gamma}z$, $0 < a < 1$. *Рассмотрим функцию*

$$\mathcal{P}(z) = 1 - A(1-z)^\gamma, \tag{3.1}$$

где $A \in (0,1]$ *– некоторая постоянная. Так как*

$$\mathcal{P}(z) = 1 - A + A\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\binom{\gamma}{k}z^k,$$

то $\mathcal{P}(z)$ *является производящей функцией вероятностей. Кроме того,*

$$\mathcal{P}(Q_a(z)) = 1 - Aa(1-z)^\gamma = 1 - a + a\mathcal{P}(z),$$

т.е семейство $\{Q_a(z),\ a \in (0,1)\}$ *является прореживающим для функции* (3.1).

Указанный пример связан с классическим определением дискретного устойчивого закона [4]. Приведем теперь менее известные семейства.

Пример 3.3. *Пусть*

$$\mathcal{P}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}.$$

Ясно, что $\mathcal{P}(z)$ *– производящая функция вероятностей. Определим* $Q_a(z)$ *следующим образом:*

$$Q_a(z) = \frac{1-a-(1-a-p)z}{1-a(1-p)-(1-p)(1-a)z},$$

где $a \in (0,1)$, *а* $0 < p < 1$ *– фиксированное число. Нетрудно проверить, что*

$$Q_a(z) = \frac{1-a}{1-a(1-p)} + ap^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((1-a)(1-p))^{k-1}}{(1-(1-p)a)^{k+1}}z^k.$$

Таким образом, $Q_a(z)$ *является производящей функцией вероятностей при любых* $a, p \in (0,1)$. *Непосредственной подстановкой убеждаемся, что*

$$\mathcal{P}\big(Q_a(z)\big) = 1 - a + a\mathcal{P}(z)$$

при всех $a, p \in (0,1)$.

Отметим, что соотношение (1.2) *в данном случае принимает вид*

$$\mathcal{R}(z) = \exp\Big\{\frac{\lambda(z-1)}{1-(1-p)z}\Big\}.$$

Так определенная функция является производящей для дискретного устойчивого распределения в том смысле, что

$$\mathcal{R}^n(Q_{1/n}(z)) = \mathcal{R}(z)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Прежде чем переходить к серии следующих примеров сделаем несколько довольно простых, но полезных, замечаний. Выше мы видели, что элементы прореживающего семейства должны коммутировать при операции суперпозиции. Поэтому нахождение коммутирующих пар (или большего числа) функций представляет для наших целей существенный интерес. Коммутирующие пары рациональных функций описаны уже довольно давно и в различных терминах (см. по этому поводу [5, 6], а также [7] и литературу там). Однако, в рассматриваемой ситуации условие рациональности не является естественным. Нас гораздо больше интересуют коммутирующие семейства функций, аналитических в единичном круге, так как производящие функции обладают этим свойством. При этом производящие функции строго монотонны и, значит, обратимы на промежутке $[0,1]$. Поэтому отметим некоторые свойства коммутирующих функций, которые могут оказаться полезными для построения новых примеров прореживающих семейств.

Предположим, что f и g – две функции, отображающие промежуток $[0,1]$ взаимно-однозначно на его подмножество. Допустим, что они коммутируют при суперпозиции, т.е. $f \circ g = g \circ f$. Тогда коммутируют и функции, обратные к ним, т.е. $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Конечно, в качестве f и g нельзя взять непосредственно ни рациональные, ни производящие функции, так как обратные к ним уже не будут принадлежать требуемому классу рациональных или производящих функций. Пусть, однако, f и g коммутируют, а h - некоторая обратимая функция. Тогда функции $h^{-1} \circ f \circ h$ и $h^{-1} \circ g \circ h$ также коммутируют. В некоторых случаях подобные суперпозиции могут не выводить из класса производящих функций. Следующий результат подтверждает это утверждение.

Теорема 3.1. *Определим функцию $\mathcal{P}(z)$ положив*

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z, n, \gamma) = 1 - (1 - (1 - (1 - z)^{\gamma})^n)^{1/\gamma}. \tag{3.2}$$

Предположим, что m и n – положительные целые числа, а $\gamma = 1/m$. Тогда $\mathcal{P}(z)$ является производящей функцией вероятностей.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция (3.2) построена по отмеченному выше принципу. Именно, в качестве функции f взята n-ая степень, а в качестве h – производящая функция распределения Сибуя:

$$h(z) = 1 - (1 - z)^{\gamma},$$

т.е. $\mathcal{P}(z) = h^{-1}(h^n(z))$. Однако сейчас нам удобнее записать $\mathcal{P}(z) = 1 - (1 - h^n(z))^m$. Разумеется, что случай $m = 1$ тривиален, и мы рассматриваем только $m > 1$. Покажем сначала, что производная функции $\mathcal{P}(z)$ по z может быть разложена в ряд по степеням z с неотрицательными коэффициентами.

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'(z) &= nm\big(1 - h^n(z)\big)^{m-1} h^{n-1}(z)(1/m)(1 - z)^{1/m-1} \\ &= nh^{n-1}\big(1 + h(z) + \ldots h^{n-1}(z)\big)^{m-1}.\end{aligned}$$

Поскольку $h(z)$ является производящей функцией, то последнее равенство показывает, что $\mathcal{P}'(z)$ разлагается в ряд с неотрицательными коэффициентами по степеням z, сходящийся в единичном круге. Интегрирование по z с учетом равенства $\mathcal{P}(1) = 1$ дает требуемое. □

Примечание 3.1. *Теорема 3.1 показывает, что $\mathcal{P}$ является производящей функцией вероятностей при всех целых n, m при условии, что $\gamma = 1/m$. Однако автор полагает что справедлива следующая*
Гипотеза*: **для любого** $\gamma \in (0, 1)$ **существует** n_o **зависящее от** γ **и такое, что при всех** $n > n_o$ **функция** (3.2) **является производящей функцией вероятностей.***

Продолжим изучение функции (3.2). Легко проверить, что

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(z, k, \gamma), n, \gamma) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(z, n, \gamma), k, \gamma)$$

для всех $n, k \in \mathbb{N}$, т.е. семейство функций $\mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$ является коммутативным по суперпозиции. Это, в частности, позволяет рассматривать суммы случайного числа (с производящей функцией (3.2)) случайных величин (см. соответствующую теорию в [2] и в [8]). Аналогом вырожденного распределения в этом случае является распределение с преобразованием Лапласа

$$\varphi(s) = 1 - \left(1 - \exp\{-\lambda s^\gamma\}\right)^{1/\gamma}, \quad s \geqslant 0,$$

а аналогом нормального распределения – распределение с характеристической функцией

$$f(t) = 1 - \left(1 - \exp\{-\lambda |t|^{2\gamma}\}\right), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Функция $\varphi(s)$ позволяет нам определить некоторую производящую функцию вероятностей, для которой мы сможем указать прореживающее семейство.

Теорема 3.2. *Пусть*

$$\psi(s) = \int\limits_0^\infty \exp\{-sx\} dF(x)$$

является преобразованием Лапласа функции распределения $F(x)$. Тогда $S(z) = \psi(1-z)$ как функция z представляет собой производящую функцию вероятностей некоторого распределения.

Доказательство. Ясно, что $S(1) = 1$. Кроме того,

$$S(z) = \int\limits_0^\infty \exp\{-x\} \exp\{zx\} dF(x) = \sum_{k=0}^\infty z^k \int\limits_0^\infty \exp\{-x\} \frac{x^k}{k!} dF(x)$$

представляет собой степенной ряд с положительными коэффициентами, сходящийся по крайней мере в единичном круге. □

Из Теоремы 3.2 следует, что

$$\mathcal{P}(z) = \varphi(1-z) = 1 - \left(1 - \exp\{-\lambda(1-z)^\gamma\}\right)^{1/\gamma} \tag{3.3}$$

является производящей функцией вероятностей некоторого распределения по крайней мере при $\gamma = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение семейство

$$Q_a(z) = 1 - \Big(-\frac{1}{\lambda} \log\big(1 - a^\gamma + a^\gamma \exp\{-\lambda(1-z)^\gamma\}\big)\Big)^{1/\gamma},\ 0 < a < 1. \tag{3.4}$$

Нетрудно убедиться, что при $1/\gamma = m \in \mathbb{N}$ это семейство состоит из производящих функций вероятностей. Кроме того,

$$\mathcal{P}(Q_a(z)) = 1 - a + a\mathcal{P}(z).$$

Так что мы имеем еще один пример прореживающего семейства.

Пример 3.4. *Семейство* (3.4) *является прореживающим для производящей функции* (3.3).

Отметим, что *функция* $R(z) = \exp\{-\big(1 - \mathcal{P}(z)\big)\}$ *представляет собой производящую функцию вероятностей дискретного устойчивого закона.* Более точно,

$$R^n(Q_{1/n}(z)) = R(z), \text{ при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Продолжим построение примеров, связанных с суммами случайного числа случайных величин. Пусть ν_n – случайная величина с производящей функцией вероятностей $S_n(z) = 1/T_n(1/z)$, где $T_n(u)$ – полином Чебышева первого рода. В работе [2] было показано, что при суммировании случайного числа ν_n роль вырожденного играет распределение с преобразованием Лапласа $\varphi(s) = 1/\operatorname{ch}(\sqrt{s})$, а роль нормального переходит к распределению с характеристической функцией $f(t) = 1/\operatorname{ch}(t)$. В соответствии с Теоремой 3.2 $\mathcal{P}(z) = 1/\operatorname{ch}(\sqrt{1-z})$ является производящей функцией вероятностей.

Пример 3.5. *Определим семейство производящих функций вероятностей*

$$Q_a(z) = 1 - \mathtt{arcsech}^2\big(\mathtt{1 - a + a \cdot sech(\sqrt{1-z})}\big), \quad \mathtt{0 < a < 1}. \tag{3.5}$$

Это семейство является прореживающим для производящей функции $\mathcal{P}(z) = 1/\operatorname{ch}(\sqrt{1-z})$. *Функция* $R(z) = \exp\{\lambda(\mathcal{P}(z) - 1)\}$ *является производящей функцией дискретного устойчивого распределения.*

Для доказательства достаточно проверить, что $Q_a(z)$ *– производящая функция вероятностей и осуществить непосредственную подстановку ее в* $\mathcal{P}(z)$.

Число подобных примеров может быть существенно увеличено. В частности, с каждым ν–суммированием из работы [2] может быть связано соответствующее прореживающее семейство и требуемая производящая функция вероятностей. Мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Список литературы

1. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, J. A. Melamed, *Characterization of distributions by the method of intensively monotone operators*, Lect. Notes Math. **1088**, Springer–Verlag, 1984.
2. L. B. Klebanov, A. V. Kakosyan, S. T. Rachev, G. Temnov, *On a class of distributions stable under random summation.* — J. Appl. Prob. **49** (2012), 303–318.
3. L. B. Klebanov, L. Slamova, *Discrete stable and casual stable random variables.* arXiv:1406.3748v1 [math.PR], (2014), 1–8.
4. F. W. Steutel, van K. Harn, *Discrete analogues of selfdecomposability and stability.* — Ann. Probab. **7**, No. 5 (1979), 893–899.
5. P. Fatou, *Sur l'itération analytique et les substitutions permutables.* — J. Math. **2** (1923), 346–362.
6. G. Julia, *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. **39** (1922), 131–215.
7. А. Э. Еременко, *О некоторых функциональных уравнениях, связанных с итерацией рациональных функций.* — Алгебра и анализ **1**, No. 4 (1989), 102–116.
8. L. B. Klebanov, (2003) *Heavy tailed distributions*, Matfyzpress, Prague, 207 pp.

Klebanov L. B. On normalization of integer-valued random variables.

The notion of general families of thinning operator is proposed. The main aim of such notion is to allow normalization of integer-valued random variables inside of the given class. Some examples of the families of thinning operators are given.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики, Карлов университет, Прага, Чешская республика

E-mail: levbkl@gmail.com

Поступило 11 ноября 2021 г.