Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

М. К. Досполова

ДИСКРЕТНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ОБЪЕМЫ И ВАЛЮАЦИИ ГРАССМАНА

§1. Введение и основные результаты

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^d$. Основным объектом изучения данной статьи является *выпуклый решетчатый многогранник* $P \subset \mathbb{R}^d$, который определяется как выпуклая оболочка конечного множества точек $\mathbb{Z}^d$. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ множество всех (включая пустое множество) выпуклых решетчатых многогранников в $\mathbb{R}^d$.

По определению положим, что $\operatorname{aff} P$ – аффинная оболочка P, иными словами, наименьшее линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее P, и $\dim P$ – размерность P, то есть размерность этого подпространства. Будем говорить, что P полной размерности, если $\dim P = d$. Эквиваленто, P с непустой внутренностью или d-мерная мера Лебега P положительна.

Обозначим через $|P|$ k-мерную меру Лебега P, где $k = \dim P$. Тогда для $P \neq \varnothing$ имеем $|P| > 0$. В частности, если P – это точка, то $|P| = 1$. Если $P = \varnothing$, то полагаем $\dim P = 0$ и $|P| = 0$.

1.1. Дискретный объем. Для $n \in \mathbb{N}^1$ определим n-увеличение P формулой

$$nP := \{n\mathbf{u} : \mathbf{u} \in P\},$$

и для многогранника P полной размерности определим *дискретный объем* P как количество точек решетки $\mathbb{Z}^d$, лежащих в P:

$$L(P) := \#(P \cap \mathbb{Z}^d). \tag{1}$$

Ключевые слова: Решетчатый многогранник, дискретный объем, внутренний объем, дискретный внутренний объем, конический внутренний объем, угол Грассмана, многочлен Эрхарта, многочлен Макдональда, тетраэдр Рива, телесный угол, валюация.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No 075-15-2019-1620.

Это понятие возникло вследствие простого наблюдения (см., например, [4]): если $\dim P = d$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(nP)}{n^d} = |P|. \tag{2}$$

В случае, когда $\dim P = k < d$, соотношение (2) выполнено с нулевой правой частью. Однако, если мы заменим n^d на n^k, то получим (см., например, [2, раздел 5.4])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(nP)}{n^k} = \frac{|P|}{\det(P)}, \tag{3}$$

где $\det(P)$ обозначает определитель k-мерной решетки $\mathbb{Z}^d \cap \operatorname{aff} P$.

Итак, естественно обобщить понятие дискретного объема на решетчатые многогранники в $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности следующим образом:

$$L(P) := \det(P) \cdot \#(P \cap \mathbb{Z}^d).$$

Последнее определение $L(P)$ согласуется с исходным (1) при $\dim P = d$. В этих обозначениях, (2) принимает вид:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(nP)}{n^{\dim P}} = |P|. \tag{4}$$

Одна из целей данной работы – ввести понятие *k-ого дискретного внутреннего объема* P, которое будет являться обобщением исходного определения дискретного объема, и получить соотношение (4) с k-ым внутренним объемом в правой части.

С этой целью для данного выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$, обозначим через $\alpha(C)$ телесный угол C, измеренный относительно линейной оболочки C как объемлющего пространства. В таком случае всегда $\alpha(C) > 0$ (аналогично объему $|\cdot|$, см. подраздел 2.3 ниже). Обычный (не дискретный) k-ый внутренний объем P определяется (см., например, [16, соотношение 4.23]) формулой

$$V_k(P) = \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \alpha(N_F(P)) \cdot |F|, \tag{5}$$

где $N_F(P)$ – нормальный конус к P при F (см. определение в подразделе 2.4) и $\mathcal{F}_k(P)$ обозначает множество всех k-мерных граней (или сокращенно, k-граней) P. Заметим, что если $\dim P = k$, то $V_k(P) = |P|$ и $V_{k+1}(P) = \cdots = V_d(P) = 0$ (последнее выполнено при $k < d$).

Первая наивная идея для определения дискретного внутреннего объема заключается в рассмотрении следующей величины:

$$L_k(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \alpha(N_F(P)) \cdot \det(F) \cdot L(F). \tag{6}$$

Действительно, из (5) и (4) сразу следует что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_k(nP)}{n^k} = V_k(P). \tag{7}$$

Однако, функция $L_k(\cdot)$, определенная выше, не обладает одним важным свойством: $L_k(\cdot)$ не является *валюацией*. Вещественнозначная функция $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d) \to \mathbb{R}^1$ называется валюацией, если $\varphi(\varnothing) = 0$ и для всех $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ выполнено

$$\varphi(P \cup Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) - \varphi(P \cap Q), \quad \text{когда} \quad P \cup Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d). \tag{8}$$

Будем говорить, что φ *инвариантна относительно сдвигов* $\mathbb{Z}^d$, если $\varphi(t+P) = \varphi(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $t \in \mathbb{Z}^d$. В нашей работе рассматриваются только такие валюации.

Функции $V_k(\cdot)$ и $L(\cdot)$ являются валюациями на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и поэтому обладают многими хорошими свойствами, некоторые из которых приведены в подразделе 1.2. Более того, внутренние объемы (см. подраздел 2.1) – валюации на множестве всех выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$.

Таким образом, необходимо найти определение дискретного внутреннего объема, которое удовлетворяет как (7), так и (8).

Для того чтобы решить эту задачу, рассмотрим еще один способ дискретного измерения объема, так называемую *валюацию телесного угла*, которая была впервые введена Ривом [14], [15] и Макдональдом [11], [12] (см. также [2, раздел 13.1]). Сначала представим (1) в виде

$$L(P) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}[v \in P]. \tag{9}$$

Теперь определим валюацию телесного угла многогранника P, немного модифицировав (9):

$$A(P) = \begin{cases} \sum\limits_{v \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}[v \in P] \cdot \alpha(T_v(P)), & \text{если } \dim P = d, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $T_v(P)$ – касательный конус к P в точке v (определение см. в подразделе 2.4). Другими словами, когда мы считаем точки $\mathbb{Z}^d$ в P, мы оставляем внутренние точки нетронутыми, а граничные точки умножаем на соответствующие телесные углы. Поскольку при больших n доля граничных точек nP незначительна, то, как и в (2), мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(nP)}{n^d} = |P|. \tag{10}$$

С другой стороны, $A(\cdot)$ отличается от $L(\cdot)$ следующей особенностью: если $P, Q, P \cup Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $\dim(P \cap Q) < d$, то

$$A(P \cup Q) = A(P) + A(Q).$$

Понятно, что $L(\cdot)$ не обладает этим свойством. Именно по этой причине $L_k(\cdot)$ не может быть валюацией. Напротив, обобщение $A(\cdot)$, которое мы собираемся сейчас представить, окажется валюацией.

Для $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ произвольной размерности и $k = 0, 1, \ldots, d$, положим

$$A_k(P) := \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \mathbb{1}[v \in F] \det(F) \alpha(N_F(P)) \alpha(T_v(F)),$$

где $\alpha(T_v(F))$ – телесный угол касательного конуса к F в точке v, $\alpha(N_F(P))$ – телесный угол нормального конуса к P при F.

В нашей первой теореме мы собрали некоторые свойства функции $A_k(\cdot)$, включая ее связь с $A(\cdot)$.

Теорема 1.1. *Для всех $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, k-ый дискретный внутренний объем $A_k(\cdot)$ является инвариантной относительно сдвигов валюацией на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. Более того, для всех $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ имеем*

(1) $A_0(P) = 1$.
(2) $A_d(P) = A(P)$.
(3) *Если* $\dim P < k$, *то* $A_k(P) = 0$.
(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{A_k(nP)}{n^k} = V_k(P), \quad k = 0, 1, \ldots, d.$

Доказательство теоремы 1.1 приведено в подразделе 4.1. Четвертый пункт теоремы 1.1 сразу следует из первого пункта теоремы 1.2 ниже.

В следующем подразделе мы более подробно посмотрим на $L(nP)$, $A(nP)$ и $A_k(nP)$ как на функции от n.

1.2. Многочлены Эрхарта и Макдональда. Фундаментальные результаты, полученные Эрхартом [5], [6] и Макдональдом [11], [12], заключаются в том, что если P – выпуклый решетчатый многогранник в $\mathbb{R}^d$ полной размерности, то для $n \in \mathbb{Z}_+$ функции $L(nP)$ и $A(nP)$

являются многочленами от n степени d:

$$L(nP) = \sum_{i=0}^{d} L^{(i)}(P)n^i, \quad A(nP) = \sum_{i=0}^{d} A^{(i)}(P)n^i. \tag{11}$$

Эти многочлены, которые мы обозначим через

$$L_P(t), A_P(t), t \in \mathbb{R}^1,$$

называются *многочленами Эрхарта и Макдональда* соответственно.

Из (2) и (10) легко следует, что

$$L^{(d)}(P) = A^{(d)}(P) = |P|. \tag{12}$$

Также известны свободные коэффициенты обоих многочленов (см. [2, следствие 3.15., теорема 13.8.]):

$$L^{(0)}(P) = 1 \quad \text{и} \quad A^{(0)}(P) = 0. \tag{13}$$

Помимо того, нетрудно показать, что

$$L^{(d-1)}(P) = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \frac{|F|}{\det(F)} \quad \text{и} \quad A^{(d-1)}(P) = A^{(d-3)}(P) = \cdots = 0, \tag{14}$$

см. [2, теорема 5.6] и вторую часть (15) ниже.

Важной характеристикой многочленов Эрхарта и Макдональда являются *свойства взаимности*:

$$L_P(-n) = (-1)^{\dim P} L(n \cdot \operatorname{relint}(P)) \quad \text{и} \quad A_P(-n) = (-1)^{\dim P} A_P(n), \tag{15}$$

где $\operatorname{relint}(P)$ обозначает относительную внутренность P, то есть внутренность P в его аффинной оболочке.

Позже МакМаллен [13] обобщил (11) на все инвариантные относительно сдвигов валюации на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. В частности, он показал, что если $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и φ – валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, то для $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $\varphi(nP)$ является многочленом от n степени $r \leqslant d$:

$$\varphi(nP) = \sum_{k=0}^{r} \varphi^{(k)}(P)n^k, \tag{16}$$

здесь $\varphi^{(k)}(\cdot)$ – однородная валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ степени k.

Следовательно, так как k-ый дискретный внутренний объем $A_k(\cdot)$ – валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ (см. теорему 1.1), то $A_k(nP)$ также является многочленом от $n \in \mathbb{Z}_+$ (степени k, как мы увидим позже):

$$A_k(nP) = \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)}(P) n^i,$$

где мы молчаливо предполагаем что $\dim P \geqslant k$, в противном случае $A_k(nP) \equiv 0$. Будем называть этот многочлен *k-ым внутренним многочленом Эрхарта* и обозначать его через $A_{k,P}(t), t \in \mathbb{R}^1$.

В нашей следующей теореме представлены различные свойства внутренних многочленов Эрхарта и их коэффициентов, аналогичные (12), (13), (14), и (15).

Теорема 1.2. *Пусть $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Если $\dim P < k$, то $A_{k,P}(t) \equiv 0$. В противном случае, $A_{k,P}(t)$ – многочлен степени k,*

$$A_{k,P}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)}(P) t^i$$

со следующими коэффициентами:

(1) $A_k^{(k)}(P) = V_k(P)$,

(2) $A_k^{(0)}(P) = 0$.

Более того, $A_{k,P}(t)$ всегда четный или нечетный многочлен, поскольку для него выполнено свойство взаимности:

$$A_{k,P}(-n) = (-1)^k A_{k,P}(n).$$

Доказательство теоремы 1.2 приведено в подразделе 4.1. Далее мы введем еще одно понятие, которое одновременно обобщает как дискретный объем $L(\cdot)$, так и валюацию телесного угла $A(\cdot)$.

1.3. Валюации Грассмана. Если $C \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус с непустой внутренностью (т.е. $\dim C = d$) такой, что

$$C \neq \mathbb{R}^d, \tag{17}$$

то его телесный угол $\alpha(C)$ можно вычислить как половину вероятности нетривиального пересечения C со случайной прямой, проходящей через начало координат и случайно выбранной по мере Хаара. Это наблюдение вдохновило Грюнбаума [8] на введение следующего обобщения телесного угла:

$$\gamma_k(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-k} \neq \{0\}], \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Здесь W_{d-k} обозначает случайное $(d-k)$-мерное линейное подпространство, выбранное по мере Хаара на грассманиане всех линейных $(d-k)$-мерных подпространств. Так как по определению $\gamma_{d-1}(C) = 2\alpha(C)$ (когда $C \neq \mathbb{R}^d$) и $\gamma_0(C) \equiv 1$, то естественно рассмотреть в качестве обобщения $L(\cdot)$ и $A(\cdot)$ функцию

$$\tilde{G}_k(P) := \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \gamma_k(T_v(P)).$$

Однако, есть две проблемы с определением $\tilde{G}_k(P)$. Во-первых, при $k = d-1$ функции $\tilde{G}_{d-1}(\cdot)$ и $A(\cdot)$ не совпадают в общем случае: если $C = \mathbb{R}^d$, то $\frac{1}{2}\gamma_{d-1}(C) \neq \alpha(C)$. Во-вторых, $G_k(P)$ не является валюацией для всех $k \neq 0, d$. Это легко следует из того, что значение γ_k одно и то же для $(k+1)$-мерных линейных подпространств и полуподпространств.

Предложим возможное решение проблем. В приведенном выше определении телесного угла мы можем опустить предположение (17), если вместо случайной прямой мы рассмотрим вероятность пересечения со случайным *лучом*, то есть полупрямой. Тогда модификация углов Грассмана, которая полностью согласуется с телесным углом, имеет вид:

$$\alpha_k(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-k}^+ \neq \{0\}], \quad k = 0, 1, \dots, d,$$

где W_{d-k}^+ – случайное $(d-k)$-мерное линейное полуподпространство, равномерно распределенное среди всех таких полуподпространств в $\mathbb{R}^d$ (подробности см. в подразделе 3.1). Пусть

$$G_k(P) := \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(P)).$$

Теперь, с этой модификацией углов Грассмана, $G_k(\cdot)$ является валюацией (см. теорему 1.3). Будем называть ее *k-ой валюацией Грассмана.* Основные свойства валюации Грассмана отражены в следующей теореме.

Теорема 1.3. *$G_k(\cdot)$ инвариантная относительно сдвигов валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. Кроме того, для всех $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ имеем*

(1) $G_0(P) = L(P) - 1$.
(2) $G_{d-1}(P) = A(P)$.
(3) $G_d(P) = 0$.
(4) *Если* $\dim P = k$, *то*

$$0 = G_d(P) = \cdots = G_k(P) \leqslant G_{k-1}(P) \leqslant G_{k-2}(P) \leqslant \ldots \leqslant G_0(P) = L(P) - 1.$$

Опять же, поскольку $G_k(\cdot)$ – валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, то из результата МакМаллена (см. (16)) следует, что $G_k(nP)$ является многочленом от $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$G_k(nP) = \sum_{i=0}^{d} G_k^{(i)}(P) n^i,$$

где для простоты мы предполагаем, что P имеет полную размерность. Будем называть этот многочлен *k-ым многочленом Грассмана* и обозначим его $G_{k,P}(t), t \in \mathbb{R}^1$.

В следующей теореме сформулированы различные свойства многочленов Грассмана и их коэффициентов, аналогичные (12) и (13).

Теорема 1.4. *Пусть $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ полной размерности и*

$$k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Тогда $G_{k,P}(t)$ – многочлен степени d,

$$G_{k,P}(t) = \sum_{i=0}^{d} G_k^{(i)}(P) t^i,$$

со следующими коэффициентами:

(1) $G_k^{(d)}(P) = |P|$,
(2) $G_k^{(0)}(P) = 0$.

Доказательства теорем 1.3 и 1.4 можно найти в подразделе 4.2. Далее мы обсудим вопрос о неотрицательности коэффициентов многочленов Грассмана.

1.4. Тетраэдр Рива. Несмотря на то что d-ый, $(d-1)$-ый и постоянный коэффициенты многочленов Эрхарта и Макдональда неотрицательны (как видно из (12), (13), (14)), в общем случае свойство неотрицательности не выполнено. Это легко понять на примере тетраэдра

Рива [14], который он использовал, чтобы показать, что многомерных обобщений теоремы Пика не существует.

А именно, для $h \in \mathbb{N}$ тетраэдр в $\mathbb{R}^3$, определенный как

$$\Delta_h := \operatorname{conv}\{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,h)\},$$

называется *тетраэдром Рива.* В [2, раздел 3.7] и [3] было показано, что

$$L_{\Delta_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(2 - \frac{h}{6}\right)t + 1 \quad \text{и} \quad A_{\Delta_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + \left(S - \frac{h}{6}\right)t,$$

где $S = S(\Delta_h)$ – сумма телесных углов Δ_h в его вершинах. Таким образом, при достаточно больших h, коэффициенты при t отрицательны в обоих многочленах. Наш следующий результат показывает, что то же самое верно для всех многочленов Грассмана тетраэдра Рива.

Выразим $L_{\Delta_h}(t), A_{\Delta_h}(t)$ в терминах многочленов Грассмана для Δ_h:

$$G_{0,\Delta_h}(t) = L_{\Delta_h}(t) - 1 = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(2 - \frac{h}{6}\right)t,$$
$$G_{2,\Delta_h}(t) = A_{\Delta_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + \left(S - \frac{h}{6}\right)t.$$

Итак, остается рассмотреть только $G_{1,\Delta_h}(t)$.

Теорема 1.5. *Первый многочлен Грассмана тетраэдра Рива имеет следующий вид:*

$$G_{1,\Delta_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(S - \frac{h}{6}\right)t.$$

Хорошо известно, что $S < \frac{1}{2}$ (см. [3, утверждение 11]). Значит, $S - \frac{h}{6} < 0$, если $h \geqslant 3$. Следовательно, для тетраэдра Рива Δ_h при $h \geqslant 3$ многочлены Грассмана имеют отрицательные коэффициенты при t. Теорема 1.5 доказана в подразделе 4.2.

1.5. Комбинаторно-положительные валюации. Пусть $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $\dim P = r$. Как отмечалось в подразделе 1.4, неверно, что коэффициенты многочлена Эрхарта $L_P(t)$ всегда неотрицательны. Однако, в своих работах Стэнли [18], [19] показал, что если представить $L_P(t)$ в виде

$$L_P(t) \;=\; h_0^*(P)\binom{t+r}{r} + h_1^*(P)\binom{t+r-1}{r} + \cdots + h_r^*(P)\binom{t}{r},$$

то $h_0^*(P), h_1^*(P), \ldots, h_r^*(P) \geqslant 0$. Более того, если $P' \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ такой, что $P' \subset P$, то

$$0 \leqslant h_k^*(P') \leqslant h_k^*(P), \quad k = 0, 1, \ldots d,$$

где мы полагаем $h_k^*(P) = 0$ при $k > \dim P$.
Позже в [3] аналогичный результат был доказан для многочлена Макдональда.

Вдохновленные этими двумя примерами, Йохемко и Саньял [9] ввели следующее понятие. Пусть φ – валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $\dim P = r$. Представим (16) в виде:

$$\varphi(tP) \;=\; h_0^\varphi(P)\binom{t+r}{r} + h_1^\varphi(P)\binom{t+r-1}{r} + \cdots + h_r^\varphi(P)\binom{t}{r}.$$

Следуя определениям и обозначениям [9], будем говорить, что валюация φ *комбинаторно-положительная*, если $h_i^\varphi(P) \geqslant 0$, и *комбинаторно-монотонная*, если $h_i^\varphi(P') \leqslant h_i^\varphi(P)$, когда $P' \subseteq P$.

Как было сказано выше, дискретный объем и валюация телесного угла комбинаторно-положительны и комбинаторно-монотонны. Возникает естественный вопрос: верно ли это для дискретных внутренних объемов и валюаций Грассмана? Касательно первого пункта мы предполагаем, что ответ положительный.

Гипотеза 1.1. При всех $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ k-ый дискретный внутренний объем является комбинаторно-положительной и комбинаторно-монотонной валюацией.

Наша следующая теорема показывает, что для валюаций Грассмана в общем случае ответ отрицательный.

Теорема 1.6. *При $0 \leqslant k \leqslant d-2$ k-ая валюация Грассмана не является комбинаторно-положительной.*

Доказательство приведено в подразделе 4.2. Основным ингредиентом доказательства является следующая полная характеризация комбинаторно-положительных и комбинаторно-монотонных валюаций, полученная в [9]. Предположим, что φ инвариантная относительно сдвигов валюация на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) φ комбинаторно-монотонна;
(ii) φ комбинаторно-положительна;

(iii) для любого симплекса $\Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$

$$\varphi(\operatorname{relint}(\Delta)) \ := \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F}\varphi(F) \ \geqslant \ 0,$$

где сумма берется по всем граням Δ.

Комбинируя теорему 1.6 и данную характеризацию, можно сделать вывод, что k-ая валюация Грассмана также не является комбинаторно-*монотонной* при $0 \leqslant k \leqslant d-2$.

Закончим вводную часть описанием того, как организована статья. В следующем разделе собраны необходимые понятия, определения и факты из выпуклой геометрии. Некоторые из них уже были кратко представлены в этом разделе, однако в следующих двух частях нам потребуется более подробное изложение теории. Полные доказательства всех анонсированных во введении теорем приведены в пунктах 4.1, 4.2. Раздел 3 стоит немного опосредованно от основного направления нашей работы. Для того чтобы ввести обобщение дискретного объема и валюации телесного угла, которое все еще сохраняет свойства валюации, необходимо было модифицировать исходное определение углов Грассмана. Однако, оказалось, что эти слегка модифицированные углы Грассмана обладают многими интересными свойствами, которые в некотором смысле делают их предпочтительнее исходных. Этот вопрос подробно рассмотрен в разделе 3. Доказательства всех результатов, сформулированных в разделе 3, представлены в пункте 4.3.

§2. Предварительные сведения

2.1. Выпуклые множества. Для множества $K \subset \mathbb{R}^d$ обозначим через $\operatorname{conv} K$ его *выпуклую оболочку*,

$$\operatorname{conv} K := \Big\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : x_1,\dots,x_k \in K, \lambda_1,\dots,\lambda_k \geqslant 0, \sum_{i=0}^{k}\lambda_i = 1, k\in\mathbb{N}\Big\},$$

и через $\operatorname{pos} K$ – его коническую оболочку:

$$\begin{aligned}\operatorname{pos} K :=& \Big\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : x_1,\dots,x_k \in K, \lambda_1,\dots,\lambda_k \geqslant 0, k\in\mathbb{N}\Big\}\\ =& \{\lambda\mathbf{x} : \mathbf{x}\in\operatorname{conv} K, \lambda\geqslant 0\}.\end{aligned}$$

Пусть теперь K будет *компактным* выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^d$. Тогда *внутренние объемы* $V_0(K), \dots, V_d(K)$ определяются как коэффициенты в формуле Штейнера

$$|K + rB^d| = \sum_{k=0}^{d} \kappa_{d-k} V_k(K) r^{d-k}, \quad r \geqslant 0,$$

где B^k – это k-мерный единичный шар и $\kappa_k := |B^k| = \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ – это объем B^k ($\kappa_0 := 1$). Другими словами, объем окрестности представляется многочленом, коэффициенты которого зависят от множества K.

Существует эквивалентный способ определения внутренних объемов с помощью формулы Куботы [17, раздел 6.2]:

$$V_k(K) = \binom{d}{k} \frac{\kappa_d}{\kappa_k \kappa_{d-k}} \mathbf{E}|(K|W_k)|,$$

где W_k – это k-мерное случайное линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, равномерно распределенное по мере Хаара на грассманиане всех таких подпространств, и $K|W_k$ обозначает ортогональную проекцию K на W_k.

В частности, $V_d(\cdot)$ – это d-мерный объем, $V_{d-1}(\cdot)$ – половина площади поверхности и $V_1(\cdot)$ – средняя ширина, с точностью до постоянного множителя.

Внутренние объемы множества не зависят от размерности. Это означает, что если мы вложим K в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant d$, внутренние объемы будут такими же.

2.2. Многогранные множества. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств вида

$$\Big\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d \leqslant b, \qquad \text{где } a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{R}^1\Big\}$$

называется *многогранным множеством* в $\mathbb{R}^d$. В нашей статье рассматриваются два частных случая: *многогранный конус* и *выпуклый многогранник*, которые будут объектами нашего внимания в следующих двух разделах. В этом разделе мы введем понятия и определения, применимые к ним обоим.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^d$ – многогранное множество. Линейная гиперплоскость (линейное подпространство размерности один) H такая, что P полностью лежит по одну сторону от H, называется *опорной гиперплоскостью* для P. *Грань* P – это либо множество вида $P \cap H$, где H – это опорная гиперплоскость для P, либо само P. Размерность P определяется как размерность его линейной оболочки (минимального линейного подпространства, содержащего P),

$$\dim P := \dim \operatorname{lin} P,$$

и относительная внутренность P определяется как внутренность P в $\operatorname{lin} P$ и обозначается $\operatorname{relint}(P)$. Аналогичные определения вводятся для граней P, так как они также являются многогранными множествами.

Обозначим через $\mathcal{F}(P)$ множество всех граней P, включая пустое множество и P, через $\mathcal{F}_k(P)$ – множество k-мерных граней, а $f_k(P)$ – количество k-граней P. Легко заметить, что

$$P = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(P)} \operatorname{relint}(F).$$

2.3. Многогранные конусы. Непустое множество $C \subset \mathbb{R}^d$ называется *выпуклым конусом* или просто *конусом,* если C – выпуклое множество, такое что $\lambda C = C$ для всех $\lambda > 0$. Многогранное множество, которое также является конусом, называется *многогранным конусом.*

В частности, линейные подпространства являются многогранными, а многогранные конусы – замкнутыми. В дальнейшем будем полагать, что все конусы C многогранны и непусты, если не указано иное. Следуя [1], напомним основные сведения о многогранных конусах.

Многогранный конус называется *заостренным,* если начало координат 0 является его нульмерной гранью, или, что то же самое, если он не содержит линейного подпространства положительной размерности.

Для многогранного конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ хорошо известно следующее соотношение, полученное Эйлером (см., например, [10]):

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(C) = \begin{cases} (-1)^{\dim C}, & \text{если } C \text{ – линейное подпространство,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{18}$$

Телесный угол C определяется как вероятность того, что случайный вектор U, равномерно распределенный на $\operatorname{lin} C \cap \mathbb{S}^{d-1}$ (единичная сфера в линейной оболочке C), попадет в C:

$$\alpha(C) := \mathbf{P}[U \in C].$$

Подчеркнем, что $\alpha(C)$ измеряется внутри $\operatorname{lin} C$ и не зависит от объемлющего пространства, поэтому всегда $\alpha(C) > 0$. По определению полагаем $\alpha(\{0\}) = 1$.

Двойственным конусом выпуклого многогранного конуса C называется множество

$$C^\circ := \{v \in \mathbb{R}^d \ : \ \forall w \in C, \langle w, v\rangle \leqslant 0\}.$$

Отметим, что C° также является выпуклым многогранным конусом.

Напомним основные свойства двойственных конусов:

(1) Если C – линейное подпространство, то $C^\circ = C^\perp$ – его ортогональное дополнение;
(2) $C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ = C$;
(3) Если $C \subseteq D$, то $C^\circ \supseteq D^\circ$.

Для многогранного конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначим через Π_C метрическую проекцию, определяемую как

$$\Pi_C(x) := \arg\min\{\|x - y\|^2 \mid y \in C\}.$$

Разложение Моро точки $x \in \mathbb{R}^d$ – это сумма

$$x = \Pi_C(x) + \Pi_{C^\circ}(x),$$

где $\Pi_C(x)$ и $\Pi_{C^\circ}(x)$ ортогональны.

Конические аналоги внутренних объемов – это конические внутренние объемы. Они определяются для произвольного выпуклого конуса, однако для наших целей удобнее использовать следующее определение, которое применимо только к многогранным конусам.

Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ – многогранный конус, а U – случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $0 \leqslant k \leqslant d$ мы определяем *k-ый конический внутренний объем* как вероятность того, что метрическая проекция U на C лежит внутри k-мерной грани C:

$$\upsilon_k(C) = \mathbf{P}\{\Pi_C(U) \in \cup_{F \in \mathcal{F}_k(C)} \operatorname{relint}(F)\}.$$

В частности, если $\dim C = k$, то по определению:

$$\upsilon_k(C) = \alpha(C).$$

Из определения сразу следует, что конические внутренние объемы формируют вероятностное распределение на $\{0, 1, \dots, d\}$ для фиксированного конуса C:

$$\sum_{k=0}^{d} \upsilon_k(C) = 1.$$

В частности, если C – линейное подпространство размерности j, то $\upsilon_j(C) = 1$ и $\upsilon_k(C) = 0$ при $k \neq j$.

Для конических внутренних объемов верна теорема Гаусса – Бонне (см.[17, раздел 6.5]):

$$\sum_{k=0}^{d}(-1)^k \upsilon_k(C) = \begin{cases} (-1)^{\dim C}, & \text{если } C \text{ – линейное подпространство,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{19}$$

Грюнбаум [8, теорема 2.8] показал, что для многогранного конуса C

$$(-1)^k \upsilon_k(C) = \sum_{F \in \mathcal{F}(C)} (-1)^{\dim F} \upsilon_k(F). \tag{20}$$

Кроме того, несложно заметить, что конические объемы двойственного конуса удовлетворяют соотношению

$$\upsilon_k(C^\circ) = \upsilon_{d-k}(C).$$

Для $k > d$ по определению полагаем $\upsilon_k(C) = 0$.

Другой важной геометрической характеристикой выпуклого конуса, тесно связанной с коническими внутренними объемами, являются *углы Грассмана,* которые были введены и изучены Грюнбаумом [8]. Определим k-ый *угол Грассмана* выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ как вероятность нетривиального пересечения C со случайной $(d-k)$-плоскостью W_{d-k} (определена в подразделе 2.1):

$$\gamma_k(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-k} \neq \{0\}].$$

Нетрудно доказать, что для любого выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$, $C \neq \{0\}$,

$$1 = \gamma_0(C) \geqslant \gamma_1(C) \geqslant \dots \geqslant \gamma_d(C) = 0. \tag{21}$$

Если C имеет полную размерность, его телесный угол можно выразить через углы Грассмана следующим образом:

$$\alpha(C) := \frac{1}{2}\gamma_{d-1}(C) + \frac{1}{2}\mathbb{1}[C = \mathbb{R}^d] = \frac{1}{2}\mathbf{P}[C \cap W_1 \neq \{0\}] + \frac{1}{2}\mathbb{1}[C = \mathbb{R}^d]. \tag{22}$$

В [8] Грюнбаум доказал, что, как и телесный угол, углы Грассмана не зависят от размерности объемлющего пространства: если мы вложим C в $\mathbb{R}^N$, при $N \geqslant d$, углы Грассмана будут такими же. Следовательно, для линейной k-плоскости $L_k \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \{1, \dots, d\}$, имеем

$$\gamma_0(L_k) = \ldots = \gamma_{k-1}(L_k) = 1, \quad \gamma_k(L_k) = \ldots = \gamma_d(L_k) = 0.$$

Для $C = \{0\}$ имеем $\gamma_0(C) = \gamma_1(C) = \ldots = 0$.

Отмеченная выше связь между коническими внутренними объемами и углами Грассмана выражается через формулу Крофтона (см., например, [17, стр. 261]): для всех $k = 0, 1, \dots, d$ имеем

$$\gamma_k(C) = 2(\upsilon_{k+1}(C) + \upsilon_{k+3}(C) + \dots) \tag{23}$$

при условии, что конус C не является линейным подпространством.

2.4. Выпуклые многогранники. *Ограниченное* многогранное множество в $\mathbb{R}^d$ называется *выпуклым многогранником*, или просто *многогранником*. Можно определить выпуклый многогранник как выпуклую оболочку конечного числа точек в $\mathbb{R}^d$. Эквивалентность двух данных определений доказана в [2, приложение A].

Для неотрицательного n, *n-увеличение* многогранника P определяется следующим образом: $nP = \{nx : x \in P\}$.

Грани размерности $0, 1$ и $\dim P - 1$ называются *вершинами, ребрами* и *гранями* соответственно. Для многогранников соотношение Эйлера (см. (18)) принимает вид (см., например, [2, теорема 5.2.])

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(P) = 1. \tag{24}$$

Далее, для выпуклого многогранника P, грани F многогранника P и $v \in \operatorname{relint}(F)$ определим *касательный конус* $T_v(P)$ как

$$T_v(P) = \operatorname{pos}(P - v).$$

Легко понять, что $T_v(P)$ – многогранный конус, и для любых двух различных точек $v_1, v_2 \in \operatorname{relint}(F)$ имеем $T_{v_1}(P) = T_{v_2}(P)$, поэтому касательный конус к P в точке v зависит только от грани, в относительной внутренности которой лежит v. Иногда мы будем обозначать касательный конус к P при грани F, через $T_F(P)$. Наконец, *нормальный конус* $N_F(P)$ к P при F определяется тождеством $N_F(P) = T_F(P)^\circ$.

Телесные углы касательных конусов многогранника $\alpha_{F,P} := \alpha(T_F(P))$ (внутренние углы) связаны соотношением Брианшона – Грама (см., например, [2, следствие 13.9.]), являющимся многомерным обобщением того факта, что углы плоского треугольника в сумме составляют π:

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(P)} \alpha_{F,P}(-1)^{dim F} = 0. \tag{25}$$

Если P – многогранник, то известно, что (см. [16, соотношение 4.23]) его k-ый внутренний объем можно вычислить как

$$V_k(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \alpha(N_F(P)) \cdot |F| = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \upsilon_k(T_F(P)) \cdot |F|. \tag{26}$$

§3. Модифицированные углы Грассмана

В этом разделе мы вводим модифицированное определение углов Грассмана и рассматриваем их основные свойства, а также связь с первоначальным определением.

3.1. Определение и основные свойства. Напомним, что W_k обозначает случайное k-мерное линейное подпространство, случайно выбранное по мере Хаара на грассманиане всех линейных k-мерных подпространств. Пусть U – случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ независимо от W_k. Обозначим через W_k^+ случайное замкнутое полуподпространство, определяемое как

$$W_k^+ := W_k \cap U_+^\perp,$$

где $U_+^\perp$ – замкнутое полупространство, содержащее U, с границей, ортогональной U:

$$U_+^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, U \rangle \geqslant 0\}.$$

Обозначим через W_k^- дополнение случайного полуподпространства W_k^+:

$$W_k^- := W_k \setminus \operatorname{relint}(W_k^+).$$

Определим k-ый *модифицированный угол Грассмана* ($k \in \{0, \dots, d\}$) выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ как

$$\alpha_k(C) := \mathbf{P}[W_{d-k}^+ \cap C \neq \{0\}].$$

Напомним, что исходные углы Грассмана определяются так:

$$\gamma_k(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-k} \neq \{0\}], \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Следующая теорема устанавливает связь между этими двумя определениями.

Теорема 3.1. *Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус, такой что $C \neq \mathbb{R}^{d-k+1}$, и $0 \leqslant k \leqslant d-1$. Тогда*

$$\alpha_k(C) = \frac{\gamma_k(C) + \gamma_{k+1}(C)}{2}.$$

Заметим, что для $k = 1$ и $C \neq \mathbb{R}^d$ мы действительно имеем

$$\mathbf{P}[W_1^+ \cap C \neq \{0\}] = \frac{1}{2}\mathbf{P}[W_1 \cap C \neq \{0\}] + 0 = \frac{1}{2}\mathbf{P}[W_1 \cap C \neq \{0\}].$$

Ключом к доказательству теоремы 3.1 является следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус, $1 \leqslant k \leqslant d$ и $C \neq \mathbb{R}^{d-k+1}$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] = \mathbf{P}\left[W_{k-1} \cap C \neq \{0\}\right]. \quad (27)$$

Доказательства всех результатов этого раздела собраны в подразделе 4.3.

Теперь мы готовы представить модифицированную версию формулы Крофтона, ср. (23):

Теорема 3.2 (Новая версия формулы Крофтона). *Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус; тогда*

$$\alpha_k(C) = \sum_{i \geqslant 1} \upsilon_{k+i}(C). \quad (28)$$

Подчеркнем, что в отличие от (23), здесь мы не предполагаем, что C не является линейным подпространством, поэтому (28) выполняется для *любого* выпуклого конуса C.

Далее сформулировано непосредственное следствие теоремы 3.2.

Следствие 3.1. *При модифицированном определении угла Грассмана имеем*

(1) *Если* $\dim C = k$*, то* $\alpha_{k-1}(C) = \upsilon_k(C) = \alpha(C)$*;*
(2) $\alpha_0(C) = \sum_{i\geqslant 1} \upsilon_i(C) = \sum_{i\geqslant 0} \upsilon_i(C) - \upsilon_0(C) = 1 - \upsilon_0(C)$.

Снова по теореме 3.2 $\upsilon_k(C) = \alpha_{k-1}(C) - \alpha_k(C)$ для $k \geqslant 1$.
Таким образом, используя (20) и (19), получаем следующие формулы:

Следствие 3.2. *Пусть* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *– многогранный конус. Тогда при* $k \geqslant 1$ *имеем*

$$(-1)^k(\alpha_{k-1}(C) - \alpha_k(C)) = \sum_{F\in\mathcal{F}(C)} (-1)^{\dim F}(\alpha_{k-1}(F) - \alpha_k(F)),$$

где $\mathcal{F}(C)$ *– множество всех граней конуса* C*.*

Следствие 3.3. *Для многогранного конуса* C *выполнено*

$$1 - \alpha_0(C) + \sum_{k=1}^{d} (-1)^k(\alpha_{k-1}(C) - \alpha_k(C))$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\dim C}, & \text{если } C\text{– линейное подпространство,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В заключение этого раздела мы приведем формулу, которая является аналогом формулы, полученной Грюнбаумом [8, теорема 3.3.] для исходных углов Грассмана.

Теорема 3.3 (Формула Грюнбаума для модифицированных углов Грассмана)**.** *Пусть* $P \subset \mathbb{R}^d$ *– произвольный выпуклый многогранник полной размерности и* $1 \leqslant k \leqslant d-1$*. Тогда*

$$2\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \alpha_{d-k+n}(T_F(P)) = (-1)^{d-k} - (-1)^d.$$

3.2. Средние значения углов гауссовских выпуклых конусов. Зафиксируем $k \in \{1, \dots, d\}$. Рассмотрим случайный линейный оператор $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, матрица которого, также обозначенная через A, задается как

$$A := \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1d} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ N_{k1} & \dots & N_{kd} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times d},$$

где $N_{11}, \ldots, N_{kd}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины.
Для $M \subseteq \mathbb{R}^d$ множество

$$AM := \{Ax : x \in M\} \subset \mathbb{R}^k$$

называется *гауссовским образом* (или спектром) M. В [7, следствие 3.7] была обнаружена следующая связь между средним значением угла гауссовского образа конуса и его грассмановыми углами:

$$\mathbf{E}[\upsilon_k(AC)] = \frac{\gamma_k(C) + \gamma_{k-1}(C)}{2} \tag{29}$$

при условии, что C не является линейным подпространством. Отметим, что поскольку $AC \subset \mathbb{R}^k$, то $\upsilon_k(AC) = \alpha(AC)$, если AC имеет полную размерность, и $\upsilon_k(AC) = 0$ в противном случае.

Используя модифицированные углы Грассмана, можно получить (29) для произвольных выпуклых конусов:

$$\mathbf{E}[\upsilon_k(AC)] = \alpha_{k-1}(C). \tag{30}$$

Действительно, в силу теоремы 3.1 достаточно проверить (30) только для линейных подпространств.
Пусть $C = \mathbb{R}^n$, где $0 \leqslant n \leqslant d$.
Известно (см. [7, утверждение 5.7]) что для любого $k \in \mathbb{N}$ и произвольного конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{P}[\dim AC = \min(k, \dim C)] = 1.$$

Рассмотрим два случая:

(1) $n \leqslant k - 1$.
Тогда $\upsilon_k(AC) = 0$ с вероятностью 1, потому что
$\mathbf{P}[\dim AC = \min(\dim C, k) = n] = 1$.
Итак, $\mathbf{E}[\upsilon_k(AC)] = 0$.
С другой стороны, $\alpha_{k-1}(C) = 0$, поскольку $\dim C + (d-k+1) = n + (d-k+1) \leqslant d$.

(2) $n \geqslant k$.
По этой же причине,
$\upsilon_k(AC) = 1$ с вероятностью 1, поскольку
$\mathbf{P}[\dim AC = \min(\dim C, k) = \min(n, k) = k]$, и $\mathbf{E}[\upsilon_k(AC)] = 1$;
$\alpha_{k-1}(C) = 1$, так как $\dim C + (d-k+1) = n + (d-k+1) > d$.

Итак,

$$\mathbf{E}[\upsilon_k(A\mathbb{R}^n)] = \sum_{i\geqslant 0} \upsilon_{k+i}(\mathbb{R}^n) = \alpha_{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, формула (30) доказана.

§4. Доказательства

4.1. Часть I: дискретные внутренние объемы.

Доказательство теоремы 1.1. Поскольку $\alpha(N_F(P)) = \upsilon_k(T_F(P))$, мы можем переписать $A_k(P)$ в следующем виде:

$$A_k(P) := \sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P))\alpha(T_v(F)). \tag{31}$$

Очевидно, что $A_k(\varnothing) = 0$. Сначала мы должны показать, что для всех $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ таких, что $P\cup Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$,

$$A_k(P\cup Q) = A_k(P) + A_k(Q) - A_k(P\cap Q),$$

то есть,

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P\cup Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P\cup Q))\alpha(T_v(F)))\\
&\quad= \sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P))\alpha(T_v(F))\\
&\quad+ \sum_{v\in Q\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(Q))\alpha(T_v(F))\\
&- \sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P\cap Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P\cap Q))\alpha(T_v(F)).
\end{aligned}$$

Докажем, что равенство выполняется для любой точки $v \in (P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d$. Другими словами, для фиксированной $v\in P\cup Q$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P\cup Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P\cup Q))\alpha(T_v(F)) \qquad (32)\\
&\quad=\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P))\alpha(T_v(F))\\
&\quad+\sum_{F\in\mathcal{F}_k(Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(Q))\alpha(T_v(F))\\
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P\cap Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P\cap Q))\alpha(T_v(F)).
\end{aligned}$$

Определение. Будем говорить, что два k-мерных многогранника коллинеарны, если они находятся в одном k-мерном подпространстве.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $v\notin P\cap Q$. Не умаляя общности, $v\in P\setminus Q$. Тогда (32) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P\cup Q)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P\cup Q))\alpha(T_v(F))\\
&\quad=\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \mathbb{1}[v\in F]\det(F)\upsilon_k(T_F(P))\alpha(T_v(F)),
\end{aligned}$$

что тривиально, поскольку υ_k и α задаются некоторой окрестностью v, а многогранники $P\cup Q$, P совпадают в этой окрестности.

Случай 2. $v\in P\cap Q$. Для того чтобы разобраться с этим случаем, нужно описать связи между гранями P,Q и гранями $P\cup Q, P\cap Q$. Нам потребуются две следующие леммы.

Лемма 4.1. *Пусть F – k-мерная грань $P\cup Q$ или $P\cap Q$. Тогда существует k-мерная грань $\tilde F$ многогранника P или Q такая, что F и $\tilde F$ коллинеарны.*

Доказательство леммы 4.1. Рассмотрим два случая:

(1) F – k-мерная грань $P\cup Q$. По определению (см. подраздел 2.2) грань F может быть представлена в виде $F=H_F\cap(P\cup Q)$, где H_F – опорная гиперплоскость $P\cup Q$. В этом случае $H_F\cap P$ и $H_F\cap Q$ являются гранями P и Q соответственно. Теперь покажем, что обе эти грани k-мерны. Действительно, если $H_F\cap P$ и $H_F\cap Q$ имеют размерность меньше k, то $F=$

$H_F \cap (P \cup Q) = (H_F \cap P) \cup (H_F \cap Q)$ имеет размерность меньше k, что противоречит нашему предположению.

(2) F – k-мерная грань $P \cap Q$. По той же причине $F = H_F \cap (P \cap Q)$ для некоторой опорной гиперплоскости H_F многогранника $P \cap Q$.

Прежде всего отметим, что хотя бы один из многогранников P или Q лежит по одну сторону от H_F. Фактически, в силу выпуклости объединения P и Q, если $p \in P$, $q \in Q$, то отрезок pq содержит хотя бы одну точку из $P \cap Q$. Итак, если мы предположим, что есть точки p_1 и q_1 по одну сторону от H_F, p_2 и q_2 по другую сторону от H_F, то, согласно вышеизложенному, существуют $x \in p_1q_1, y \in p_2q_2$, такие что $x, y \in P \cap Q$. Следовательно, $P \cap Q$ не лежит по одну сторону от H_F, что противоречит предположению.

Без ограничения общности можно считать, что P лежит по одну сторону от H_F. Тогда $H_F \cap P$ является гранью P. Остается проверить, что $H_F \cap P$ имеет размерность k.

Предположим противное: размерность $H_F \cap P$ по крайней мере $k+1$. Возможны три случая.

(a) Q не лежит по одну сторону от H_F. Поскольку $\dim H_F \cap P \geqslant k+1$, существует точка $w \notin F$, $w \in H_F \cap P$ такая, что $\dim \operatorname{lin}(w, F) = k+1$, где $\operatorname{lin}(w, F)$ – линейная оболочка w и F. Докажем, что в этом случае $w \in Q$. По предположению существуют две точки $q_1, q_2 \in Q$ такие, что q_1, q_2 лежат по разные стороны от H_F. Оба отрезка q_1w и q_2w содержат точки из $P \cap Q$. Но $P \cap Q$ лежит по одну сторону от H_F. Следовательно, есть только одна точка на отрезках q_1w, q_2w, содержащаяся в $P \cap Q$ – это w. Данный факт противоречит нашему предположению о k-мерности $F = H_F \cap (P \cap Q)$.

(b) Q и P лежат по разные стороны от H_F. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

(c) Q лежит по ту же сторону от H_F, что и P. Тогда $H_F \cap Q$ является гранью Q. Если $H_F \cap Q$ k-мерная, то лемма доказана с $\tilde{F} = H_F \cap Q$. Теперь предположим, что $\dim H_F \cap Q \geqslant k+1$. Существуют точки $w_1 \notin F$, $w_1 \in H_F \cap P$, $w_2 \notin F$, $w_2 \in H_F \cap Q$ такие, что $\dim \operatorname{lin}(w_1, F) = \dim \operatorname{lin}(w_2, F) = k+1$.

Допустим, что $\dim \operatorname{lin}(w_1, w_2, F) = k+2$. Как и раньше, отрезок w_1w_2 содержит точку $z \in P \cap Q$. Более того, $z \notin F$, поскольку $\dim \operatorname{lin}(w_1, w_2, F) = k + 2$. С другой стороны, $z \in H_F \cap (P \cap Q) = F$, что является искомым противоречием. Если $\dim \operatorname{lin}(w_1, w_2, F) = k + 1$, то 0, w_1, w_2 лежат на одной прямой. В случае, когда w_1 и w_2 лежат по одну сторону от 0, имеем $\dim H_F \cap (P \cap Q) = k + 1$, что противоречит нашему предположению. Если w_1 и w_2 лежат по разные стороны от 0, то F – грань $H_F \cap P$, а значит, F – грань P. Это завершает доказательство.

□

Лемма 4.2. *Пусть E – k-мерная грань P такая, что не существует грани Q, коллинеарной E. Тогда E – k-мерная грань $P \cap Q$ или $P \cup Q$.*

Доказательство леммы 4.2. Следуя обозначениям предыдущей леммы, рассмотрим гиперплоскость H_E такую, что $E = H_E \cap P$ и разберем три случая:

(1) Q полностью лежит по ту же сторону от H_E, что и P. Тогда H_E является опорной гиперплоскостью для $P \cup Q$ и $E \subset H_E \cap (P \cup Q)$. Предположим, что не существует грани $P \cup Q$, коллинеарной E, тогда $H_E \cap (P \cup Q)$ имеет размерность по крайней мере $k + 1$. Следовательно, $H_E \cap Q$ имеет размерность по крайней мере $k+1$, поэтому $H_E \cap P \subset H_E \cap Q$. Тогда $H_E \cap (P \cap Q) = H_E \cap P = E$.

(2) Q не находится полностью по одну сторону от H_E. В этом случае, используя те же рассуждения, что и в случае 2a предыдущей леммы, получаем, что $E \subset Q$ и E является гранью $P \cap Q$.

(3) Q и P полностью лежат по разные стороны от H_E. Тогда доказательство опирается на те же аргументы, что и в случае 2b леммы 4.1.

□

Используя эти леммы, мы можем доказать (32) путем независимого рассмотрения классов коллинеарных граней. Зафиксируем k-мерную грань E многогранника P.

Случай 2.1. Не существует грани Q, коллинеарной E. Из второй леммы следует, что E является гранью $P \cup Q$ или $P \cap Q$.

Случай 2.1.1 E – грань $P \cap Q$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть C_1 и C_2 – конусы разных размерностей, объединение которых выпукло. Тогда один из них содержит другой.*

Доказательство леммы 4.3. Предположим, что

$$\dim C_1 = k, \dim C_2 = n, k > n \text{ и } x \in C_1 \cup C_2.$$

По условию выпуклости $x + C_1 \cup C_2 \subseteq C_1 \cup C_2$. Следовательно, для любой окрестности U точки x множество $U \cap (C_1 \cup C_2)$ по крайней мере k-мерно, поэтому $x \in C_1$. □

Мы знаем, что $E \subset Q$ и E не является гранью Q. Таким образом, конус $T_E(Q) := T_e(Q)$ (для некоторой точки $e \in \text{relint}(E)$) содержит k-мерное подпространство. Кроме того, мы знаем, что Q не имеет граней, коллинеарных E, поэтому $T_E(Q)$ является конусом размерности не менее $k+1$, а $T_E(P)$ имеет размерность k. По лемме 4.3 $T_E(P) \subset T_E(Q)$, следовательно, $T_E(P) = T_E(P \cap Q)$. Теперь мы видим, что в (32) слагаемые для грани E совпадают и имеют разные знаки: одно слагаемое есть в сумме для P, а другое – в сумме для $P \cap Q$.

Случай 2.1.2 E – грань $P \cup Q$. Используя вышеприведенные аргументы, мы заключаем, что конус $T_e(Q), e \in E$, не более чем $(k-1)$-мерный и $T_E(P) = T_E(P \cup Q)$; поэтому слагаемые для грани E снова совпадают.

Случай 2.2 Найдется грань E_1 многогранника Q такая, что E_1 и E коллинеарны. Тогда существует грань $E_2 = E \cup E_1$ многогранника $P \cup Q$, коллинеарная E.

Случай 2.2.1 Не найдется грани $P \cap Q$, коллинеарной E. Рассмотрим произвольную точку $p \in \text{relint}(E)$. Легко видеть, что $p \notin Q$. Тогда

$$T_E(P) = T_p(P) = T_p(P \cup Q) = T_{E_2}(P \cup Q). \qquad (33)$$

Проделав то же самое с Q, получаем

$$T_E(P) = T_{E_1}(Q) = T_{E_2}(P \cup Q). \qquad (34)$$

Обозначим конус в последнем равенстве через C. Теперь слагаемые в (32) для грани E имеют вид:

$$\det(E_2) v_k(C) \alpha(T_v(E_2)) = \det(E) v_k(C) \alpha(T_v(E)) + \det(E_1) v_k(C) \alpha(T_v(E_1)).$$

Все три определителя равны, поэтому равенство следует из аддитивности телесного угла (в этом случае $\alpha(T_v(P \cap Q)) = 0$).

Случай 2.2.2. Существует k-мерная грань $E_3 = E \cap E_1$ многогранника $P \cap Q$. В этом случае мы имеем четыре многогранника E, E_1, E_2, E_3, между которыми могут быть разные отношения включения.

Случай 2.2.2.1. $E \not\subseteq E_1$ и $E_1 \not\subseteq E$. Тогда (34) выполнено исходя из тех же соображений, что и в предыдущем случае. Рассмотрим также точку $r \in \mathrm{relint}(E_3) \subset \mathrm{relint}(E)$. Имеем

$$T_{E_3}(P \cap Q) = T_r(P \cap Q) = T_r(P) \cap T_r(Q) = T_r(P) = T_E(P). \tag{35}$$

Следовательно,

$$T_E(P) = T_{E_1}(Q) = T_{E_2}(P \cup Q) = T_{E_3}(P \cap Q).$$

Если в последнем равенстве конус обозначить через C, то слагаемые в (32) для грани E и коллинеарных ей будут иметь вид

$$\begin{aligned} \det(E_2) v_k(C) \alpha(T_v(E_2)) &= \det(E) v_k(C) \alpha(T_v(E)) \\ &+ \det(E_1) v_k(C) \alpha(T_v(E_1)) - \det(E_3) v_k(C) \alpha(T_v(E_3)). \end{aligned}$$

Здесь опять пользуемся равенством определителей и аддитивностью телесного угла.

Случай 2.2.2.2 $E_1 = E$. Тогда $E = E_1 = E_2 = E_3$ и

$$\alpha(T_v(E)) = \alpha(T_v(E_1)) = \alpha(T_v(E_2)) = \alpha(T_v(E_3)) = \alpha.$$

В этом случае (32) сводится к

$$v_k(T_{E_2}(P \cup Q)) = v_k(T_E(P)) + v_k(T_{E_1}(Q)) - v_k(T_{E_3}(P \cap Q)),$$

что следует из свойства аддитивности конического внутреннего объема (см. [17, раздел 6.5]).

Случай 2.2.2.3 $E \subset E_1$, $E \neq E_1$. Тогда $E_2 = E_1$, $E_3 = E$. Те же рассуждения, что в (33) и в (35), приводят к

$$T_{E_1}(Q) = T_{E_2}(P \cup Q), \quad T_E(P) = T_{E_3}(P \cap Q).$$

Теперь в (32) слагаемые для P совпадают со слагаемыми для $P \cap Q$, а слагаемые для Q совпадают со слагаемыми для $P \cup Q$.

Таким образом, $A_k(\cdot)$ является валюацией. Инвариантность относительно сдвигов для $A_k(\cdot)$ тривиальна.

Легко показать, что $A_0(P) = 1$ и $A_d(P) = A(P)$:

$$A_0(P) = \sum_{v-\text{ вершина } P} v_0(T_v(P)) = 1,$$

$$A_d(P) = \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} v_d(T_P(P)) \alpha(T_v(P)) = \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \alpha(T_v(P)) = A(P).$$

Здесь мы полагаем по определению $\alpha(T_v(v)) = 1, \det(v) = 1$, когда v является вершиной P, и используем свойства конических внутренних объемов, в частности, тот факт, что для любого $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ выполнено: $\sum\limits_{v-\text{ вершина } P} \upsilon_0(T_v(P)) = 1$.

Очевидно, $A_k(P) = 0$ в случае, когда $\dim P < k$, поскольку P не имеет k-мерных граней.

Четвертая часть теоремы 1.1 равносильна первой части теоремы 1.2, доказательство которой представлено ниже. □

Доказательство теоремы 1.2. Запишем (31) следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_k(P) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \sum_{v \in F \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}[v \in F] \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) \alpha(T_v(F)) \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) \sum_{v \in F \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}[v \in F] \alpha(T_v(F)) \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) \sum_{E \in \mathcal{F}(F)} \sum_{v \in \operatorname{relint}(E)} \alpha(T_v(F)) \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) \sum_{E \in \mathcal{F}(F)} L_{\operatorname{relint}(E)} \alpha(T_E(F)).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
A_{k,P}(t) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) \sum_{E \in \mathcal{F}(F)} L_{\operatorname{relint}(E)}(t) \alpha(T_E(F)) \qquad (36) \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \det(F) \upsilon_k(T_F(P)) A_F(t).
\end{aligned}$$

Здесь $A_F(t)$ обозначает сумму $\sum\limits_{E \in \mathcal{F}(F)} L_{\operatorname{relint}(E)}(t) \alpha(T_E(F))$ в k-мерном подпространстве в $\mathbb{R}^d$, порожденном гранью F. Результаты, упомянутые в разделе 1.2, верны для $A_F(t)$ с небольшими изменениями. Согласно (13), (14), $A_F(t)$ всегда является четным или нечетным многочленом степени k с нулевым постоянным членом. Поэтому то же самое верно и для $A_{k,P}(t)$.

Для того чтобы вычислить старший коэффициент, обратим внимание, что члены в (36) при $E \neq F$ имеют степень строго меньше k и, следовательно, не влияют на старший коэффициент; члены $L_{\operatorname{relint}(E)}(t)$ при $E = F$, согласно (3) и (15), имеют старший коэффициент $\frac{|F|}{\det(F)}$.

Таким образом, старший коэффициент $A_{k,P}(t)$ равен

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \det(F)\upsilon_k(T_F(P))\frac{|F|}{\det(F)} = \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \upsilon_k(T_F(P))|F| \overset{(26)}{=} V_k(P).$$

Наконец, покажем, что свойство взаимности выполняется:

$$\begin{aligned} A_{k,P}(-n) &= \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \det(F)\upsilon_k(T_F(P))A_F(-n) \\ &\overset{(15)}{=} \sum_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \det(F)\upsilon_k(T_F(P))(-1)^{\dim F}A_F(n) \\ &= (-1)^k A_{k,P}(n). \end{aligned}$$

□

4.2. Часть II: валюации Грассмана.

Доказательство теоремы 1.3. По определению инвариантной относительно сдвигов валюации нам нужно показать, что

(1) $G_k(\varnothing) = 0$;
(2) $G_k(P\cup Q)+G_k(P\cap Q) = G_k(P)+G_k(Q)$ для всех $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ таких, что $P\cup Q$ выпукло;
(3) $G_k(P+z) = G_k(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $z \in \mathbb{Z}^d$.

Первое и третье свойства, очевидно, выполнены. Проверим второе. Мы должны доказать, что

$$\begin{aligned} \sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(P\cup Q)) + \sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(P\cap Q)) \\ = \sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(P)) + \sum_{v\in Q\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(Q)). \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой 3.2 и следующим тривиальным фактом:

$$\begin{aligned} T_v(P\cup Q) &= T_v(P)\cup T_v(Q), \\ T_v(P\cap Q) &= T_v(P)\cap T_v(Q). \end{aligned}$$

Мы получаем

$$\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\alpha_k(T_v(P\cup Q))+\sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d}\alpha_k(T_v(P\cap Q))$$
$$=\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P\cup Q))+\sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P\cap Q))$$
$$=\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cup T_v(Q))$$
$$+\sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cap T_v(Q)).$$

По свойству аддитивности конических внутренних объемов (см. [17, раздел 6.5]) можно переписать последнее выражение в виде

$$\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cup T_v(Q))+\sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cap T_v(Q))$$
$$=\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P))+\upsilon_{k+i}(T_v(Q))-\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cap T_v(Q))$$
$$+\sum_{v\in(P\cap Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P)\cap T_v(Q))$$
$$=\sum_{v\in(P\cup Q)\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P))+\upsilon_{k+i}(T_v(Q))$$
$$=\sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(P))+\sum_{v\in Q\cap\mathbb{Z}^d}\sum_{i\geqslant1}\upsilon_{k+i}(T_v(Q))$$
$$=\sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d}\alpha_k(T_v(P))+\sum_{v\in Q\cap\mathbb{Z}^d}\alpha_k(T_v(Q)).$$

Отсюда следует, что $G_k(\cdot)$ является инвариантной относительно сдвигов валюацией на $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$.

Далее легко видеть, что $G_{d-1}(P)$ совпадает с валюацией телесного угла $A(P)$ для $P\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$:

$$G_{d-1}(P)=\sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d}\alpha_{d-1}(T_v(P))=\sum_{v\in P\cap\mathbb{Z}^d}\alpha(T_v(P))=A(P).$$

Поскольку $\alpha_d(C)\equiv0$ для любого конуса C, мы имеем

$$G_d(P)\equiv0.$$

Следующий шаг – показать, что дискретный объем $L(P)$ с точностью до константы совпадает с $G_0(P)$:

$$G_0(P) = \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \alpha_0(T_v(P)) = \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{i \geqslant 1} \upsilon_i(T_v(P))$$
$$= \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} 1 - \upsilon_0(T_v(P)) = L(P) - \sum_{v \in P \cap \mathbb{Z}^d} \upsilon_0(T_v(P)).$$

Здесь $\upsilon_0(T_v(P)) = 0$, когда v не является вершиной многогранника P. Действительно, $\upsilon_0(T_v(P)) = \mathbf{P}[\Pi_{T_v(P)}(g) \in \mathrm{relint}($некоторой $0-$ мерной грани $T_v(P))]$. Но если v не является вершиной P, то $T_v(P)$ не имеет 0-мерных граней.

Итак,

$$G_0(P) = L(P) - \sum_{v - \text{ вершина } P} \upsilon_0(T_v(P)) = L(P) - 1.$$

На последнем шаге мы использовали тот факт, что

$$\sum_{v - \text{ вершина } P} \upsilon_0(T_v(P)) = \sum_{v - \text{ вершина } P} \alpha(T_v(P)^\circ) = 1$$

для $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$.

Четвертая часть теоремы 1.3 легко следует из неравенства (21) и свойств углов α_k, включая теорему 3.1. □

Доказательство теоремы 1.4. Благодаря результату МакМаллена (см. (16)) из теоремы 1.3 следует, что $G_{k,P}(t)$ является многочленом от t. Тем не менее приведем еще одно стандартное короткое рассуждение.

Представим многогранник tP в виде дизъюнктного объединения относительных внутренностей его граней:

$$tP = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(P)} \mathrm{relint}(tF).$$

Тогда

$$G_{k,P}(t) = \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(tP)) = \sum_{F \in \mathcal{F}(P)} \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(tP)) \mathbb{1}[v \in \mathrm{relint}(tF)].$$

Поскольку $T_{v_1}(tP)=T_{v_2}(tP)$ для любых $v_1, v_2 \in \mathrm{relint}(tF)$, то $\alpha_k(T_v(tP))$ – константа на $\mathrm{relint}(tF)$ для каждой грани F, обозначим эту константу через $\alpha_{k,F,P}$.

$$G_{k,P}(t) = \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P} \sum_{v\in tP\cap\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}[v \in \mathrm{relint}(tF)]$$
$$= \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P} L_{\mathrm{relint}(F)}(t). \tag{37}$$

Таким образом, $G_{k,P}(t)$ – многочлен от t степени не выше d, так как $L_{\mathrm{relint}(F)}(t)$ является многочленом от t степени d.
Заметим, что каждый член в правой части (37) имеет степень строго меньше d, кроме того слагаемого, где $F = P$. Следовательно, старший коэффициент $G_{k,P}(t)$ равен $\alpha_{k,P,P}|P|$, поскольку P полной размерности и старший коэффициент $L_{\mathrm{relint}(P)}(t)$ равен $|P|$. Более того, $\alpha_{k,P,P} = 1$, значит, $G_k^{(d)}(P) = |P|$.

Остается проверить, что $G_k^{(0)}(P) = 0$.
Для $k = 0$ это следует из того, что свободный член $L_P(t)$ равен 1 и $G_{0,P}(t) = L_P(t) - 1$.
В остальных случаях заметим сначала, что ввиду (37), мы имеем

$$G_{k,P}(0) = \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P} L_{\mathrm{relint}(F)}(0) = \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P}(-1)^{dimF}.$$

Здесь последнее равенство выполнено, поскольку $L_P(0) = 1$ и верно свойство взаимности Эрхарта - Макдональда, о котором упоминалось во введении:

$$L_P(-t) = (-1)^{dimP} L_{\mathrm{relint}(P)}(t).$$

Итак, чтобы выразить свободный член многочлена $G_{k,P}$, нужно понять, чему равна сумма $\sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P}(-1)^{dimF}$.

Как и в доказательстве теоремы 3.3 (см. подраздел 4.3), применяем формулу (45) и получаем

$$\sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P}(-1)^{dimF} = \sum_{j=0}^{d}(-1)^j \sum_{F^j\in\mathcal{F}_j(P)} \alpha_{k,F^j,P}$$
$$= \sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j \sum_{F^j\in\mathcal{F}_j(P)} \frac{1}{2}\left(\gamma^{d-k,d}(P,F^j) + \gamma^{d-k-1,d}(P,F^j)\right) + (-1)^d \alpha_{k,P,P}.$$

Далее используем формулу (44) и тот факт, что $\alpha_{k,P,P} = 1$ и

$$\gamma^{d-k,d}(P,P) = \gamma^{d-k-1,d}(P,P) = 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma^{d-k,d}(P,F^j) \\
+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma^{d-k-1,d}(P,F^j) + (-1)^d \\
= \frac{1}{2}\left((-1)^k - (-1)^d \gamma^{d-k,d}(P,P)\right) \\
+ \frac{1}{2}\left((-1)^{k+1} - (-1)^d \gamma^{d-k-1,d}(P,P)\right) + (-1)^d \\
= \frac{1}{2}\left((-1)^k - (-1)^d\right) + \frac{1}{2}\left((-1)^{k+1} - (-1)^d\right) + (-1)^d = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\sum\limits_{F \in \mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P}(-1)^{dimF} = 0$, что и завершает доказательство. □

В процессе доказательства теоремы 1.4 мы получили следующий аналог соотношения Брианшона – Грама (25) для модифицированных углов Грассмана.

Утверждение 1. *Если $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ является d-мерным многогранником, то*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(P)} \alpha_{k,F,P}(-1)^{dimF} = 0.$$

Доказательство теоремы 1.5. Найдем коэффициенты многочлена $G_{1,\Delta_h}(t)$:

$$G_{1,\Delta_h}(t) = \sum_{v \in t\Delta_h \cap \mathbb{Z}^d} \alpha_1(T_v(t\Delta_h)).$$

Для этого нам нужно вспомнить определение двойственного конуса (см. раздел 2.3) и доказать следующее утверждение. Пусть n обозначает нормаль к случайному подпространству W_{d-1} в d-мерном пространстве, проходящую через 0, с фиксированным направлением.

Утверждение 2. *Для $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ и $v \in P \cap \mathbb{Z}^d$ следующие два условия эквивалентны:*

(a) $T_v(P) \cap W_{d-1} = \{0\}$;
(b) $\big\{n \cap \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\} \bigcup \big\{-n \cap \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\} \neq \{0\}$.

Доказательство. Доказательство представляет собой цепочку равносильных переходов:

$$
\begin{aligned}
&T_v(P) \cap W_{d-1} = \{0\}\\
&\qquad \Leftrightarrow \big\{\forall x \in T_v(P)\ \langle x, n\rangle > 0\big\} \bigcup \big\{\forall x \in T_v(P)\ \langle x, n\rangle < 0\big\}\\
&\qquad \Leftrightarrow \big\{n \cap \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\} \bigcup \big\{-n \cap \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\} \neq \{0\}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Обозначим через l прямую, содержащую нормаль n. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}[W_{d-1} \cap T_v(P) \neq \{0\}] &= 1 - \mathbf{P}[W_{d-1} \cap T_v(P) = \{0\}]\\
&= 1 - \mathbf{P}\big[\big\{n \in \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\} \bigcup \big\{-n \in \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ)\big\}\big]\\
&= 1 - \mathbf{P}[l \cap \operatorname{relint}(T_v(P)^\circ) \neq \{0\}].
\end{aligned}
$$

Далее применяем теорему 3.1 и утверждение 2 к $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^3)$ с $\dim P = 3$:

$$
\begin{aligned}
G_{1,P}(t) &= \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} \alpha_1(T_v(tP)) = \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[W_2^+ \cap (T_v(tP)) \neq \{0\}]\\
&= \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}[W_2 \cap (T_v(tP)) \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_1 \cap (T_v(tP)) \neq \{0\}]\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} 1 - \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[l \cap \operatorname{relint}(T_v(tP)^\circ) \neq \{0\}]\right)\\
&+ \frac{1}{2} \sum_{v \in tP \cap \mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[W_1 \cap (T_v(tP)) \neq \{0\}].
\end{aligned}
$$

В случае тетраэдра Рива имеем

$$
\begin{aligned}
G_{1,\Delta_h}(t) &= \sum_{v \in t\Delta_h \cap \mathbb{Z}^3} \alpha_1(T_v(t\Delta_h)) = \sum_{v \in t\Delta_h \cap \mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[W_2^+ \cap (T_v(t\Delta_h)) \neq \{0\}]\\
&= \sum_{v \in t\Delta_h \cap \mathbb{Z}^3} \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}[W_2 \cap (T_v(t\Delta_h)) \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_1 \cap (T_v(t\Delta_h)) \neq \{0\}]\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{v\in t\Delta_h\cap\mathbb{Z}^3} 1 - \sum_{v\in t\Delta_h\cap\mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[l\cap \mathrm{relint}(T_v(t\Delta_h)^\circ) \neq \{0\}] \Big)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{v\in t\Delta_h\cap\mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[W_1 \cap (T_v(t\Delta_h)) \neq \{0\}]$$
$$= \frac{1}{2}L_{\Delta_h}(t) - 1 + A_{\Delta_h}(t) - \frac{1}{2}L_{\mathrm{relint}(\Delta_h)}(t)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(2-\frac{h}{6}\right)t + 1\right) - 1 + \frac{h}{6}t^3 + \left(S - \frac{h}{6}\right)t$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{h}{6}t^3 - t^2 + \left(2-\frac{h}{6}\right)t - 1\right) = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(S-\frac{h}{6}\right)t. \quad (38)$$

Здесь пятое равенство следует из того, что

$$\sum_{v\in t\Delta_h\cap\mathbb{Z}^3} \mathbf{P}[l\cap\mathrm{relint}(T_v(t\Delta_h)^\circ) \neq \{0\}] = \sum_{v-\text{ вершина } t\Delta_h} \mathbf{P}[l\cap\mathrm{relint}(T_v(t\Delta_h)^\circ)\neq\{0\}].$$

Действительно, если $v \in t\Delta_h \cap \mathbb{Z}^3$ не является вершиной $t\Delta_h$, то двойственный конус лежит в линейном подпространстве размерности не больше 2, поэтому $\mathbf{P}[l \cap \mathrm{relint}(T_v(t\Delta_h)^\circ) \neq \{0\}] = 0$.
Более того, из (22) и тождества

$$\sum_{v-\text{ вершина } P} \alpha(T_v(P)^\circ) = 1$$

для $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ следует, что

$$\sum_{v-\text{ вершина } t\Delta_h} \mathbf{P}[l\cap \mathrm{relint}(T_v(t\Delta_h)^\circ) \neq \{0\}] = \sum_{v-\text{ вершина } t\Delta_h} 2\alpha_2(T_v(t\Delta_h)^\circ) = 2.$$

На предпоследнем шаге в (38) мы использовали свойство взаимности Эрхарта – Макдональда $L_{\Delta_h}(-t) = (-1)^3 L_{\mathrm{relint}(\Delta_h)}(t)$, чтобы найти многочлен:

$$L_{\mathrm{relint}(\Delta_h)}(t) = \frac{h}{6}t^3 - t^2 + \left(2-\frac{h}{6}\right)t - 1.$$

Итак,

$$G_{1,\Delta_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(S - \frac{h}{6}\right)t.$$

Доказательство завершено. $\square$

Доказательство теоремы 1.6. Как отмечалось во введении, достаточно доказать, что существует симплекс $\Delta_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ такой, что $G_k(\mathrm{relint}(\Delta_0)) := \sum\limits_{F\in\mathcal{F}(\Delta_0)} (-1)^{\dim\Delta_0-\dim F} G_k(F) < 0$. Пусть $\Delta \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ – произвольный симплекс.
Из определения $G_k(\mathrm{relint}(\Delta))$ и теоремы 3.2 следует, что

$$\begin{aligned} G_k(\mathrm{relint}(\Delta)) :&= \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} G_k(F) \\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} \sum_{v\in F\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_k(T_v(F)) \\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} \sum_{v\in F\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{i\geqslant 1} \upsilon_{k+i}(T_v(F)). \end{aligned}$$

По теореме Фубини

$$\begin{aligned} &\sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} \sum_{v\in F\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{i\geqslant 1} \upsilon_{k+i}(T_v(F)) \\ &\qquad = \sum_{v\in\Delta\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{i\geqslant 1} \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta): v\in\mathbb{Z}^d\cap F} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} \upsilon_{k+i}(T_v(F)). \end{aligned}$$

Используя (20) и тот факт, что $T_v(F)$ – грани конуса $T_v(\Delta)$, перепишем внутреннюю сумму в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta): v\in\mathbb{Z}^d\cap F} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} \upsilon_{k+i}(T_v(F)) \\ &\qquad = (-1)^{\dim\Delta} \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta): v\in\mathbb{Z}^d\cap F} (-1)^{\dim F} \upsilon_{k+i}(T_v(F)) \\ &\qquad\qquad = (-1)^{\dim\Delta} (-1)^{k+i} \upsilon_{k+i}(T_v(\Delta)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_k(\mathrm{relint}(\Delta)) :&= \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} G_k(F) \\ &= (-1)^{\dim\Delta} \sum_{v\in\Delta\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{i\geqslant 1} (-1)^{k+i} \upsilon_{k+i}(T_v(\Delta)). \end{aligned}$$

Теперь по формуле Крофтона (23)

$$\sum_{i\geqslant 1}(-1)^{k+i}v_{k+i}(T_v(\Delta))$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(-1)^{k+1}(\gamma_k(T_v(\Delta))-\gamma_{k+1}(T_v(\Delta))), & \text{если } T_v(\Delta) \\ & \text{не линейное подпространство,} \\ (-1)^{\dim\Delta}, & \text{если } T_v(\Delta) \\ & \text{линейное подпространство,} \\ & k<\dim\Delta, \\ 0, & \text{если } T_v(\Delta) \\ & \text{линейное подпространство,} \\ & k\geqslant\dim\Delta.\end{cases}$$

Комбинируя это с тем фактом, что $T_v(\Delta)$ является линейным подпространством тогда и только тогда, когда $v\in\operatorname{relint}(\Delta)$, мы получаем

$$G_k(\operatorname{relint}(\Delta))=(-1)^{\dim\Delta}\sum_{v\in(\Delta\setminus(\operatorname{relint}(\Delta))\cap\mathbb{Z}^d}\frac{1}{2}(-1)^{k+1}\left(\gamma_k(T_v(\Delta))-\gamma_{k+1}(T_v(\Delta))\right)$$

$$+(-1)^{\dim\Delta}\begin{cases}\sum\limits_{v\in\operatorname{relint}(\Delta)\cap\mathbb{Z}^d}(-1)^{\dim\Delta}, & \text{если } T_v(\Delta) \text{ линейное} \\ & \text{подпространство, } k<\dim\Delta \\ \sum\limits_{v\in\operatorname{relint}(\Delta)\cap\mathbb{Z}^d}0, & \text{если } T_v(\Delta) \text{ линейное} \\ & \text{подпространство, } k\geqslant\dim\Delta\end{cases}$$

$$=(-1)^{\dim\Delta+k+1}\frac{1}{2}\sum_{v\in(\Delta\setminus(\operatorname{relint}(\Delta))\cap\mathbb{Z}^d}(\gamma_k(T_v(\Delta))-\gamma_{k+1}(T_v(\Delta)))$$

$$+\begin{cases}L(\operatorname{relint}(\Delta)), & \text{если } T_v(\Delta)\text{– линейное подпространство, } k<\dim\Delta \\ 0, & \text{если } T_v(\Delta)\text{– линейное подпространство, } k\geqslant\dim\Delta.\end{cases}$$

Далее, как мы упоминали в разделе 2.3, для любого выпуклого конуса $C\subseteq\mathbb{R}^d$, $C\neq\{0\}$, имеем

$$1=\gamma_0(C)\geqslant\gamma_1(C)\geqslant\ldots\geqslant\gamma_d(C)=0.$$

Поскольку мы можем найти симплекс $\Delta_0\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ такой, что $\dim\Delta_0$ и $k\in\{0,\ldots,d-2\}$ имеют одинаковую четность, $L(\operatorname{relint}(\Delta_0))=0$ и $\gamma_k(T_v(\Delta_0))>\gamma_{k+1}(T_v(\Delta_0))$ для некоторой точки $v\in\Delta_0\setminus\operatorname{relint}(\Delta_0)$, то число $G_k(\operatorname{relint}(\Delta_0))$ отрицательно для симплекса Δ_0. Таким образом, условие (iii) (см. подраздел 1.5) не выполняется для Δ_0, что доказывает нашу теорему. □

Замечание. Пусть $k = d-1$. В этом случае $G_{d-1}(\mathrm{relint}(\Delta))$ совпадает с $G_{d-1}(\Delta) = A(\Delta)$ и, следовательно, $G_{d-1}(\cdot)$ комбинаторно-положительна:

$$\begin{aligned}
G_{d-1}(\mathrm{relint}(\Delta)) :&= \sum_{F\in\mathcal{F}(\Delta)} (-1)^{\dim\Delta-\dim F} G_{d-1}(F) \\
&= (-1)^{\dim\Delta} \sum_{v\in\Delta\cap\mathbb{Z}^d} \sum_{i\geqslant 1} (-1)^{d-1+i} \upsilon_{d-1+i}(T_v(\Delta)) \\
&= (-1)^{\dim\Delta+d} \sum_{v\in\Delta\cap\mathbb{Z}^d} \upsilon_d(T_v(\Delta)) \\
&= (-1)^{\dim\Delta+d} \sum_{v\in\Delta\cap\mathbb{Z}^d} \alpha_{d-1}(T_v(\Delta)) = G_{d-1}(\Delta) = A(\Delta).
\end{aligned}$$

Здесь пятое равенство следует из того, что $\alpha_{d-1}(T_v(\Delta)) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\dim\Delta = d$.

4.3. Часть III: модифицированные углы Грассмана.

Доказательство теоремы 3.1. Обратим внимание, что из определения W_k^-, W_k^+, а также из свойств вероятности следует, что

$$\mathbf{P}[W_k^+ \cap C \neq \{0\}] = \mathbf{P}[W_k^- \cap C \neq \{0\}] \tag{39}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[W_k^+ \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_k^- \cap C \neq \{0\}] \\
&= \mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcup (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \\
&+ \mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \\
&= \mathbf{P}[(W_k^+ \cup W_k^-) \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \\
&= \mathbf{P}[W_k \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right]. \qquad (40)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание лемму 3.1, получаем

$$\mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] = \mathbf{P}\left[W_{k-1} \cap C \neq \{0\}\right].$$

Комбинируя (39) и (40), получаем требуемое.

□

Доказательство леммы 3.1. Докажем (27) с помощью двух следующих неравенств:

$$\mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \geqslant \mathbf{P}\left[W_{k-1} \cap C \neq \{0\}\right], \quad (41)$$

$$\mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \leqslant \mathbf{P}\left[W_{k-1} \cap C \neq \{0\}\right]. \quad (42)$$

Начнем с (41). Из определения полуподпространств ясно, что $W_k^+ \cap W_k^- = W_{k-1}$, а значит если конус нетривиально пересекает W_{k-1}, то W_k^+ и W_k^- пересекаются с конусом нетривиально. Тем самым,

$$\mathbf{P}\left[(W_k^+ \cap C \neq \{0\}) \bigcap (W_k^- \cap C \neq \{0\})\right] \geqslant \mathbf{P}\left[W_{k-1} \cap C \neq \{0\}\right].$$

Для того чтобы показать (42), предположим, что пересечение конуса с обоими полуподпространствами нетривиально. Тогда найдутся точки $x \neq 0, y \neq 0$ такие, что $x \in W_k^+ \cap C, y \in W_k^- \cap C$. Если хотя бы одна из точек x или y лежит в W_{k-1}, то конус нетривиальным образом пересекается с W_{k-1}, следовательно, неравенство выполняется.
Значит, мы можем считать, что в W_k точки x и y отделены подпространством W_{k-1}.
По условию выпуклости весь отрезок xy лежит внутри конуса.
Рассмотрим два случая:

(1) Если $x, y, 0$ не лежат на одной прямой, то xy пересекается с W_{k-1} в точке, отличной от 0. Следовательно, в этом случае пересечение конуса с W_{k-1} нетривиально.
(2) Если $x, y, 0$ лежат на некоторой прямой l, то конус C содержит всю эту прямую, причем эта прямая не лежит в W_{k-1}.

В случае, когда $C \cap W_k = l \cup A$, где $A \neq \varnothing$, рассмотрим точку $a \in A$. Если $a \in W_{k-1}$, то пересечение C с W_{k-1} нетривиально, что нам и нужно. Если $a \notin W_{k-1}$, то a лежит в одном из открытых полуподпространств W_k^+, W_k^-. Соединим a с одной из двух точек x или y, которая лежит в другом полуподпространстве. Не умаляя общности, можем считать, что это точка x. Тогда отрезок ax лежит в конусе C и пересекает W_{k-1} в точке, отличной от 0.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда

$$C \cap W_k = l.$$

Представим C в виде $C = L \cup \tilde{C}$, где L – наибольшее линейное подпространство, содержащееся в конусе C.

(a) Пусть $\dim L \leqslant d-k$. В этом случае $\mathbf{P}[C \cap W_k = l] = 0$, так как из $C \cap W_k = l$ следует, что $L \cap W_k = l$, но $\mathbf{P}[L \cap W_k = l] = 0$. Тем самым, левая и правая части (27) равны 0.

(b) Пусть $\dim L \geqslant d-k+2$, тогда $C \cap W_k$ содержит двумерную плоскость с вероятностью 1, а это противоречит нашему предположению.

(c) Наконец, нам нужно рассмотреть последний вариант, когда $\dim L = d-k+1$. По условию леммы $C \neq \mathbb{R}^{d-k+1}$. Следовательно, существует $z \in \tilde{C} = C \setminus L$. Рассмотрим линейную оболочку L и z, обозначим ее $\tilde{L}$. Тогда $\dim \tilde{L} = d-k+2$. Отсюда следует, что $\tilde{L} \cap W_{k-1}$ содержит некоторую прямую $\tilde{l}$ с вероятностью 1. Прямая $\tilde{l}$ представима в виде $\tilde{l} = \lambda w$ для некоторого вектора $w \in \tilde{L}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку $w = \lambda_1 z + \lambda_2 v$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, v \in L$, то $\tilde{l} = \lambda w = \lambda(\lambda_1 z + \lambda_2 v)$, где $v \in L, \lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda_1 = 0$, то $\tilde{l} = \lambda\lambda_2 v = \tilde{\lambda} v$, т.е. $\tilde{l}$ лежит в L, а значит пересечение C с W_{k-1} нетривиально. Если $\lambda_1 \neq 0$, то $\tilde{l} = \lambda(\lambda_1 z + \lambda_2 v) = \lambda\lambda_1(z + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v) = \tilde{\lambda}(z + \tilde{v})$, и при неотрицательных $\tilde{\lambda}$ точки вида $\tilde{\lambda}(z+\tilde{v})$ лежат в конусе. Следовательно, пересечение C с W_{k-1} нетривиально. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Рассмотрим три случая:

(1) Если C не является линейным подпространством в $\mathbb{R}^d$, то, используя теорему 3.1 и формулу Крофтона (23), получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{P}[W_{d-k}^+ \cap C \neq \{0\}] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}[W_{d-k} \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_{d-k-1} \cap C \neq \{0\}]\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 \sum_{i \geqslant 1 \text{ нечетное}} \upsilon_{k+i}(C) + 2 \sum_{j \geqslant 1 \text{ нечетное}} \upsilon_{k+1+j}(C)\right) = \sum_{i \geqslant 1} \upsilon_{k+i}(C).$$

(2) Если C – линейное подпространство размерности n в $\mathbb{R}^d$, но при этом $C \neq \mathbb{R}^{k+1}$, то:

(a) пусть $k < n$; тогда $n + d - k > d$, причем, поскольку $n \neq k + 1$, мы видим, что $n \geqslant k + 2$, поэтому по теореме 3.1

$$\mathbf{P}[W^+_{d-k} \cap C \neq \{0\}]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}[W_{d-k} \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_{d-k-1} \cap C \neq \{0\}]\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

С другой стороны, $\sum\limits_{i \geqslant 1} \upsilon_{k+i}(C) = 1$, так как

$$\upsilon_n(C) = 1, \upsilon_j(C) = 0 \text{ при } j \neq n.$$

(b) пусть $k \geqslant n$; тогда $n + d - k \leqslant d$, следовательно,

$$\mathbf{P}[W^+_{d-k} \cap C \neq \{0\}]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}[W_{d-k} \cap C \neq \{0\}] + \mathbf{P}[W_{d-k-1} \cap C \neq \{0\}]\right)$$
$$= \frac{1}{2}(0 + 0) = 0.$$

При этом $\sum\limits_{i \geqslant 1} \upsilon_{k+i}(C) = 0$, так как $\upsilon_n(C) = 1$, $\upsilon_j(C) = 0$ при $j \neq n$.

(3) Наконец, рассмотрим случай, когда $C = \mathbb{R}^{k+1}$. В этом случае, с одной стороны, $d - k + k + 1 = d + 1 > d$, следовательно,

$$\mathbf{P}[W^+_{d-k} \cap C \neq \{0\}] = 1.$$

С другой стороны, $\sum\limits_{i \geqslant 1} \upsilon_{k+i}(C) = 1$, поскольку

$$\upsilon_{k+1}(C) = 1, \upsilon_j(C) = 0 \text{ при } j \neq k + 1. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 3.3. Для доказательства удобно обозначить через $\alpha_{k,F,P}$ k-ый модифицированный угол Грассмана для касательного конуса к P при грани F, т.е. $\alpha_{k,F,P} := \alpha_k(T_F(P))$.

Согласно Грюнбауму [8] (с несколько другими обозначениями), введем

$$\gamma^{k,d}(C^r) := \mathbf{P}[W_k \cap C^r \neq \{0\}],$$
$$\sigma^{k,d}(C^r) := 1 - \gamma^{k,d}(C^r) = \mathbf{P}[W_k \cap C^r = \{0\}],$$

где $C^r \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус размерности $1 \leqslant r \leqslant d$ и W_k – случайное k-мерное линейное подпространство, равномерно распределенное на многообразии Грассмана среди всех таких подпространств в $\mathbb{R}^d$.

Для многогранника P и его j-мерной грани F^j положим:

$$\sigma^{k,d}(P, F^j) := \sigma^{k,d}(T_{F^j}(P)),$$
$$\gamma^{k,d}(P, F^j) := \gamma^{k,d}(T_{F^j}(P)),$$

где $T_{F^j}(P)$ определено в подразделе 2.4.

Также определим

$$\sigma_j^k(P) := \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \sigma^{k,d}(P, F^j).$$

В [8, теорема 3.3.] Грюнбаум доказал, что для любого d-многогранника P и $1 \leqslant k \leqslant d-1$ выполняется тождество

$$\sum_{j=0}^{d-k-1} (-1)^j \sigma_j^k(P) = 1 - (-1)^{d-k}. \tag{43}$$

Перепишем последнюю формулу в терминах

$$\gamma^{k,d}(P, F^j) = 1 - \sigma^{k,d}(P, F^j).$$

Прежде всего отметим, что верхний индекс $d-k-1$ в сумме в левой части может быть увеличен до d, при этом значение суммы не изменится, поскольку $\sigma^{k,d}(P, F^j) = 0$ при $j \geqslant d-k$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{d-k-1} (-1)^j \sigma_j^k(P) &= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \sigma^{k,d}(P, F^j) \\
&= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} (1 - \gamma^{k,d}(P, F^j)) \\
&= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j f_j - \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma^{k,d}(P, F^j).
\end{aligned}$$

Используя тождество Эйлера (24) для выпуклого d-мерного многогранника, получаем

$$\sum_{j=0}^{d}(-1)^j f_j - \sum_{j=0}^{d}(-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma^{k,d}(P, F^j) = 1 - \sum_{j=0}^{d}(-1)^j \sum_{F^j \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma^{k,d}(P, F^j).$$

Затем, сравнивая последнее равенство с равенством (43), можно заключить, что

$$\sum_{j=0}^{d}(-1)^j \sum_{F^j\in\mathcal{F}_j(P)} \gamma^{k,d}(P,F^j) = (-1)^{d-k}. \tag{44}$$

Далее воспользуемся определениями $\alpha_{k,F^j,P}; \gamma^{k,d}(P,F^j)$ и теоремой 3.1, получим, что для $F^j \neq P$ и $1 \leqslant k \leqslant d-1$

$$\alpha_{k,F^j,P} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{d-k,d}(P,F^j) + \gamma^{d-k-1,d}(P,F^j)\right). \tag{45}$$

Подставляя $d-1$ вместо k в (45), имеем

$$\alpha_{d-1,F^j,P} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{1,d}(P,F^j) + 0\right).$$

Следовательно,

$$\gamma^{1,d}(P,F^j) = 2\alpha_{d-1,F^j,P}.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем

$$\begin{aligned}
\alpha_{d-2,F^j,P} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{2,d}(P,F^j) + \gamma^{1,d}(P,F^j)\right)\\
\gamma^{2,d}(P,F^j) &= 2\alpha_{d-2,F^j,P} - 2\alpha_{d-1,F^j,P}\\
\alpha_{d-3,F^j,P} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{3,d}(P,F^j) + \gamma^{2,d}(P,F^j)\right)\\
\gamma^{3,d}(P,F^j) &= 2\alpha_{d-3,F^j,P} - 2\alpha_{d-2,F^j,P} + 2\alpha_{d-1,F^j,P}\\
&\dots
\end{aligned}$$

Продолжая эти вычисления, мы видим, что

$$\gamma^{k,d}(P,F^j) = 2\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \alpha_{d-k+n,F^j,P}.$$

Наконец, подставим последнее тождество в (44) (заметим, что для $F^j = P$ имеем $\gamma^{k,d}(P,P) = 1$), чтобы получить

$$2\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j \sum_{F^j\in\mathcal{F}_j(P)} \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n \alpha_{d-k+n,F^j,P} = (-1)^{d-k} - (-1)^d. \qquad \square$$

§5. Благодарности

Автор благодарит Дмитрия Запорожца и Анну Гусакову за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. D. Amelunxen, M. Lotz, *Intrinsic volumes of polyhedral cones: a combinatorial perspective.* — Discrete Comput. Geom. **58**, No. 2 (2017), 371–409.
2. M. Beck, S. Robins, *Computing the continuous discretely* (second ed.), Springer, New York, 2015.
3. M. Beck, S. Robins, S. V. Sam, *Positivity theorems for solid-angle polynomials.* — Beitr. Algebra Geom. **51**, No. 2 (2010), 493–507.
4. P. Clark, *Geometry of numbers with applications to number theory*, Lect. Notes (2013).
5. E. Ehrhart, *Démonstration de la loi de réciprocité pour un polyèdre entier.* — C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** (1967), A5–A7.
6. E. Ehrhart, *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. II. Systèmes diophantiens linéaires.* — J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 25–49.
7. F. Götze, Z. Kabluchko, D. Zaporozhets, *Grassmann angles and absorption probabilities of Gaussian convex hulls.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **501** (2021), 126–148.
8. B. Grünbaum, *Grassmann angles of convex polytopes.* — Acta Math. **121** (1968), 293–302.
9. K. Jochemko, R. Sanyal, *Combinatorial positivity of translation-invariant valuations and a discrete Hadwiger theorem.* — J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20**, No. 9 (2018), 2181–2208.
10. J. Lawrence, *A short proof of Euler's relation for convex polytopes.* — Canad. Math. Bull. **40**, No. 4 (1997), 471–474.
11. I. G. Macdonald, *The volume of a lattice polyhedron.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 719–726.
12. I. G. Macdonald, *Polynomials associated with finite cell-complexes.* — J. Lond. Math. Soc. (2) **4** (1971), 181–192.
13. P. McMullen, *Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes.* — Proc. Lond. Math. Soc. (3) **35**, No. 1 (1977), 113–135.
14. J. E. Reeve, *On the volume of lattice polyhedra.* — Proc. Lond. Math. Soc. (3) **7** (1957), 378–395.
15. J. E. Reeve, *A further note on the volume of lattice polyhedra.* — J. Lond. Math. Soc. **34** (1959), 57–62.
16. R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia Math. Appl. **151** (2014).
17. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
18. R. Stanley, *Decompositions of rational convex polytopes.* — Ann. Discrete Math. **6** (1980), 333–342.

19. R. Stanley, *A monotonicity property of h-vectors and h^*-vectors.* — European J. Combin. **14**, No. 3 (1993), 251–258.

Dospolova M. K. Discrete intrinsic volumes and Grassmann valuations.

For a convex lattice polytope $P \subset \mathbb{R}^d$ of dimension d with vertices in $\mathbb{Z}^d$, denote by $L(P)$ its discrete volume which is defined as the number of integer points inside P. The classical result due to Ehrhart says that for a positive integer n, the function $L(nP)$ is a polynomial in n of degree d whose leading coefficient is the volume of P. In particular, $L(nP)$ approximates the volume of nP for large n.

In convex geometry, one of the central notion which generalizes the volume is the intrinsic volumes. The main goal of this paper is to introduce their discrete counterparts. In particular, we show that for them the analogue of the Ehrhart result holds, where the volume is replaced by the intrinsic volume.

We also introduce and study a notion of Grassmann valuation which generalizes both the discrete volume and the solid-angle valuation intrduced by Reeve and Macdonald.

Международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `dospolova.maria@yandex.ru`

Поступило 8 ноября 2021 г.