Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

Я. С. Голикова

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОНСТАНТ В ЛЕММЕ О ПСЕВДОМЕТРИКЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО МЕТОДА ГЛАДКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе рассматривается метод гладких треугольных функций, многомерный вариант которого представлен А. Ю. Зайцевым в [2]. Автор уже занималась вычислением констант для метода гладких треугольных функций в статье [3]. В данной работе получена зависимость постоянной от входных параметров леммы, позволяющей свести задачу об оценивании $\rho_h(F,\,G)$ к задаче об оценивании $\rho^{(J)}_{h,\tau}(F,G)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – совокупность всех вероятностных распределений, заданных на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств пространства $\mathbf{R}$. Для F, $G\in\mathfrak{F}$ будем обозначать $F(x)$, $G(x)$, $x\in\mathbf{R}$ – соответствующие функции распределения, $\rho(F,G)=\sup|F(x)-G(x)|$ – равномерное расстояние между функциями распределения.

Для произвольной $\mathfrak{B}$-измеримой ограниченной функции f и произвольного заданного на $\mathfrak{B}$ конечного заряда $\mu\in\mathfrak{M}$ обозначим:

$$\Gamma_f(\mu)=\sup_{z\in\mathbf{R}}\left|\int\limits_R f(x-z)\,\mu(dx)\right|, \tag{1}$$

а также:

$$\rho_f(F,\,G)=\Gamma_f(F-G). \tag{2}$$

Для любых $\mu\in\mathfrak{M}$, F, G, $H\in\mathfrak{F}$ (см. подробнее [2]) верно:

$$\rho_f(FH,\,GH)\leqslant\rho_f(F,\,G).$$

Нетрудно видеть, что $\rho_f(\cdot,\,\cdot)$ является псевдометрикой. Также часто встречаются метрики, которые могут быть записаны в виде:

$$d_{\mathcal{B}(F,G)}=\sup_{f\in\mathcal{B}}\rho_f(F,\,G),$$

где $\mathcal{B}$ – достаточно богатый класс функций.

Ключевые слова: неравенства, метрика, оценка постоянной, функция концентрации, гладкие треугольные функции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-ННИО 20-51-12004 и РФФИ 19-01-00356.

Рассмотрим некоторую функцию $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, обладающую следующими свойствами (см. [2]):

a) $\varphi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$;
b) $\varphi(x) = 1$ при $x \geqslant 1$;
c) $\varphi(x)$ строго возрастает при $0 < x < 1$;
e) $\varphi(x) = 1 - \varphi(1 - x)$ при $x \in \mathbf{R}$;
f) $\varphi(x)$ бесконечно[1] дифференцируема на всей прямой.

Ее график изображен на рисунке 1.

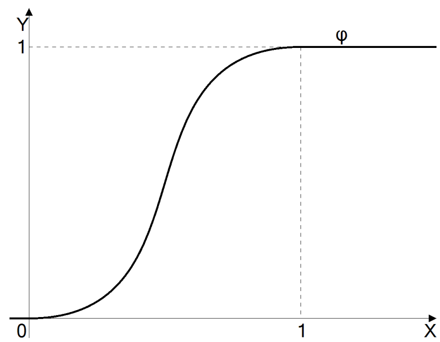

Рис. 1. График функции $\varphi(x)$.

Для z, h, τ, $x \in \mathbf{R}$, $0 < \tau < h$, определим функции

$$\varphi_{z,\tau}(x) = \varphi\Big(\frac{x - z}{\tau}\Big); \tag{3}$$

$$f_{z,h,\tau}(x) = f^{(0)}_{z,h,\tau}(x) = \varphi_{z,\tau}(x) - \varphi_{z,h}(x); \tag{4}$$

$$f^{(1)}_{z,h,\tau}(x) = \varphi_{z,h}(x) - \varphi_{z+h-\tau,\tau}(x); \tag{5}$$

$$g_{z,h,\tau}(x) = \varphi_{z,\tau}(x) - \varphi_{z+h-\tau,\tau}(x) = f^{(0)}_{z,h,\tau}(x) + f^{(1)}_{z,h,\tau}(x). \tag{6}$$

[1]В зависимости от применения это требование может быть ослаблено.

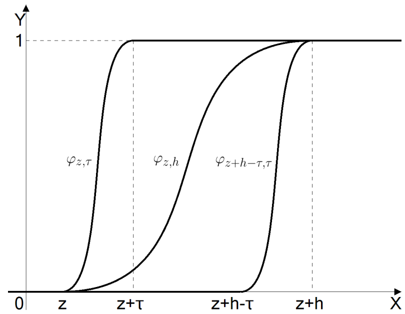

Рис. 2. Графики функций $\varphi_{\cdot,\cdot}(x)$.

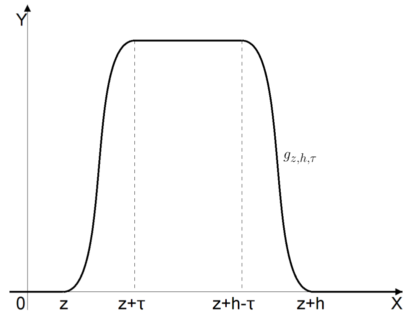

Рис. 3. График функции $g_{z,h,\tau}(x)$.

Для $J \in \{1;0\}$, $F,\ G \in \mathfrak{F}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, $z,\ h,\ \tau,\ x \in \mathbf{R}$, $0 < \tau \leqslant h$ положим:

$$\rho^{(J)}_{h,\tau}(F,G) = \rho_f(G,\ H); \quad \Gamma^{(J)}_{h,\tau}(\mu) = \Gamma_f(\mu),\ \text{где } f = f^{(J)}_{0,h,\tau}; \tag{7}$$

$$d_{h,\tau}(F,G) = \rho_{g_{0,h,\tau}}(F,\ G); \tag{8}$$

$$\rho_h(G,\ H) = \rho_{\chi_{[0,h]}}(F,\ G),$$

$$\text{где } \chi_A\ \text{ – индикаторная функция множества } A. \tag{9}$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс (J) если $J = 0$. Как правило, мы будем ограничивается оцениванием $\rho_{h,\tau}(\cdot,\ \cdot) = \rho^{(0)}_{h,\tau}(\cdot,\cdot)$ $\Gamma_{h,\tau}(\cdot) = \Gamma^{(0)}_{h,\tau}(\cdot)$ из соображений симметрии. Также введенные ранее характеристики содержательны только при $0 < \tau < h$, так как при $\tau = h\ f^{(J)}_{z,h,\tau}(x) \equiv 0$.

Приведем несколько очевидных неравенств:

$$d_{h,\tau}(F,G) \leqslant \rho^{(0)}_{h,\tau}(F,G) + \rho^{(1)}_{h,\tau}(F,G); \tag{10}$$

$$\Gamma_{h,\tau} \leqslant Q(F,\ h); \tag{11}$$

$$\rho_h(F,\ G) \leqslant d_{h,\tau}(F,G) + 2\max\Big\{Q(F,\ \tau),\ Q(G,\ \tau)\Big\}; \tag{12}$$

$$\rho_h(F,\ G) \leqslant \limsup_{\tau\to 0} d_{h,\tau}(F,Q); \tag{13}$$

$$\rho(F,G) \leqslant \limsup_{h\to\infty} \rho_h(F,\ G). \tag{14}$$

Следующая лемма позволяет сводить задачу об оценивании $\rho_h(F,G)$ к задаче об оценивании $\rho^{(J)}_{h,\tau}(F,G),\ J \in \{0,1\}$.

Лемма 1. *Пусть F, $G \in \mathfrak{F}$. Для $h \in \mathbf{R}$ обозначим $\gamma_h = Q(U, h)$. Пусть при всех $J \in \{0,1\}$ и при всех τ, $h \in \mathbf{R}$, таких что $0 < \tau < h$, $\gamma_h \leqslant 4\gamma_\tau$ справедливо неравенство*:

$$\rho^{(J)}_{h,\tau}(F,G) \leqslant C \cdot \varepsilon_1 \gamma_h^\alpha (|\ln \gamma_h| + 1)^\beta + \varepsilon_2(\tau), \tag{15}$$

где $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 0$, $\varepsilon_2(\tau)$ – невозрастающая функция параметра τ, а C – какая-то постоянная. Тогда при всех $J \in \{0,1\}$ и при всех τ, $h \in \mathbf{R}$, таких что $0 < \tau < h$ справедливы оценки:

$$\rho^{(J)}_{h,\tau}(F,G) \leqslant C \cdot c(\alpha,\beta)\varepsilon_1 A + \varepsilon_2(\tau) B; \tag{16}$$

$$\rho_h(F,\, G) \leqslant 2C \cdot c(\alpha,\beta)\varepsilon_1 A + 2\varepsilon_2(\tau) B + 2\max\Big\{Q(F,\,\tau), Q(G,\,\tau)\Big\}, \tag{17}$$

где

$$A = \gamma_h^\alpha (|\ln \gamma_h| + 1)^\beta,\ B = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\gamma_h}{\gamma_\tau} + 1,$$

и если $\varepsilon_2(\tau) \equiv 0$, то $\rho_h(F,\, G) \leqslant 2C \cdot c(\alpha,\beta)\varepsilon_1 A$, а если $\gamma_0 > 0$, то

$$\rho_h(F,\, G) \leqslant 2C \cdot c(\alpha, b)\varepsilon_1 A + 2\varepsilon_1(0)\Big(\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\gamma_h}{\gamma_0} + 1\Big). \tag{18}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *В условиях леммы 1 можно положить*

$$c(\alpha,\beta) = \sum_{l=0}^{l_0-1} 2^{-l\alpha}(l \ln 4 + 1)^\beta + \sum_{l=l_0}^{\infty} 2^{-l\alpha}(l \ln 2 + 1)^\beta,$$

$$\textit{где } l_0 = \max\left\{0, \left\lceil \frac{\frac{\beta}{\alpha} - 1}{\ln 2} \right\rceil \right\}.$$

Замечание 1.
(1) Лемма 1 является одномерным случаем леммы 2.1 из работы А. Ю. Зайцева [2, §2] и для ее доказательства достаточно положить $k = 1$.
(2) Лемма 1 является аналогом леммы 3.1 [1, гл. III] для случая гладких треугольных функций.
(3) Все сформулированные ранее неравенства и введенные величины являются одномерными аналогами соответствующих неравенств из [2, §2].
(4) При доказательстве теоремы 1 мы обратимся непосредственно к доказательству леммы 2.1 [2, §2].

Доказательство. Не нарушая общности, докажем неравенство (16) для $\rho_{h,\tau}(F,\, G) = \rho^{(0)}_{h,\tau}(F, G)$.

Построим последовательность $\tau_0 = h > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_r > \tau_{r+1} = \tau$ по следующему правилу построения. Пусть точки $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_l$ уже построены. Тогда если $Q(U,\, \tau_l) \leqslant 4\gamma_\tau$, то мы обозначим $r = l$ и положим $\tau_{r+1} = \tau$. Если $Q(U,\, \tau_l) > 4\gamma_\tau$, то очередная точка τ_{l+1} выбирается из условий $\frac{Q(U,\, \tau_l)}{4} \leqslant Q(U,\, \tau_{l+1}) \leqslant \frac{Q(U,\, \tau_l)}{2}$ (это возможно так как максимальный скачок функции концентрации происходит в нуле). По построению $\tau = \tau_{r+1} < \tau_r < \dots < \tau_1 < \tau_0 = h$, причем

$$Q(U,\, \tau_l) \leqslant 4Q(U,\, \tau_{l+1}), \quad l = 0, \dots, r. \tag{19}$$

Легко доказывается, что

$$\frac{\gamma_h}{4^l} \leqslant Q(U,\, \tau) \leqslant \frac{\gamma_h}{2^l}, \quad l = 0, \dots, r. \tag{20}$$

В частности, $\gamma_\tau \leqslant Q(U,\, \tau_r) \leqslant \frac{\gamma_h}{2^r}$, следовательно:

$$r \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\gamma_h}{\gamma_\tau}. \tag{21}$$

Из определения (4) функции $f_{z,h,\tau}\,(x)$ следует, что (см. рис. 4):

$$f_{z,h,\tau}\,(x) = \sum_{l=0}^{r} f_{z,\tau_l,\tau_{l+1}}\,(x)\,. \tag{22}$$

Из (15), (19), (20) и условий леммы 1 следует, что:

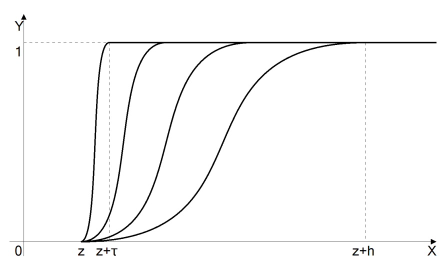

Рис. 4

$$\rho_{\tau_l,\tau_{l+1}}(F,\,G) \leqslant C\cdot\varepsilon_1\gamma_{\tau_l}^{\alpha}(|\ln\gamma_{\tau_l}|+1)^{\beta} + \underbrace{\varepsilon_2(\tau_{l+1})}_{\leqslant\varepsilon_2(\tau)}$$

$$\leqslant C\cdot\varepsilon_1\left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}\left(\left|\ln\frac{\gamma_h}{4^l}\right|+1\right)^{\beta}+\varepsilon_2(\tau) \tag{23}$$

$$= C\cdot\varepsilon_1\left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+l\ln 4+1)^{\beta}+\varepsilon_2(\tau). \tag{24}$$

Заметим, что если $\frac{\gamma_h}{2^l}$ относится к области возрастания функции $f(x) = x^{\alpha}(1-\ln x)^{\beta}$, то оценку (23) можно усилить до

$$\gamma_{\tau_l}^{\alpha}(|\ln\gamma_{\tau_l}|+1)^{\beta} \leqslant \left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}\left(\left|\ln\frac{\gamma_h}{2^l}\right|+1\right)^{\beta} = \left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+l\ln 2+1)^{\beta}. \tag{25}$$

Функция $f(x) = x^{\alpha}(1-\ln x)^{\beta}$ достигает своего максимума при $x = e^{1-\frac{\beta}{\alpha}}$, то есть неравенство (25) может быть применено при

$$l \geqslant \left\lceil\frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\ln 2}\right\rceil \;\Leftrightarrow\; l \geqslant l_0 = \max\left\{0,\,\left\lceil\frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\ln 2}\right\rceil\right\}.$$

Из (21), (22), (24) и (25) следует

$$\rho_{h,\tau}(F,\,G) \leqslant \sum_{l=0}^{r}\rho_{\tau_l,\tau_{l+1}}(F,\,G) \leqslant C\cdot\varepsilon_1\underbrace{\sum_{l=0}^{l_0-1}\left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+l\ln 4+1)^{\beta}}_{\Sigma_1}$$

$$+\,C\cdot\varepsilon_1\underbrace{\sum_{l=l_0}^{r}\left(\frac{\gamma_h}{2^l}\right)^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+l\ln 2+1)^{\beta}}_{\Sigma_2}+\varepsilon_2(\tau)\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\gamma_h}{\gamma_\tau}. \tag{26}$$

Осталось получить оценку вида $\Sigma_1+\Sigma_2 < c(\alpha,\beta)\gamma_h^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+1)^{\beta}$.

$$c(\alpha,\beta) = \sup_{\gamma_h,r}\frac{\Sigma_1+\Sigma_2}{\gamma_h^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+1)^{\beta}} = \sum_{l=0}^{l_0-1}2^{-l\alpha}(l\ln 4+1)^{\beta}+\sum_{l=l_0}^{\infty}2^{-l\alpha}(l\ln 2+1)^{\beta} \tag{27}$$

Выражение (27) верно, так как супремум достигается при $\gamma_h = 1$.

Из (27), (26) получим неравенство (16):

$$\rho_{h,\tau}(F,G) \leqslant C\cdot c(\alpha,\beta)\varepsilon_1\gamma_h^{\alpha}(|\ln\gamma_h|+1)^{\beta}+\varepsilon_2(\tau)\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\gamma_h}{\gamma_\tau}.$$

С помощью формул (10), (12) из последнего неравенства получим неравенство (17), а неравенство (18) – с помощью формул (10) и (13). $\square$

В заключение приведем пример для $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\beta = 2$. Такие значения возникают, например, при оценке близости n и $(n+1)$-кратных сверток одномерных симметричных вероятностных распределений с отделенной от -1 характеристической функцией вида $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{n}$ (см. [1, §6]).

Применив теорему 1 в случае $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\beta = 2$, получим $l_0 = 8$ и

$$c(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{7} 2^{\frac{-l}{3}} (l \ln 4 + 1)^2 + \sum_{l=8}^{\infty} 2^{\frac{-l}{3}} (l \ln 2 + 1)^2 \approx 180,67093894451472.$$

Список литературы

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 3–214.
2. А. Ю. Зайцев, *К многомерному обобщению метода треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 81–104.
3. Я. С. Голикова, *Вычисление констант в лемме о функциях w(x) и g(t) в методе гладких треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 135–146.

Golikova Ia. S. Calculation of constant values in pseudometric lemma at one-dimension method of smooth triangular functions.

In this paper, we consider the one-dimension method of smooth triangular functions. We obtain the dependence of the constant on the input parameters of the lemma, which allows us to reduce the problem of estimating $\rho_h(F, G)$ to the problem of estimating $\rho^{(J)}_{h,\tau}(F, G)$.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9
Балтийский государственный
технический университет
“ВОЕНМЕХ” им. Д. Ф. Устинова,
1-я Красноармейская, д.1
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: laviniaspb@gmail.com

Поступило 29 октября 2021 г.