Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

А. Н. Бородин

БРОУНОВСКОЕ ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается броуновское движение и его локальное время. Согласно описанию Рэя–Найта броуновское локальное время в некотором условном вероятностном пространстве является по пространственной переменной марковским процессом (см. [1, 2]). Этот процесс на определенных интервалах изменения пространственной переменной выражается через квадраты радиальных процессов Орнштейна–Уленбека (см., например, гл. V из [3]). У этих диффузий существует локальное время. Таким образом, мы приходим к определению локального времени от исходного броуновского локального времени. Такой процесс мы будем называть броуновским локальным временем второго порядка. Впервые этот процесс рассматривался нами в препринте [4].

§1. Броуновское локальное время – диффузионный процесс

Дадим описание Рэя–Найта для броуновского локального времени, приведенное в теореме 2.1 и замечании 2.1 гл. V из [3].

Пусть $W(t)$ – процесс броуновского движения, $W(0) = x$. Вероятностная мера и математическое ожидание по этому процессу, соответствующие начальной точке x, обозначаются $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$.

Броуновским локальным временем называется предел

$$\ell(t, y) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[y, y+\varepsilon)}(W(s))\, ds,$$

который существует с вероятностью единица для $(t, y) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$.

Рассмотрим не зависящий от броуновского движения W момент остановки τ, который имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Зная распределения процесса $\ell(\tau, y)$, $y \in \mathbf{R}$, или распределения функционалов от этого процесса, с помощью обратного

Ключевые слова: броуновское локальное время, локальное время второго порядка, распределение локального времени второго порядка.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 19-01-00356.

преобразования Лапласа по λ можно вычислить распределения процесса $\ell(t,y)$, $y\in\mathbf{R}$, для любого фиксированного t или распределения соответствующих функционалов.

Рассмотрим условное вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями $\mathbf{P}_x^z(B)=\mathbf{P}_x(B|W(\tau)=z)$, $B\in\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – глобальная σ-алгебра событий. Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексами z сверху и x снизу.

Теорема 1.1. *Процесс $\ell(\tau,y)$, $y\in\mathbf{R}$, в условном вероятностном пространстве при $z\geqslant x$ представим в виде*

$$\ell(\tau,y)=\begin{cases}V_1(y-z) & \text{при } z\leqslant y,\\ V_2(z-y) & \text{при } x\leqslant y\leqslant z,\\ V_3(x-y) & \text{при } y\leqslant x,\end{cases}$$

где

$$V_1(h)=e^{-2\sqrt{2\lambda}h}\Bigl(R^{(0)}\Bigl(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h}-1}{2\sqrt{2\lambda}}\Bigr)\Bigr)^2,$$

$$V_3(h)=e^{-2\sqrt{2\lambda}h}\Bigl(\widehat{R}^{(0)}\Bigl(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h}-1}{2\sqrt{2\lambda}}\Bigr)\Bigr)^2,$$

$$V_2(h)=e^{-2\sqrt{2\lambda}h}\Bigl(R^{(2)}\Bigl(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h}-1}{2\sqrt{2\lambda}}\Bigr)\Bigr)^2,$$

а $R^{(0)}(t)$, $\widehat{R}^{(0)}(t)$ и $R^{(2)}(t)$ – независимые бесселевские процессы размерностей 0, 0 *и* 2 *соответственно, начальным значениям которых придаются случайные значения с показательным распределением с плотностью*

$$\sqrt{2\lambda}\,e^{-v\sqrt{2\lambda}}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(v). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1. Для $z\leqslant x$ имеет место аналогичное описание в силу свойств пространственной однородности и обратимости времени броуновского моста.

Поскольку у радиальных процессов Орнштейна–Уленбека $V_l(h)$, $h\geqslant 0$, $l=1,2,3$, существует локальное время, то при любых фиксированных x и z в условном вероятностном пространстве с вероятностью единица существует предел

$$\zeta(\tau,u):=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\tau,y))\,dy,\qquad u>0. \tag{1.2}$$

Проинтегрировав по условию $W(\tau) = z$, $z \in \mathbf{R}$, получаем, что этот предел существует с вероятностью единица и в безусловном пространстве.

Так как τ отвечает преобразованию Лапласа с произвольным параметром $\lambda > 0$, то применяя обратное преобразование Лапласа, получаем, что при любом фиксированном $t > 0$ с вероятностью единица существует предел

$$\zeta(t,u) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(t,y))\, dy, \qquad u > 0. \tag{1.3}$$

Этот процесс будем называть броуновским локальным временем второго порядка. Для броуновского локального времени справедливо следующее свойство автомодельности: для любого фиксированного $c > 0$ конечномерные распределения процесса $\sqrt{c}\ell(t/c, x/\sqrt{c})$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $\ell(t,x)$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}$. Следовательно, справедливо следующее свойство автомодельности и для броуновского локального времени второго порядка: для любого фиксированного $c > 0$ конечномерные распределения процесса $\zeta(t/c, u/\sqrt{c})$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $\zeta(t,u)$, $(t,u) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$.

§2. Распределение функционала от броуновского локального времени второго порядка

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от броуновского локального времени и броуновского локального времени второго порядка. Нас интересует функционал от броуновского локального времени по пространственной переменной вида

$$B_\gamma(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(t,y))\, dy + \gamma\zeta(t,u), \tag{2.1}$$

где $f(v)$, $v \in [0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция, $f(0) = 0$. Можно рассмотреть и более общий функционал, добавив в (2.1) линейную комбинацию броуновских локальных времен второго порядка на разных уровнях $\sum\limits_{k=0}^{m} \gamma_k \zeta(t,u_k)$. Это не привносит принципиальных изменений ни в формулировки, ни в доказательства (см. [4])

Для преобразования Лапласа распределения такого функционала будут получены явные формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума (см. [3, § 2 гл. III]).

Теорема 2.1. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и $\gamma > 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_0\Big\{ \exp(-B_\gamma(\tau)); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\tau,y) \leqslant h\Big\} = 2\lambda \int\limits_0^h R(v)Q(v)\,dv, \tag{2.2}$$

где при $v \in [0,h]$ функции R и Q являются единственными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v) - (\lambda v + f(v))R(v) = 0, \qquad v \neq u, \tag{2.3}$$

$$2u(R'(u+0) - R'(u-0)) = \gamma R(u), \tag{2.4}$$

$$R(0) = 1, \qquad R(h) = 0, \tag{2.5}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + f(v))Q(v) = -R(v), \quad v \neq u, \tag{2.6}$$

$$2u(Q'(u+0) - Q'(u-0)) = \gamma Q(u), \tag{2.7}$$

$$Q(0+) < \infty, \quad Q(h) = 0. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. В случае $h = \infty$ граничные условия (2.5) и (2.8) должны быть заменены следующими:

$$\limsup_{v\to\infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} R(v) < \infty, \qquad \limsup_{v\to\infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} Q(v) < \infty.$$

Замечание 2.2. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.3), (2.6) надо понимать следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функций f, а в точках разрыва функций f их решения непрерывны вместе с первыми производными.

Доказательство. При $\gamma = 0$ теорема 2.1 превращается в теорему 5.1 гл. V из [3]. Мы используем эту теорему и тот подход, который применялся для ее доказательства в [3]. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, из определения броуновского локального времени второго порядка и из теоремы 5.1 гл. V из [3] выводим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\tau,y))\,dy-\gamma\zeta(\tau,u)\Big);\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell(\tau,y)\leqslant h\Big\}\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f(\ell(\tau,y))+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\tau,y))\Big)\,dy\Big) \qquad (2.9)\\
&\quad\times\mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell(\tau,y)\Big)\Big\}=2\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lambda\int\limits_0^h R_\varepsilon(v)Q_\varepsilon(v)\,dv,
\end{aligned}$$

где R_ε, Q_ε являются решениями задачи

$$2vR''_\varepsilon(v)-\Big(\lambda v+f(v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\Big)R_\varepsilon(v)=0, \qquad (2.10)$$

$$R_\varepsilon(0)=1,\qquad R_\varepsilon(h)=0, \qquad (2.11)$$

$$2vQ''_\varepsilon(v)+2Q'_\varepsilon(v)-\Big(\lambda v+f(v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\Big)Q_\varepsilon(v)=-R_\varepsilon(v), \qquad (2.12)$$

$$Q_\varepsilon(0+)<\infty,\qquad Q_\varepsilon(h)=0. \qquad (2.13)$$

В ходе первой части доказательства теоремы 5.1 гл. V из [3] было фактически получено, что

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon(v)=e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\,\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{\infty}\Big(f+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}\Big)(\ell(\tau,y))\,dy\Big)\\
\times\mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)}\ell(\tau,y)\Big)\Big|\ell(\tau,z)=v\Big\},
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
Q_\varepsilon(v)=e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\int\limits_0^{\infty}e^{-z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{z}\Big(f(\ell(\tau,y))\\
+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\tau,y))\,dy\Big)\mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(-\infty,z)}\ell(\tau,y)\Big)\Big|\ell(\tau,z)=v\Big\}dz.
\end{aligned} \qquad (2.15)$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла справедливы соотношения

$$R_\varepsilon(v)\to R(v),\qquad Q_\varepsilon(v)\to Q(v), \qquad (2.16)$$

где

$$R(v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^\infty f(\ell(\tau,y))\,dy - \gamma\zeta(\tau,u)\Big)$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)}\ell(\tau,y)\Big)\Big|\ell(\tau,z)=v\Big\},$$
$$Q(v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\int\limits_0^\infty e^{-z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^z f(\ell(\tau,y))\,dy - \gamma\zeta(\tau,u)\Big)$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(-\infty,z)}\ell(\tau,y)\Big)\Big|\ell(\tau,z)=v\Big\}dz.$$

Предельный переход в уравнениях (2.10)–(2.13) осуществляется точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1 гл. III из [3]. Важное значение при этом имеют соотношения (2.16). Это завершает доказательство теоремы 2.1. □

§3. Распределение броуновского локального времени второго порядка

Применим теорему 2.1 при $f\equiv 0$ для вычисления распределения броуновского локального времени второго порядка. Пусть $I_l(x)$ и $K_l(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка l (см., например, приложение 2 из [3]).

Теорема 3.1. *При* $\gamma>0$

$$\mathbf{E}_0 e^{-\gamma\zeta(\tau,u)} = 1 - \frac{8\gamma u^2\lambda e^{-u\sqrt{2\lambda}}}{(2u\sqrt{2\lambda}+\gamma(1-e^{-u\sqrt{2\lambda}}))^2(2+\gamma I_0(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2}))}$$
$$\times\Big[4+\gamma\Big(2I_1(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2})+I_1(u\sqrt{\lambda/2})K_1(u\sqrt{\lambda/2}) \tag{3.1}$$
$$+I_0(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2})\Big)+\frac{\gamma^2}{u\sqrt{2\lambda}}I_1(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2})\Big].$$

Доказательство. Поскольку для броуновского локального времени второго порядка справедливо свойство автомодельности (см. конец §1), то для упрощения формул положим $\lambda=2$. Найдем ограниченное решение задачи (2.3)–(2.5) при этих предположениях. Имеем следующую задачу

$$R''(x) - R(x) = 0, \qquad x \neq u, \quad R(0) = 1, \quad R(\infty) < \infty, \tag{3.2}$$

$$2u(R'(u+0) - R'(u-0)) = \gamma R(u). \tag{3.3}$$

Решение ищем в виде

$$R(x) = \begin{cases} A \operatorname{sh} x + e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant u, \\ Be^{-x}, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Из условия непрерывности и условия на скачок производной вычисляем A и B. В итоге имеем

$$R(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\gamma e^{-2u}}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} \operatorname{sh} x + e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant u, \\ \dfrac{4u}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} e^{-x}, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Найдем ограниченное решение задачи (2.6)–(2.8) при сделанных предположениях. Эта задача превращается в следующую:

$$Q''(x) + \frac{1}{x} Q'(x) - Q(x) = -\frac{1}{2x} R(x), \qquad x \neq u, \tag{3.4}$$

$$2u(Q'(u+0) - Q'(u-0)) = \gamma Q(u), \tag{3.5}$$

$$Q(+0) < \infty, \qquad \limsup_{v \to \infty} e^v Q(v) < \infty. \tag{3.6}$$

Частное решение уравнения (3.4) имеет вид

$$Q_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma e^{-2u}}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} \operatorname{ch} x + \dfrac{1}{2} e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant u, \\ \dfrac{2u}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} e^{-x}, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Это так, поскольку $Q_0'' = Q_0$ и $Q_0'(x) = -\dfrac{1}{2} R(x)$.

Однородное уравнение

$$Y''(x) + \frac{1}{x} Y'(x) - Y(x) = 0, \qquad x > 0,$$

имеет возрастающее $I_0(x)$ и убывающее $K_0(x)$ линейно независимые решения, $K_0(x) \sim -\ln(x/2)$ при $x \to 0$. Решение задачи (3.4)–(3.6) ищем в виде

$$Q(x) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma e^{-u} A I_0(x)}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} + \dfrac{\gamma e^{-2u} \operatorname{ch} x}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} + \dfrac{e^{-x}}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant u, \\ \dfrac{2u e^{-u} B K_0(x)}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})} + \dfrac{2u e^{-x}}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})}, & u \leqslant x. \end{cases}$$

Из условия непрерывности решения в точке u следует уравнение

$$\gamma I_0(u)A + 2uK_0(u)B = \gamma.$$

Из условия на скачок производной следует уравнение

$$\gamma I_1(u)A - (2uK_1(u) + \gamma K_0(u))B = \gamma.$$

Решение этой алгебраической системы уравнений имеет вид

$$A = \frac{2u(K_0(u) + K_1(u)) + \gamma K_0(u)}{2 + \gamma K_0(u)I_0(u)},$$

$$B = \frac{\gamma(I_1(u) - I_0(u))}{2 + \gamma K_0(u)I_0(u)}.$$

В итоге имеем

$$Q(x) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma e^{-u}}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})}\Big[\dfrac{2u(K_0(u) + K_1(u)) + \gamma K_0(u)}{2 + \gamma K_0(u)I_0(u)} I_0(x) - e^{-u}\operatorname{ch} x\Big] & \\ \qquad + \dfrac{1}{2}e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant u, \\ \dfrac{2u}{4u + \gamma(1 - e^{-2u})}\Big[\dfrac{\gamma e^{-u}(I_1(u) - I_0(u))}{2 + \gamma K_0(u)I_0(u)} K_0(x) + e^{-x}\Big], & u \leqslant x. \end{cases}$$

Нам понадобится следующий результат из гл. V § 5 из [3].

Лемма 3.1. *Пусть* $X(x)$, $Y(x)$, $x > 0$, *– решения уравнений*

$$xX'' - (\sigma + \theta x)X = F(x), \tag{3.7}$$

$$xY'' + Y' - (\delta + \theta x)Y = G(x). \tag{3.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\theta - (\delta - \sigma)^2)\int XY dx &= (\sigma + \theta x)XY + (\delta - \sigma)x(X'Y - XY') \\ &- xX'Y' + (\delta - \sigma)\Big(\int XG dx - \int YF dx\Big) \\ &+ \int X'G dx + \int Y'F dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Формула (3.9) может быть легко проверена дифференцированием.

Вычислим правую часть формулы (2.2). При $f \equiv 0$ и $h = \infty$ имеем

$$\int_0^\infty R(x)Q(x)\,dx = \int_0^u R(x)Q(x)\,dx + \int_u^\infty R(x)Q(x)\,dx.$$

Применим Лемму 3.1 при $\sigma = 0$, $\delta = 0$, $\theta = 1$, $F(x) \equiv 0$, $G(x) = -\frac{1}{2}R(x)$. Тогда

$$\int_0^u R(x)Q(x)\,dx = xR(x)Q(x)\Big|_0^u - xR'(x)Q'(x)\Big|_0^u + \int_0^u R'(x)G(x)\,dx$$
$$= uR(u)Q(u) - uR'(u-0)Q'(u-0) - \frac{1}{4}R^2(u) + \frac{1}{4},$$

и

$$\int_u^\infty R(x)Q(x)\,dx = xR(x)Q(x)\Big|_u^\infty - xR'(x)Q'(x)\Big|_u^\infty + \int_u^\infty R'(x)G(x)\,dx$$
$$= -uR(u)Q(u) + uR'(u+0)Q'(u+0) + \frac{1}{4}R^2(u).$$

В итоге имеем

$$\int_0^\infty R(x)Q(x)\,dx = \frac{1}{4} + u\big(R'(u+0)Q'(u+0) - R'(u-0)Q'(u-0)\big).$$

Так как

$$R'(u+0) = R'(u-0) + \frac{\gamma}{2u}R(u), \qquad Q'(u+0) = Q'(u-0) + \frac{\gamma}{2u}Q(u),$$

то

$$4\int_0^\infty R(x)Q(x)\,dx = 1 + 2\gamma R(u)Q'(u+0) + 2\gamma R'(u+0)Q(u) - \frac{\gamma^2}{u}R(u)Q(u).$$

Из выражений для функций R и Q следует, что

$$R(u) = \frac{4ue^{-u}}{4u + \gamma(1-e^{-2u})}, \qquad R'(u+0) = -\frac{4ue^{-u}}{4u + \gamma(1-e^{-2u})},$$
$$Q(u) = \frac{2ue^{-u}(2 + \gamma K_0(u)I_1(u))}{(4u + \gamma(1-e^{-2u}))(2 + \gamma K_0(u)I_0(u))},$$
$$Q'(u+0) = -\frac{2ue^{-u}(2 + \gamma(K_1(u)I_1(u) + K_0(u)I_0(u) - K_1(u)I_0(u))}{(4u + \gamma(1-e^{-2u}))(2 + \gamma K_0(u)I_0(u))}.$$

В итоге имеем

$$\mathbf{E}_0 e^{-\gamma\zeta(\tau,u)} = 1 + 2\gamma R(u)Q'(u+0) + 2\gamma R'(u+0)Q(u) - \frac{\gamma^2}{u}R(u)Q(u) = 1$$
$$-\frac{16\gamma u^2 e^{-2u}\Big(4 + \gamma[2I_1(u)K_0(u) + I_1(u)K_1(u) + I_0(u)K_0(u)] + \dfrac{\gamma^2}{2u}I_1(u)K_0(u)\Big)}{(4u + \gamma(1-e^{-2u}))^2(2 + \gamma I_0(u)K_0(u))}.$$

Это доказывает формулу (3.1) при $\lambda = 2$. Для произвольного $\lambda > 0$ утверждение теоремы следует из свойства автомодельности, благодаря которому распределение величины $\zeta(\tau, u)$ совпадает с распределением величины $\zeta(\tau_2, u\sqrt{\lambda/2})$, где τ_2 – экспоненциально распределенный момент остановки с параметром $\lambda = 2$ не зависящий от броуновского движения W. $\square$

§4. Следствия из формулы (3.1)

Локальное время диффузии на любом уровне, который она достигает, сразу накапливает положительное значение. Используя это свойство, из (3.1) получаем, что при $u > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\tau, y) < u\Big) &= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}_0 e^{-\gamma\zeta(\tau,u)} \\ &= 1 - \frac{4u\sqrt{2\lambda}\, e^{u\sqrt{2\lambda}} I_1(u\sqrt{\lambda/2})}{(e^{u\sqrt{2\lambda}} - 1)^2 I_0(u\sqrt{\lambda/2})}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Эта формула совпадает с формулой (5.21) гл. V из [3], полученной другим путем.

Положим при фиксированном u

$$\varphi(\gamma) := \mathbf{E}_0 e^{-\gamma\zeta(\tau,u)}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}_0\zeta(\tau, u) = -\varphi'(\gamma)\Big|_{\gamma=0}.$$

Разлагая формулу (3.1) в ряд по γ, получаем

$$1 - \gamma\mathbf{E}_0\zeta(\tau, u) + \gamma^2 \cdots = 1 - \gamma 2 e^{-u\sqrt{2\lambda}} + \gamma^2 \ldots.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}_0\zeta(\tau, u) = 2e^{-u\sqrt{2\lambda}}.$$

Эту формулу можно получить и прямым вычислением. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0\zeta(\tau, u) &= \mathbf{E}_0 \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\tau, y))\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}_0(\ell(\tau, y) \in [u, u+\varepsilon)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du}\mathbf{P}_0(\ell(\tau, y) < u)\, dy. \end{aligned}$$

Применяя формулу 1.1.3.2 из [5] для плотности распределения броуновского локального времени, получаем

$$\mathbf{E}_0\zeta(\tau,u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\lambda}\,e^{(u+|y|)\sqrt{2\lambda}}\,dy=2e^{-u\sqrt{2\lambda}}.$$

Вычислим второй момент величины $\zeta(\tau,u)$. Положим для простоты вычислений $\lambda=2$, т.е. используем формулу, полученную в конце §3. Имеем

$$\mathbf{E}_0e^{-\gamma\zeta(\tau,u)}=1-\frac{\gamma}{2}e^{-2u}\Big(4+\gamma[2I_1(u)K_0(u)+I_1(u)K_1(u)+I_0(u)K_0(u)]$$
$$+\frac{\gamma^2}{2u}I_1(u)K_0(u)\Big)\Big(1+\frac{\gamma}{4u}(1-e^{-2u})\Big)^{-2}\Big(1+\frac{\gamma}{2}I_0(u)K_0(u)\Big)^{-1}.$$

Разлагая эту формулу в ряд по γ до второго порядка включительно, получаем

$$\mathbf{E}_0e^{-\gamma\zeta(\tau,u)}=1-\frac{1}{2}e^{-2u}\big(4\gamma+\gamma^2(2I_1(u)K_0(u)+I_1(u)K_1(u)$$
$$+I_0(u)K_0(u))+\dots\Big)\Big(1-\frac{\gamma}{2u}(1-e^{-2u})+\dots\Big)\Big(1-\frac{\gamma}{2}I_0(u)K_0(u)+\dots\Big),$$

или

$$1-\gamma\mathbf{E}_0\,\zeta(\tau,u)+\frac{\gamma^2}{2}\mathbf{E}_0\,\zeta^2(\tau,u)-\dots$$
$$=1-\gamma 2e^{-u\sqrt{2\lambda}}+\frac{\gamma^2}{2}e^{-2u}\Big(-2I_1(u)K_0(u)$$
$$-I_1(u)K_1(u)-I_0(u)K_0(u)+\frac{2}{u}(1-e^{-2u})+2I_0(u)K_0(u)\Big)-\dots.$$

Следовательно, возвращаясь к произвольному положительному λ, получаем

$$\mathbf{E}_0\,\zeta^2(\tau,u)=e^{-2u\sqrt{2\lambda}}\Big(\frac{4}{u\sqrt{2\lambda}}(1-e^{-u\sqrt{2\lambda}})+I_0(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2})$$
$$-2I_1(u\sqrt{\lambda/2})K_0(u\sqrt{\lambda/2})-I_1(u\sqrt{\lambda/2})K_1(u\sqrt{\lambda/2})\Big).\qquad(4.2)$$

При любом фиксированном $u>0$ при $\lambda\downarrow 0$ имеем

$$\mathbf{E}_0\,\zeta^2(\tau,u)\sim-\ln\sqrt{\lambda}=\ln\sqrt{\lambda^{-1}}.$$

Поскольку

$$\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathbf{E}_0\,\zeta^2(t,u)\,dt=\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda t}d_t\mathbf{E}_0\,\zeta^2(t,u),$$

то, применяя тауберову теорему (теорема 2 гл. XIII § 5 из [6]), получаем

$$\mathbf{E}_0\,\zeta^2(t,u) \sim \ln\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{4.3}$$

Список литературы

1. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc., **109** (1963), 56–86.
2. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math., **7** (1963) 615–630.
3. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Лань, Санкт-Петербург (2017).
4. A. N. Borodin, *On the distribution of functionals of Brownian local time.*— LOMI Preprints E – 4 – 85, Leningrad (1985).
5. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.
6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* **2**, Мир, Москва, 1967.

Borodin A. N. Brownian local time of the second order

According to the Ray–Knight description the Brownian local time with respect to the spatial variable is a diffusion process in a certain conditional probability space. This diffusion has a local time. Thus, we come to the definition of local time from the initial Brownian local time. We will call such a process the Brownian local time of the second order. The paper studies the Laplace transform of the distribution of the Brownian local time of the second order.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2021 г.