Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ, ЭЛАСТИЧНО УБИВАЕМОГО В НУЛЕ

Рассматривается броуновское движение с линейным сносом на положительной полупрямой, эластично убиваемое в нуле. Краткая характеристика этого процесса дана в §19 приложения 1 из [1].

Нас интересуют результат, позволяющий вычислять распределения интегральных функционалов по пространственной переменной от локального времени такого процесса. Эта работа продолжает исследования, начатые в статьях [2] и [3] для скошенного броуновского движения и броуновского движения с разрывным сносом. Для броуновского локального времени такой результат подробно изложен в §5 гл. V из [4]. Отправной точкой для данных исследований служит описание Рэя–Найта для броуновского локального времени по пространственной переменной как марковского процесса (см. [5, 6]).

1. Броуновское движение с линейным сносом на положительной полупрямой, эластично убиваемое в нуле

Обозначим этот процесс $W_\mu^\circ(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $W_\mu^\circ(0) = x$. Обозначим $W_+(t) = |W(t)|$ процесс отраженного броуновского движения, где $W(t)$ – процесс броуновского движения.

Далее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное состояние процесса.

Согласно определению процесс W_μ° является однородным марковским процессом на $[0, \infty)$, для которого преобразование Лапласа по времени от переходной плотности процесса, т.е. функция

$$G_z(x) := \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x(W_\mu^\circ(t) < z)\, dt, \qquad x \in [0, \infty), \quad \lambda > 0,$$

Ключевые слова: отраженное броуновское движение с линейным сносом, локальное время, распределение супремума локального времени.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 19-01-00356.

при каждом $z > 0$ и $\gamma > 0$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) + \mu G'(x) - \lambda G(x) = 0, \ x \in (0,\infty) \setminus \{z\}, \tag{1.1}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda, \tag{1.2}$$

$$G'(0+) = \gamma G(0). \tag{1.3}$$

Пусть τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени, не зависящий от процесса $W^\circ_\mu(t)$, $t \geqslant 0$, и от отраженного броуновского движения W_+. Этот момент удобно использовать для преобразования Лапласа по времени. Так, например,

$$G_z(x) = \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W^\circ_\mu(\tau) < z).$$

Найдем явное решение задачи (1.1)–(1.3). Решение ищем в виде

$$G_z(x) = e^{\mu(z-x)}\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big\{e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}} + Ae^{-(z+x)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big\}, \qquad x \geqslant 0. \tag{1.4}$$

В этом представлении мы учли, что функции $e^{-\mu x \pm x\sqrt{2\lambda+\mu^2}}$ являются решениями однородного уравнения (1.1) на всей прямой, результирующее решение (1.4) является ограниченным и удовлетворяет условию на скачок производной (1.2). Константу A нужно вычислить из условия (1.3). Имеем

$$A = 1 - \frac{2(\mu+\gamma)}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}+\mu+\gamma}.$$

Таким образом, для преобразования Лапласа переходной плотности выводим формулу

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W^\circ_\mu(\tau) < z) = e^{\mu(z-x)}\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big\{e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}} + \Big(1 - \frac{2(\mu+\gamma)}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}+\gamma+\mu}\Big)e^{-(z+x)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big\}, \qquad x \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Это выражение совпадает с выражением для функции Грина $G_\lambda(x,z)$, вычисленной относительно меры скорости $m(dz) = 2e^{2\mu z}dz$ в §19 приложения 1 из [1].

Имеет место абсолютная непрерывность мер:

$$\frac{d\mathbf{P}^\circ_x}{d\mathbf{P}^+_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\mu(W_+(t)-x) - \frac{\mu+\gamma}{2}\,\ell_+(t,0) - \frac{1}{2}\mu^2 t\Big) \quad \mathbf{P}_x\text{-п.н.}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{P}_x^\circ$ and $\mathbf{P}_x^+$ – меры относительно броуновского движения на положительной полупрямой с линейным сносом, эластично убиваемое в нуле и отраженного броуновского движения соответственно, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная броуновским движением до момента t и $\ell_+(t,0)$ – локальное время отраженного броуновского движения относительно меры Лебега, т.е.

$$\ell_+(t,0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[0,\varepsilon)}(W_+(s))ds.$$

При $\gamma = 0$ процесс W_μ° превращается в броуновское движение на $[0,\infty)$ с линейным сносом μ отраженное в нуле. Краткая характеристика этого процесса дана в §16 приложения 1 из [1]. В этом случае (1.6) превращается в результат работы Г. Н. Кинкладзе [7].

Поскольку броуновское движение с линейным сносом, эластично убиваемое в нуле и отраженное броуновское движение являются однородными марковскими процессами, то для установления абсолютной непрерывности мер (1.6) достаточно доказать для преобразований Лапласа по времени от переходных плотностей следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\mu^\circ(\tau) < z)$$
$$= e^{\mu(z-x)}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\frac{\mu+\gamma}{2}\ell_+(\tau,0) - \frac{\mu^2\tau}{2}\Big); W_+(\tau) < z\Big\}. \qquad (1.7)$$

Здесь и далее, для того чтобы упростить формулы, мы используем обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{1}_A\}$.

Доказательство аналогичного утверждения можно найти в статье [8].

Проверим (1.7). Согласно формуле 3.1.3.5 из [1] при $r = 0$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\frac{\mu+\gamma}{2}\ell_+(\tau,0)\Big); W_+(\tau) < z\Big\}$$
$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\Big\{e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda}} + \Big(1 - \frac{2(\mu+\gamma)}{\sqrt{2\lambda}+\mu+\gamma}\Big)e^{-(z+x)\sqrt{2\lambda}}\Big\}. \qquad (1.8)$$

Добавление в экспоненту левой части слагаемого $-\frac{\mu^2\tau}{2}$ приводит к трансформации преобразования Лапласа по времени, что влечет замену в (1.8) $\sqrt{2\lambda}$ на $\sqrt{2\lambda+\mu^2}$ и множителя $\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}$ на множитель $\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}$. Формула (1.8) после такой трансформации совместно с (1.5) доказывает (1.7), а, следовательно, и (1.6).

В силу абсолютной непрерывности мер у процесса $W_\mu^\circ(s)$, $s \geqslant 0$, с вероятностью единица существует локальное время

$$\ell_\mu^\circ(t,y) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{[y,y+\varepsilon)}(W_\mu^\circ(s))ds, \quad y \in [0,\infty), \tag{1.9}$$

так как оно существует у отраженного броуновского движения.

Из формулы (1.6) следует, что для любого ограниченного измеримого функционала $\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x \wp\bigl(W_\mu^\circ(s), 0 \leqslant s \leqslant t\bigr) \\ &= \mathbf{E}_x \Big\{ \wp(W_+(s), 0 \leqslant s \leqslant t) \\ &\quad \times \exp\Big(\mu(W_+(t) - x) - \frac{\gamma+\mu}{2}\ell_+(t,0) - \frac{\mu^2 t}{2}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Преобразование Лапласа по t в этом равенстве приводит к тому, что оно выполняется при τ вместо t, и, следовательно, справедлива формула

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x\bigl\{\wp\bigl(W_\mu^\circ(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau\bigr); W_\mu^\circ(\tau) \in dz\bigr\} \\ &= e^{\mu(z-x)} \mathbf{E}_x \Big\{ \wp(W_+(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau) \\ &\qquad \times \exp\Big(\frac{\gamma+\mu}{2}\ell_+(\tau,0) - \frac{\mu^2\tau}{2}\Big); W_+(\tau) \in dz \Big\} \\ &= \frac{2\lambda e^{\mu(z-x)}}{2\lambda+\mu^2} \mathbf{E}_x \Big\{ \wp(W_+(s), 0 \leqslant s \leqslant \widetilde{\tau}) \\ &\qquad \times \exp\Big(\frac{\gamma+\mu}{2}\ell_+(\widetilde{\tau},0)\Big); W_+(\widetilde{\tau}) \in dz \Big\}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Мы использовали замену времени в преобразовании Лапласа. Здесь и далее $\widetilde{\tau}$ показательно распределенная с параметром $\lambda + \dfrac{\mu^2}{2}$ величина, не зависящая от других процессов.

Мы сконцентрируем внимание на интегральных функционалах по пространственной переменной от локального времени.

2. Распределения функционалов от локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от локального времени. Интегральный функционал от локального времени $\ell^\circ_\mu(t,y)$ по пространственной переменной имеет вид

$$B^\circ_\mu(t) := \int\limits_0^\infty f(\ell^\circ_\mu(t,y))\,dy, \tag{2.1}$$

где $f(v)$, $v\in[0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция. Для преобразования Лапласа распределения такого функционала будут получены явные формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума. Так, например, для вычисления супремума произвольного непрерывного процесса $X(y)$ можно воспользоваться соотношением (см. [4, §2, гл. III])

$$\mathbf{P}_x\Bigl(\sup_{0\leqslant y\leqslant b} X(y)\leqslant h\Bigr) = \lim_{\gamma\to\infty}\mathbf{E}_x\exp\Bigl(-\gamma\int\limits_0^b \mathbb{1}_{(h,\infty)}(X(y))\,dy\Bigr). \tag{2.2}$$

Во многих случаях, когда величина

$$\mathbf{E}_x\exp\Bigl(-\gamma\int\limits_0^b \mathbb{1}_{[h,\infty)}(X(y))\,dy\Bigr) \tag{2.3}$$

выражается с помощью решений некоторых дифференциальных уравнений, можно не вычислять математическое ожидание явно и не находить затем предел, а доказать, что предельное значение для этого математического ожидания также выражается с помощью решений уравнений с некоторыми граничными условиями. Такой подход значительно упрощает вычисления. Он нами уже использовался при доказательстве теоремы 2.1 гл. III из [4] и теоремы 4.2 гл. IV из [4], а также в работах [2] и [3]. В этом параграфе будут получены результаты, которые позволяют вычислять совместные распределения функционала $B^\circ_\mu(\tau)$ и величины $\sup\limits_{y\in[0,\infty)}\ell^\circ_\mu(\tau,y)$.

Вычисление распределений этих функционалов в фиксированный момент времени t сводится к вычислению обратных преобразований Лапласа по λ от распределений этих же функционалов, остановленных в случайный момент времени τ.

Теорема 2.1. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0)=0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_0\Big[\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell^\circ_\mu(\tau,y))\,dy\Big);\ \sup_{y\in[0,\infty)}\ell_\mu(\tau,y)\leqslant h\Big]$$
$$=\lambda\int\limits_0^h e^{-(\mu+\gamma)v/2}Q(v)\,dv, \tag{2.4}$$

где функция $Q(v)$, $v\in[0,h]$, является ограниченным непрерывным решением задачи

$$2vQ''(v)+2Q'(v)-\Big(\big(\lambda+\frac{\mu^2}{2}\big)v-\mu+f(v)\Big)Q(v)=-R(v), \tag{2.5}$$
$$Q(h)=0, \tag{2.6}$$

а функция $R(v)$, $v\in[0,h]$, является ограниченным непрерывным решением задачи

$$2vR''(v)-\Big(\big(\lambda+\frac{\mu^2}{2}\big)v+f(v)\Big)R(v)=0, \tag{2.7}$$
$$R(0)=1, \qquad R(h)=0. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.5), (2.7) должны пониматься следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функции f, а в точках разрыва функции f их решения непрерывны вместе с первой производной.

Доказательство теоремы 2.1. Предположим сначала, что $h=\infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Поскольку в нижеприведенных вычислениях все подынтегральные функции положительны, а левая часть равенств является ограниченной величиной, то все интегралы сходятся.

Используя (1.11), найдем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_\mu^\circ(\tau,y))\,dy\Big) = \int_0^\infty \mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_\mu^\circ(\tau,y))\,dy\Big); W_\mu^\circ(\tau)\in dz\Big\}$$

$$= \frac{2\lambda}{2\lambda+\mu^2}\int_0^\infty e^{\mu z}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\widetilde{\tau},y))\,dy - \frac{\mu+\gamma}{2}\ell_+(\widetilde{\tau},0)\Big); W_+(\widetilde{\tau})\in dz\Big\}$$

$$= \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\int_0^\infty e^{(\mu-\sqrt{2\lambda+\mu^2})z}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\widetilde{\tau},y))\,dy$$

$$-\frac{\mu+\gamma}{2}\ell_+(\widetilde{\tau},0)\Big)\Big| W_+(\widetilde{\tau})=z\Big\}dz = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\int_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda+\mu^2})}I(z)\,dz, \tag{2.9}$$

где

$$I(z) := \mathbf{E}_0^z \exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\widetilde{\tau},y))\,dy - \frac{\mu+\gamma}{2}\ell_+(\widetilde{\tau},0)\Big).$$

В этом определении мы использовали новое вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями

$$\mathbf{P}_0^z(B) = \mathbf{P}_0(B|W_+(\widetilde{\tau}) = z).$$

Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексами z сверху и 0 снизу.

Используя выражение для плотности распределения локального времени отраженного броуновского движения в новом вероятностном пространстве (формула 3.1.3.6 из [1] при $x = 0$, $r = 0$), имеем

$$I(z) = \frac{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}{2}\int_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2}e^{-(\mu+\gamma)v/2}$$

$$\times\, \mathbf{E}_0^z \exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\widetilde{\tau},y))\,dy\Big)\Big|\ell_+(\widetilde{\tau},0) = v\Big\}\,dv.$$

Воспользуемся описанием локального времени $\ell_+(\widetilde{\tau},y)$, $y \geqslant 0$, как марковского процесса в вероятностном пространстве с мерой $\mathbf{P}_0^z$. Такое описание следует, например, из статьи [2] при $\beta = 1$. Наши обозначения согласуются с обозначениями статьи [2] следующим образом: $\ell_+(\widetilde{\tau}, y) = \ell_1(\widetilde{\tau}, y)$ при $y > 0$ и $\ell_+(\widetilde{\tau}, 0) = \ell_1(\widetilde{\tau}, 0+) = 2\ell_1(\widetilde{\tau}, 0)$.

В результате имеем, что в вероятностном пространстве с мерой $\mathbf{P}_0^z$ справедливо следующее описание:

$$\ell_+(\widetilde{\tau}, y) = \begin{cases} V_1(y-z), & \text{при} \quad y \geqslant z, \\ V_2(y), & \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant z, \end{cases}$$

где $V_k(h)$, $h \geqslant 0$, $k = 1, 2$, – неотрицательные однородные диффузионные процессы, независимые при фиксированных начальных значениях. У них совпадают начальные значения $V_1(0) = V_2(z)$ и

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}(V_2(0) < v) = \frac{\sqrt{2\lambda + \mu^2}}{2}\, e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2}, \qquad v > 0,$$

а производящие операторы имеют вид

$$\mathbf{L}_1 = 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda + \mu^2}\,\frac{d}{dv}\Big), \quad \mathbf{L}_2 = 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda + \mu^2}\,\frac{d}{dv}\Big) + 2\frac{d}{dv}$$

соответственно.

Применяя марковское свойство локального времени в новом вероятностном пространстве, получаем

$$I(z) = \frac{\sqrt{2\lambda + \mu^2}}{2}\int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2}\, e^{-(\mu+\gamma)v/2}\bar{q}(z, v)dv, \tag{2.10}$$

где

$$\bar{q}(z, v) := \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(V_1(h)\,dh - \int\limits_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0) = v\Big\}dv$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(V_1(h)\,dh - \int\limits_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(z) = g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z) \in dg\big),$$

а нижний индекс v означает, что математическое ожидание и вероятность вычисляются от процесса V_2 с начальным значением $V_2(0) = v$.

Из (2.9) и (2.10) следует, что

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell^\circ_\mu(\tau,y))\,dy\Big) = \lambda \int_0^\infty dv\, e^{-(\mu+\gamma)v/2} e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2} \times \int_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda+\mu^2})}\bar{q}(v,z)\,dz. \qquad (2.11)$$

Продолжим вычисление функции $\bar{q}(v,z)$. Используя независимость процессов V_1 и V_2 при фиксированных начальных значениях и условие $V_1(0) = V_2(z)$, получаем

$$\bar{q}(z,v) = \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(0)=g\Big\} \times \mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(z)=g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z)\in dg\big),$$

$$= \int_0^\infty \bar{R}(g)\mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big); V_2(z)\in dg\Big\}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{\bar{R}(V_2(z))\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}.$$

Здесь

$$\bar{R}(g) := \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(0)=g\Big\}.$$

Используя выражение для производящего оператора процесса V_1 и применяя теорему 12.5 гл. II из [4], получаем, что функция $\bar{R}(v)$, $v \in (0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2v\big(\bar{R}''(v) - \sqrt{2\lambda+\mu^2}\,\bar{R}'(v)\big) - f(v)\bar{R}(v) = 0. \qquad (2.12)$$

Согласно предложению 2.1 гл. V из [4] процесс $V_1(h)$, $h \geqslant 0$, выражается через квадрат 0-мерного бесселевского процесса. Известно, что 0-мерный бесселевский процесс, попадая в ноль или изначально находясь в нуле, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю.

В силу описания процесса V_1, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $f(0) = 0$, следует, что $\bar{R}(0) = 1$.

Применим теорему 13.2 гл. II из [4]. Тогда получим, что функция $\bar{q}(z,v)$, $(z,v) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, является решением задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\bar{q}(z,v) &= 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar{q}(z,v) - \sqrt{2\lambda+\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial v}\bar{q}(z,v)\Big)\\ &\qquad + 2\frac{\partial}{\partial v}\bar{q}(z,v) - f(v)\bar{q}(z,v), \qquad (2.13)\\ \bar{q}(0,v) &= \bar{R}(v). \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Особенность применения теорем 12.5 и 13.2 гл. II из [4] состоит в том, что процессы V_1 и V_2 принимают неотрицательные значения и их коэффициент диффузии $\sigma^2(v) = v$ вырождается в нуле.

Замена $q(z,v) = e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2}\bar{q}(z,v)$ приводит к задаче

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}q(z,v) &= 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v)\\ &\qquad - \Big(\Big(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\Big)v - \sqrt{2\lambda+\mu^2} + f(v)\Big)q(z,v), \qquad (2.15)\\ q(0,v) &= R(v), \qquad (2.16)\end{aligned}$$

где замена $R(v) := e^{-v\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2}\bar{R}(v)$ приводит к задаче

$$2vR''(v) - \big(\big(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\big)v + f(v)\big)R(v) = 0, \quad R(0) = 1. \qquad (2.17)$$

Положим

$$Q(v) := \int_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda+\mu^2})}q(z,v)\,dz.$$

Тогда из (2.15), (2.16) следует, что функция $Q(v)$ удовлетворяет уравнению (2.5) при $h \in (0,\infty)$. Теперь из (2.11) имеем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_\mu^\circ(\tau,y))\,dy\Big) = \lambda\int_0^\infty e^{-(\mu+\gamma)v/2}Q(v)\,dv.$$

Это совпадает с (2.4) для случая, когда $h = \infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными.

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [4], результат для кусочно непрерывных функций f доказывается с помощью аппроксимации f непрерывно дифференцируемыми функциями. Доказательство теоремы 2.1 для $h < \infty$ основано на очевидном обобщении соотношения (2.2):

$$E_\gamma := \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_\mu^\circ(\widetilde{\tau}, y))\,dy\Big);\ \sup_{y\in[0,\infty)} \ell_\mu^\circ(\widetilde{\tau}, y) \leqslant h\Big]$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^\infty (f(\ell_\mu^\circ(\widetilde{\tau}, y)) + \gamma \mathbb{1}_{(h,\infty)}(\ell_\mu^\circ(\widetilde{\tau}, y)))\,dy\Big)\Big]. \quad (2.18)$$

Более подробно аналогичные вычисления изложены в [4, §5, гл. V]. □

3. Распределение супремума локального времени

Рассмотрим один пример применения теоремы 2.1. Рассмотрим броуновское движение на $[0,\infty)$ с линейным сносом μ, отраженное в нуле, т.е. случай $\gamma = 0$. Вычислим при $\gamma = 0$ явный вид распределения супремума локального времени $\ell_\mu^+(\tau, y) := \ell_\mu^\circ(\tau, y)$ по переменной $y \in [0,\infty)$. В работе [3] вычислено распределение супремума локального времени броуновского движения с разрывным сносом.

Мы будем использовать стандартные обозначения: функции $I_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка l, функции $M_{n,m}(x)$, $W_{n,m}(x)$, $x \in (0,\infty)$, – функции Уиттекера (см. приложение 2 из [1] или [9, гл. 13]).

Теорема 3.1. *При* $h \geqslant 0$

$$\mathbf{P}_0\Big(\sup_{y\in[0,\infty)} \ell_\mu^+(\tau, y) > h\Big)$$

$$= \frac{\sqrt{\theta}\sqrt{h}}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta}) M_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2h\sqrt{\theta})} \int_0^h \frac{e^{-\mu v/2}}{\sqrt{v}} M_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta})\,dv, \quad (3.1)$$

где $\theta := \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\mu^2}{4}$.

Замечание 3.1. При $\mu = 0$, имеем $W_\mu^\circ(s) = W_+(s)$ и

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in[0,\infty)} \ell_+(\tau, y) > h\Big) = \frac{\sqrt{\lambda/2}}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2}) I_0(h\sqrt{\lambda/2})} \int_0^h I_0(v\sqrt{\lambda/2})\,dv, \quad (3.2)$$

что совпадает с формулой 3.1.11.2 из [1].

Действительно, в этом случае $M_{0,0}(2x) = \sqrt{2x}I_0(x)$ (см. приложение 2 из [1] или [9, гл. 13]).

Доказательство теоремы 3.1**.** Применим теорему 2.1 с $f = 0$. Положим $\theta := \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu^2}{4}$. Решение задачи (2.7), (2.8) при $f \equiv 0$, имеет следующий вид:

$$R(v) = \frac{\operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\theta})}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h. \tag{3.3}$$

Линейно независимые решения однородного уравнения

$$Y''(v) + \frac{1}{v}Y'(v) - \big(\theta - \frac{\mu}{2v}\big)Y(v) = 0, \quad v > 0,$$

имеют (см. уравнение 16, приложение 4 из [1]) вид:

$$\psi(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}M_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta}), \qquad \varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}W_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta}),$$

их вронскиан $\omega(v) = \dfrac{2\sqrt{\theta}}{v\Gamma(1/2 - \mu/4\sqrt{\theta})}$. При этом ψ является неотрицательным возрастающим решением, а φ – неотрицательным убывающим решением. Здесь важно, что $\frac{1}{2} - \frac{\mu}{4\sqrt{\theta}} > 0$ при любом $\mu \in \mathbf{R}$. Из справочника [9, гл. 13], можно извлечь, что $\varphi(v) \asymp -\ln v, \quad v \downarrow 0$, т.е. неограничено в нуле.

Частное решение уравнения (2.5) при $R(v) = \operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\theta})/\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})$ имеет вид

$$Q_0(v) = \frac{2\sqrt{\theta}\operatorname{ch}((h-v)\sqrt{\theta}) + \mu\operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\theta})}{2\lambda\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h.$$

Тогда ограниченное решение задачи (2.5), (2.6) при $f \equiv 0$ имеет следующий вид:

$$Q(v) = Q_0(v) - \frac{Q_0(h)\psi(v)}{\psi(h)}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h, \tag{3.4}$$

т.е. имеет вид

$$\begin{aligned} Q(v) = {} & \frac{2\sqrt{\theta}\operatorname{ch}((h-v)\sqrt{\theta}) + \mu\operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\theta})}{2\lambda\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})} \\ & - \frac{\sqrt{\theta}\sqrt{h}M_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta})}{\lambda\sqrt{v}\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})M_{\mu/4\sqrt{\theta},0}(2h\sqrt{\theta})}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda \int\limits_0^h e^{-\mu v/2} Q_0(v)\, dv = 1.$$

Теперь из (2.4) при $f \equiv 0$, $\gamma = 0$, и из (3.5) следует (3.1). $\square$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Лань, Санкт-Петербург, 2016.
2. A. N. Borodin, P. Salminen, *On the local time process of a skew Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **372** No. 5 (2019), 3597–3618.
3. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от локального времени броуновского движения с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **495** (2020), 102–121.
4. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Лань, Санкт-Петербург (2017).
5. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
6. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.
7. G. N. Kinkladze, *A note on the structure of processes the measure of which is absolutely continuous with respect to Wiener process modulus measure.* — Stochastics **8** (1982), 39–84.
8. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от скошенного броуновского движения с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 36–51.
9. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

Borodin A. N. Distribution of functionals of Brownian motion with linear drift killed elastically at zero.

Brownian motion with linear drift on the positive half-line killed elastically at zero is cosidered. We are interested in a result that allows us to calculate the distributions of the integral functionals with respect to the spatial variable of the local time of such process. The explicit form of the distribution of the supremum with respect to spatial variable of the local time is calculated for Brownian motion with linear drift reflected at zero.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2021 г.