Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

Я. И. Белопольская

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Вероятностный подход к построению решений скалярных нелинейных параболических уравнений, которые можно интерпретировать как нелинейные прямые уравнения Колмогорова, исследовался в ряде работ, начиная с пионерской работы Маккина [1]. В этой работе была построена вероятностная модель решения $u(t,y)$ задачи Коши для нелинейного консервативного параболического уравнения вида

$$\partial_t u = \mathcal{A}^*(u)u, \quad u(0,y) = u_0(y), \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{A}^*(u)u = \frac{1}{2}Tr\nabla^2[B[y,u]u] - \operatorname{div}[a[y,u]u].$$

Здесь

$$a^i[y,u(t)] = \int\limits_{R^d} a^i(y,x)u(t,x)dx, \quad y \in R^d, t \in [0,T],$$

$$A^{ij}[y,u(t)] = \int\limits_{R^d} A^{ij}(y,x)u(t,x)dx, \quad i,j = 1,\dots,d,$$

$$B^{ij} = \sum_{k=1}^{d} A^{ik}A^{kj} = (AA^*)^{ij}.$$

Мы будем говорить, что построена вероятностная модель краевой задачи, если получено вероятностное представление решения исходной задачи в терминах некоторых случайных процессов, конструируемых как решения соответствующих стохастических уравнений.

Ключевые слова: стохастические модели, диффузионные процессы с отражением, задача Скорохода, обобщенные решения задачи Коши–Неймана.

Финансирование осуществлялось (частично) из средств Научно-технологического университета "Сириус".

Вероятностная модель решения задачи Коши для нелинейного неконсервативного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\nabla^2[(AA^*)(y,u)u] - \mathrm{div}[a(y,u)u] + c(y,u)u(t,y)$$

была построена в работе [2]. Здесь коэффициенты a, A, c имеют вид $a(y,u) = a(y,u(t,y))$, т.е. являются функциями от $u(t,y)$, а не функционалами, как в (1.1).

При построении стохастической модели задачи Коши–Неймана (второй краевой задачи) для линейного параболического уравнения понадобилось построить диффузионные процессы с отражением. Построение таких процессов называют задачей Скорохода, так как впервые такие процессы в одномерном случае были построены в работе Скорохода [3]. В работе Фрейдлина [4] был предложен альтернативный подход к построению многомерного диффузионного процесса на многообразии с краем и показано, что построенный таким образом процесс может служить стохастической моделью задачи Коши-Робина (третьей краевой задачи) для линейного параболического уравнения.

Диффузионный процесс с отражением в замкнутой области $\bar{G} = G \cup \partial G$, ассоциированный с уравнением (1.1) был построен в работах Шнитмана [5, 6] как решение соответствующей задачи Скорохода.

Наша цель – построить вероятностную модель решения задачи Коши–Неймана для регуляризации нелинейного неконсервативного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\nabla^2[(AA^*)(y,u)u + c(y,u)u(t,y), \tag{1.2}$$

в области $G = R^d_+ = \{x \in R^d : x_d \geqslant 0\}$ с границей $\partial G = \{x = (x_1,\ldots,x_d) : x_d = 0\}$ и заданными начальным и граничным условиями

$$u(0,y) = u_0(y), \quad \text{если } y \in G, \text{ и}$$

$$\mathrm{div}\,(B[y,u]u)\cdot n(y) = 0, \quad \text{если} \quad y \in \partial G. \tag{1.3}$$

Здесь $n(y)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂G,

$$\sum_{i,j=1}^{d} B_{ij}\nabla_i u(t,y) n_j(y) = B\nabla u(t,y)\cdot n(y).$$

Мы построим решение задачи Скорохода, ассоциированной с задачей Коши-Неймана (1.2), (1.3) в полупространстве, полагая $a \equiv 0$. Иначе говоря, мы построим процесс с отражением от границы в области

$G = R^d_+$, ассоциированный с недивергентным уравнением (1.2) и покажем, что этот диффузионный процесс является вероятностной моделью задачи (1.2), (1.3). Соответствующие результаты для общего случая будут рассмотрены в другой работе.

Далее статья организована следующим образом. В параграфе 2 построен диффузионный процесс с отражением в области $G = R^d_+$, ассоциированный с уравнением (1.2). В параграфе 3 показано, что в случае $a \equiv 0$ процесс, построенный в п. 2, определяет вероятностную модель задачи Коши-Неймана для регуляризованной версии задачи (1.2), (1.3).

§2. Диффузия с отражением

Пусть $G = R^d_+ = \{y = (y^1, \dots, y^d) : y^d \geqslant 0\}$, $\partial G = \{y \in R^d : y_d = 0\}$, $n(y) = (0, \dots, 0, -1)$ внешняя нормаль. Обозначим $\mathcal{C}(G)$ и $C([0,T]; R^d) = \mathcal{C}^d$ множество непрерывных функций f на $[0,T]$ со значениями в G и R^d соответственно с нормой супремума $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|$.

Пусть $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ – пространство вероятностных мер на $\mathcal{C}^d$ с конечными моментами второго порядка. Метрику Вассерштейна на $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ определяют соотношением

$$\mathcal{W}_2(\gamma, \gamma') = \inf_{\pi\in\Pi(\gamma,\gamma')} \left(\int\limits_{\mathcal{C}^d} \int\limits_{\mathcal{C}^d} \sup_{s\leqslant T} \|x(s,\omega) - x(s,\omega')\|^2 \pi(d\omega, d\omega') \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

где $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$, $\Pi(\gamma, \gamma')$ – множество вероятностных мер $\pi(dx, dx')$ на $\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$ таких, что $\pi(dx, \mathcal{C}^d) = \gamma(dx), \pi(\mathcal{C}^d, dy) = \gamma'(dy)$, $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$. Для данного $t \in [0,T]$ определим проектор $\pi_t : \mathcal{C}^d \to R^d$ так, что $\pi(x) = x(t)$. Обозначим через $\gamma_t = (\pi_t)_\sharp \gamma \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ маргинальное значение меры $\gamma \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ в момент $t \in [0,T]$ и через $x \cdot y = \sum\limits_{j=1}^d x_j y_j$ скалярное произведение в R^d.

Обозначим $BV(0,T)$ множество функций $\kappa : [0,T] \to R$, имеющих конечную полную вариацию

$$|\kappa|(t) = \sup \sum_j |\kappa(t_j) - \kappa(t_{j-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, $C_0^\infty(R^d)$ и $C^k(R^d)$ множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями из R^d и множество k раз дифференцируемых функций, заданных на R^d соответственно.

Задачу построения случайного процесса с отражением на границе, ассоциированного с задачей Коши -Неймана (или задачей Коши-Робина), для параболического уравнения второго порядка называют задачей Скорохода. Для линейного параболического уравнения в одномерном случае эта задача была поставлена и решена в работе Скорохода [3], (см. также [7]), в многомерном случае соответствующее решение было получено в работах [8–12].

Детерминированная многомерная задача Скорохода состоит в том, чтобы для заданной функции $g \in \mathcal{C}^d$, $g(0) \in \bar{G}$, найти пару непрерывных функций

$$x(t) \in \mathcal{C}(\bar{G}), \quad k(t) \in \mathcal{C}^d, \quad k \in BV(0,T),$$

удовлетворяющих для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ соотношениям

$$x(t) + k(t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.2}$$

$$k(t) = \int_0^t n(x(s))d|k|(s)),$$

$$|k|(t) = \int_0^t I(x(s) \in \partial G)d|k|(s).$$

Здесь $I(x \in G)$ – индикатор множества G,

Для перехода к стохастической задаче Скорохода зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, положив

$$\Omega = C([0,T]; \bar{G}) \times C([0,T]; R^d).$$

Значения $\omega(t) = (\omega^1(t), \omega^2(t))$ элемента $\omega \in C([0,T]; \bar{G}) \times C([0,T]; R^d)$ в точке $t \in [0,T]$ обозначим $(\xi(t), k(t))$. В качестве $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ и $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_t^1, \mathcal{F}_t^2)$ выберем минимальные σ-алгебры порожденные множествами $\{(\xi(s), \kappa(s)) : 0 \leqslant s \leqslant T\}$ и $\{(\xi(s), \kappa(s)) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Обозначим через P – закон распределения $(\xi(\cdot), k(\cdot))$ на Ω и пусть $w(t) \in R^d$ – $\mathcal{F}_t$-измеримый винеровский процесс.

Стохастическая задача Скорохода состоит в построении пары непрерывных $\mathcal{F}_t$-адаптированных случайных процессов $(\xi(t), k(t)) \in G \times R^d$, удовлетворяющих СДУ с отражением

$$d\xi(s) = a(\xi(s))ds + A(\xi(s))dw(s) - dk(s), \quad \xi(0) = x, \tag{2.3}$$

$$|k|(t) = \int_0^t I(\xi(s) \in \partial G)d|k|(s), \quad k(t) = \int_0^t n(\xi(s))d|k|(s). \tag{2.4}$$

Хорошо известно, что решение задачи Коши-Неймана (второй краевой задачи), а также Коши-Робина (третьей краевой задачи) для линейного параболического уравнения допускает вероятностное представление в терминах решения стохастической задачи Скорохода [9]. Для того, чтобы получить соответствующие результаты в рассматриваемом случае мы воспользуемся альтернативной конструкцией диффузионного процесса с отражением, предложенной в работе [13] и состоящей в построении непрерывного отображения $\Gamma : C(R^d) \to C(R^d_+)$, позволяющего, с помощью соотношения $\xi(t) = \Gamma(\zeta(t))$, свести изучение процесса с отражением $\xi(t)$ к изучению некоторого диффузионного процесса $\zeta(t)$ во всем пространстве R^d.

В этом параграфе мы построим вероятностную модель задачи Коши–Неймана для неконсервативного уравнения вида (1.2) в области $G = R^d_+ = \{x = (x^1, \dots, x^d) : x^d \geqslant 0\}$ с границей $\partial G = \{x : x^d = 0\}$ для случая $a \equiv 0$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2**, если:

1) $A_{ij}(x, v)$ – равномерно ограниченные вещественные функции, удовлетворяющие условию Липшица, т.е. существует такая константа $L>0$, что для всех $x, x_1 \in G, v, v_1 \in R$ и $i, j \in \{1, \dots, d\}$ справедлива оценка

$$|A_{ij}(x, v) - A_{ij}(x_1, v_1)| \leqslant L(\|x - x_1\| + \|v - v_1\|)\, x_1 \in G, v_1 \in R;$$

2) начальное условие $\xi_0 \in \bar{G} = G \cup \partial G$ – это случайная величина с распределением $u_0(dy)$, не зависящая от $w(t)$;

3) Существуют такие положительные константы L_c, K_c, что

$$|c(x, v)| \leqslant K_c, |c(x, v) - c(y, v_1)| \leqslant L_c[\|x - y\| + |v - v_1|].$$

Рассмотрим стохастическую задачу Скорохода, т.е. систему уравнений относительно случайных процессов $\xi(t) \in G, \kappa(t) \in R^d$ и функции

$v(t,y) \in R$, $t \in [0,T]$, $y \in \bar{G}$,

$$\xi(t) + k(t) = \xi_0 + \int_0^t A(\xi(s), v(s, \xi(s)))ds, \tag{2.5}$$

$$|k|(t) = \int_0^t I(\xi(s) \in \partial G) d|k|(s),$$

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_0^t B(\xi(s), v(s,\xi(s)))n(\xi(s))d|k|(s), \tag{2.6}$$

$$v(t,y) = E\left[\rho(y - \xi(t)) \exp\left\{\int_0^t c(\xi(s), v(s,\xi(s)))ds\right\}\right], \tag{2.7}$$

где

$$\rho \in C_0^\infty(\bar{G}), \qquad \int_{\bar{G}} \rho(y)dy = 1.$$

Перепишем уравнение (2.7) в виде

$$v(t,y) = \int_\Omega \left[\rho(y - \xi(t,\omega)) \exp\left\{\int_0^t c(\xi(s,\omega), v(s,\xi(s,\omega)))ds\right\} P(d\omega)\right], \tag{2.8}$$

где $\Omega = \mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$.

Определим отображение $\Gamma : C_{0,T}(R^d) \to C_{0,T}(R^d_+)$ с помощью следующих соотношений: пусть $\zeta \in C_{0,T}(R^d)$ и $\Gamma(\zeta) = \xi$ так, что $\xi^j(t) = \zeta^j(t)$, если $j = 1, \dots, d-1$, и $\xi^d(t) = \zeta^d(t) - (\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \zeta^d(s)) \wedge 0$. Отображение $k : C_{0,T}(R^d) \to C_{0,T}(R^1)$ зададим соотношением $\Gamma(\zeta) - \zeta = (0, \cdots, 0, k(\zeta))$. При этом отображение $\Gamma_t(\zeta) = (\xi^1(t), \dots, \xi^d(t))$ удовлетворяет оценкам $\sup_{s \leqslant t} \|\Gamma_s(\zeta) - \Gamma_s(\zeta_1)\| \leqslant 2 \sup_{s \leqslant t} \|\zeta(s) - \zeta_1(s)\|$ и $\|\Gamma_t(\zeta) - \Gamma_s(\zeta)\| \leqslant \|\zeta(t) - \zeta(s)\|$.

Рассмотрим далее стохастическую систему относительно процесса $\zeta(t) \in R^d$ и функции $\tilde{v}(t,z) \in R, t \in [0,T], z \in R^d$,

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t A(\Gamma_s(\zeta), v(s, \Gamma_s(\zeta)))dw(s), \tag{2.9}$$

$$\tilde{v}(t,z) = E\left[\rho(\Gamma_t(z) - \Gamma_t(\zeta)) \exp\left\{\int\limits_0^t c(\Gamma_s(\zeta), v(s, \Gamma_s(\zeta)))ds\right\}\right] \qquad (2.10)$$

где $\zeta_0 \in R^d$ – случайная величина с распределением $P(\zeta_0 \in dy) = \mu_0(dy)$, не зависящая от $w(t)$. Заметим, что, несмотря на то, что отображение $A^v(y) = A(y, v(y))$ задано на R^d_+, отображение $A^v \circ \Gamma_t$ задано на R^d.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C 2**, *матрица* A *невырождена и* $\zeta(t), \tilde{v}(t,y)$ *– решение системы* (2.9), (2.10). *Положим* $\xi(t) = \Gamma_t(\zeta)$, $k(t) = (\Gamma_t(\zeta)^d - \zeta^d(t))$, $v(t, \xi(t)) = v(t, \Gamma_t(\zeta))$. *Тогда* $(\xi(t), k(t), v(t,y))$ *– единственное решение системы* (2.5) $- -$(2.7).

Доказательство. По построению $\zeta(t)$ – непрерывный процесс с вероятностью 1. Если пара $(\zeta(t),\ \tilde{v}(t,z))$ удовлетворяет (2.9), (2.10), то тройка $(\xi(t), k(t),\ v(t,y))$ удовлетворяет (2.5) – (2.7). Из определения процесса $k(t)$ следует, что он не убывает и возрастает только на множестве $K = \{t > 0 : \xi(t) \in \partial G\}$, где $\partial G = \{x \in R^d : x^d = 0\}$. Покажем, что это множество имеет нулевую меру Лебега. Для этого достаточно показать, что множество $K_T = K \wedge [0,T]$ имеет нулевую меру Лебега. Из определения процесса $\zeta(t)$ вытекает, что $K_T = \{t \in [0,T] : \zeta^d(t) = (\inf_{s \leqslant t} \zeta^d(s)) \wedge 0\}$, где $\zeta^d(t)$ – компонента с номером d процесса $\zeta(t)$. Компонента $\zeta^d(t) = \int\limits_0^t \sum\limits_{j=1}^d A_{dj}(\Gamma_s(\zeta), v(s, \Gamma_s(\zeta)))dw_j(t)$ процесса $\zeta(t)$ может быть получена из винеровского процесса $\bar{w}(t)$ с помощью невырожденного преобразования времени,

$$\zeta^d(t) = \bar{w}\Big(\int\limits_0^t B_d(\Gamma_s(\zeta\Big), v(s, \Gamma_s(\zeta)))ds),$$

где $B_d = \sum\limits_{j=1}^d [A_{dj}]^2$, а для винеровского процесса этот факт известен.

Для того, чтобы доказать единственность, предположим, что существует две тройки $(\xi(t), k(t), v(t,y))$ и $(\xi_1(t),\ k_1(t), v_1(t,y))$, удовлетворяющие (2.5) - (2.7), и зададим $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^d)$, $\zeta_1 = (\zeta_1^1, \ldots, \zeta_1^d)$ соотношениями $\zeta^j = \xi^j, j = 1, \ldots d-1$, $\zeta^d = \xi^d - k(t)$ и $\zeta_1^j = \xi_1^j, j = 1, \ldots d-1$, $\zeta_1^d = \xi_1^d + k$. Тогда $(\zeta, \tilde{v})$ и $(\zeta_1, \tilde{v}_1)$ удовлетворяют (2.9), (2.10) и, в силу единственности решения этой системы, $\zeta = \zeta_1, \tilde{v} = \tilde{v}_1$. При этом $\xi^j = \xi_1^j, j = 1, \ldots, d_1$ и $\xi^d(t) + k(t) = \xi_1^d(t) + k_1(t)$, откуда следует, что $\xi^d(t) - \xi_1^d(t) = k_1(t) - k(t) = 0$, поскольку правая часть может убывать только, если $\xi^d(t) = 0$, $\xi^d(t) \leqslant \xi_1^d(t)$. Но $\xi^d(0) = \xi_1^d(0)$ и эти процессы непрерывны, следовательно, $\xi^d(t) \leqslant \xi_1^d(t)$ всегда. Аналогичные рассуждения показывают, что $\xi_1^d(t) \leqslant \xi^d(t)$, откуда вытекает, что $\xi^d(t) = \xi_1^d(t)$. Наконец, $v(t,y) = v_1(t,y)$, если $\xi(t) = \xi_1(t)$ и $k(t) = k_1(t)$.

Система уравнений вида (2.9), (2.10) исследовалась в работе [2] и мы воспользуемся подходом, предложенным в этой работе.

Мы будем рассматривать $\Omega = \mathcal{C}^d$, полагая $\zeta(t,\omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F} = \sigma\{\zeta(s) : 0 \leqslant s \leqslant T\}$ и $\mathcal{F}_t = \sigma\{\zeta(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Обозначим

$$Q(t,\zeta(\omega),\eta(\omega)) = \exp\left\{\int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s,\omega),\tilde{v}(s,\zeta(s,\omega))ds\right\}$$

и рассмотрим уравнение

$$\tilde{v}^\gamma(t,z) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z-\zeta(t))Q(t,\zeta(\omega),\eta(\omega)))\gamma(d\omega), \quad z \in R^d. \tag{2.11}$$

$\square$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **C 2**. *Для заданной вероятностной меры* $\gamma \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ *существует единственное решение* $\tilde{v}^\gamma(t,z)$ *уравнения* (2.11).

Доказательство. Обозначим $\mathcal{C}_1$ линейное пространство вещественных непрерывных случайных процессов $\eta(t,\omega) \in R$, определенных на $[0,T] \times \mathcal{C}^d$ и удовлетворяющих оценке

$$\|\eta\|_{\infty,1} = \mathbf{E}^\gamma[\sup_{t\in[0,T]} |\eta(t)|] = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \sup_{t\in[0,T]} |\eta(t,\omega)|\gamma(d\omega) < \infty.$$

Пространство $\mathcal{C}_1$ – это банахово пространство с нормой $\|\eta\|_{\infty,1}$. Введем на этом пространстве эквивалентную норму $\|\eta\|_{\infty,1}^N$, $N > 0$, с помощью соотношения

$$\|\eta\|_{\infty,1}^N = \mathbf{E}^\gamma\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}\|\eta\|_{\infty,1}\right].$$

Пусть Φ^γ – оператор, действующий из $\mathcal{C}_1$ в $C([0,T]\times R^d; R)$, заданный соотношением

$$\Phi^\gamma(\zeta)(t,z) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z-\zeta(t,\omega))Q(t,\zeta(\omega),\eta(\omega))\gamma(d\omega). \tag{2.12}$$

Пусть $m : C([0,T]\times R^d; R) \to \mathcal{C}_1$, т.е. : $\tilde v \mapsto m(\tilde v)$ и $m(\tilde v)(t,\omega) = \tilde v(t,\omega(t))$. Заметим, что композиция $m \circ \Phi^\gamma$ действует в пространстве $\mathcal{C}_1$ и уравнение (2.11) эквивалентно уравнению

$$\tilde v = (\Phi^\gamma \circ m)(\tilde v). \tag{2.13}$$

Предположим вначале, что отображение $m \circ \Phi^\gamma$ имеет единственную неподвижную точку $\eta \in \mathcal{C}_1$, так что $\eta = (m \circ \Phi^\gamma)(\eta)$.

Для доказательства единственности решения уравнения (2.13) предположим обратное. Пусть существует два решения $\tilde v$ и $\tilde v_1$ уравнения (2.13) так, что $\tilde v = (\Phi^\gamma \circ m)(\tilde v)$ и $\tilde v_1 = (\Phi^\gamma \circ m)(\tilde v_1)$. Обозначим $\eta = m(\tilde v)$ и $\eta_1 = m(\tilde v_1)$. Поскольку $\tilde v = \Phi^\gamma(\eta)$, то $\eta = m(\tilde v) = m(\Phi^\gamma(\eta))$, и, аналогично, $\eta_1 = m(\tilde v_1) = m(\Phi^\gamma(\eta_1))$. Напомним, что η и η_1 – неподвижные точки отображения $m \circ \Phi^\gamma$, следовательно, $\eta = \eta_1$ почти всюду. Остается лишь проверить, что $m \circ \Phi^\gamma$ имеет единственную неподвижную точку.

Оценим разность $\Phi^\gamma(\eta) - \Phi^\gamma(\eta_1)$,

$$\begin{aligned}
&|\Phi^\gamma(\eta) - \Phi^\gamma(\eta_1)|(t,z) = |\int\limits_{\mathcal{C}^d} \tilde\rho(z - \zeta(t,\omega))[Q(t,\zeta(\omega),\eta(\omega)) \\
&- Q(t,\zeta(\omega),\eta_1(\omega))]\gamma(d\omega)| \\
&\leqslant K_\rho e^{tK_c} L_c \int\limits_{\mathcal{C}^d_T} \int_0^t |\eta(s,\omega) - \eta_1(s,\omega)| ds\gamma(d\omega) \\
&\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c E\left[\int_0^t e^{Ns} e^{-Ns} |\eta(s,\omega) - \eta_1(s,\omega)| ds\right] \\
&\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c E\left[\int\limits_0^t e^{Ns} \sup_{\tau\leqslant t} e^{-N\tau} |\eta(\tau,\omega) - \eta_1(\tau,\omega)| ds\right] \\
&\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c \frac{e^{Nt}-1}{N} E\left[\sup_{\tau\leqslant t} e^{-N\tau} |\eta(\tau,\omega) - \eta_1(\tau,\omega)|\right] \\
&\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_c \frac{e^{Nt}-1}{N} \|\eta - \eta_1\|^N_{\infty,1}.
\end{aligned}$$

По определению $(m \circ \Phi^\gamma)(t,\eta) = \Phi^\gamma(\eta)(t,\xi(t))$, откуда в силу свойств функций ρ и c вытекает оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt} |(\kappa \circ \Phi^\gamma)(t,\eta) - (\kappa \circ \Phi^\gamma)(t,\eta_1)|$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}|\Phi^\gamma(\eta)(t,\xi(t)) - \Phi^\gamma)(\eta_1)(t,\xi(t))|$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_\rho \frac{1}{N} \|\eta - \eta_1\|^N_{\infty,1}.$$

Вычисляя математическое ожидание, получим оценку

$$\|m\circ\Phi^\gamma(\zeta)(t) - m\circ\Phi^\gamma(\eta)(t)\|^N_{\infty,1}$$
$$\leqslant K_\rho e^{TK_c} L_\rho \frac{1}{N} \|\eta - \eta_1\|^N_{\infty,1},$$

из которой вытекает, что, для достаточно большого числа $N > K_\rho e^{TK_c} L_\rho$, отображение $m\circ\Phi^\gamma$ является сжимающим отображением в пространстве $(\mathcal{C}_1, \|\cdot\|^N_{\infty,1})$. При этом существование и единственность решения уравнения (2.13) при заданной мере $\gamma\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ вытекают из теоремы о сжимающих отображениях в банаховом пространстве.

Оценим далее зависимость от γ процесса ζ^γ и функции $\tilde v^\gamma(t,z)$, удовлетворяющих (2.9), (2.11).

Заметим, что, если $\tilde v^\gamma$ удовлетворяет (2.11), то для $(\gamma,z)\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)\times R^d$ отображение $t\mapsto\tilde v^\gamma(t,z)$ непрерывно. При этом, в силу ограниченности c и липшицевости ρ, справедлива оценка

$$\sup_{(t,z)\in[0,T]\times R^d} |\tilde v^\gamma(t,z)| \leqslant K_\rho \exp(K_c T). \tag{2.14}$$

Обозначим $\mathcal{C}_1$ линейное пространство вещественных непрерывных случайных процессов $\zeta(t,\omega)$, определенных на $[0,T]\times\mathcal{C}^d$ и удовлетворяющих оценке

$$\|\zeta\|_{\infty,1} = \mathbf{E}^\gamma[\sup_{t\in[0,T]}|\zeta(t)|] = \int_{\mathcal{C}^d} \sup_{t\in[0,T]}|\zeta(t,\omega)|\gamma(d\omega) < \infty.$$

$\mathcal{C}_1$ – это банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\infty,1}$. Введем на этом пространстве эквивалентную норму $\|\zeta\|^N_{\infty,1}$, $N\geqslant 0$, с помощью соотношения

$$\|\zeta\|^N_{\infty,1} = \mathbf{E}^\gamma\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{-Nt}\|\zeta\|_{\infty,1}\right].$$

□

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* **C 2** *и функция* v^γ *удовлетворяет* (2.11). *Тогда для любой пары распределений* $(\gamma,\gamma_1)\in\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)\times$

$\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ *и всех* $(t, z, z_1) \in [0, T] \times R^d \times R^d$ *справедлива оценка*

$$|\tilde{v}^{\gamma}(t, z) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t, z_1)|^2 \leqslant C_{\rho,c}(t)[\|z - z_1\|^2 + \mathcal{W}_t^2(\gamma, \gamma_1)]. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Пусть $(\gamma, \gamma_1) \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$. Оценим разность

$$|\tilde{v}^{\gamma}(t, z) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t, z_1)|^2 \leqslant 2|\tilde{v}^{\gamma}(t, z) - \tilde{v}^{\gamma}(t, z_1)|^2$$
$$+ |\tilde{v}^{\gamma}(t, z_1) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t, z_1)|^2 = \alpha_1 + \alpha_2. \qquad (2.16)$$

Для оценки α_1 воспользуемся липшицевостью функции $\tilde{\rho}$ и ограниченностью экспоненты $Q(t, \zeta, \eta) = e^{\int_0^t \tilde{c}(\zeta(s), \eta(s))ds}$ с ограниченным показателем $\tilde{c}(z, \tilde{v})$,

$$|\tilde{v}^{\gamma}(t, z) - \tilde{v}^{\gamma}(t, z_1)|^2 = |\int_{\mathcal{C}^d} [\tilde{\rho}(z - \zeta(t, \omega)) - \tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t, \omega))]$$
$$\times Q(t, \zeta(\omega), \eta(\omega)))\gamma(d\omega)|^2 \leqslant L_\rho e^{tK_c}\|z - z_1\|^2. \qquad (2.17)$$

Для оценки α_2 заметим, что в силу неравенства Йенсена

$$\alpha_2 = |\tilde{v}^{\gamma}(t, z_1) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t, z_1)|^2$$
$$= \int_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t, \omega))Q(t, \zeta(\omega), \eta(\omega)))\gamma(d\omega)$$
$$- \int_{\mathcal{C}^d} \tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t, \omega_1))Q(t, \zeta(\omega_1), \eta(\omega_1)))\gamma_1(d\omega_1)|^2$$
$$\leqslant \int_{\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d} |\tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t, \omega))Q(t, \zeta(\omega), \eta(\omega)))$$
$$- \tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t, \omega_1))Q(t, \zeta(\omega_1), \eta(\omega_1)))|^2 \pi(d\omega, d\omega_1), \qquad (2.18)$$

где π принадлежит множеству $\Pi(\gamma, \gamma_1)$, заданному в (2.1).

Пусть $\zeta, \zeta_1 \in \mathcal{C}^d$ и $\eta, \eta_1 \in \mathcal{C}^1$. Тогда

$$|\tilde{\rho}(z - \zeta(t))Q(t, \zeta, \eta) - \tilde{\rho}(z_1 - \zeta_1(t))Q(t, \zeta_1, \eta_1)|^2$$
$$\leqslant 2|\tilde{\rho}(z - \zeta(t)) - \tilde{\rho}(z_1 - \zeta_1(t))|^2|Q(t, \zeta, \eta)|^2$$
$$+ 2|\tilde{\rho}(z_1 - \zeta_1(t))|^2|Q(t, \zeta, \eta) - Q(t, \zeta_1, \eta_1)|^2. \qquad (2.19)$$

Обозначим $f = \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s), \eta(s))ds$, $g = \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta_1(s), \eta_1(s))ds$ и воспользуемся оценкой

$$e^f - e^g = (f-g)\int\limits_0^1 e^{\theta f + (1-\theta)g}d\theta \leqslant e^{sup(f,g)}|f-g|, \, \forall f, g \in R,$$

чтобы вывести неравенство

$$\begin{aligned}
&|Q(t,\zeta,\eta) - Q(t,\zeta_1,\eta_1)| \\
&\leqslant e^{K_c t}\int\limits_0^t |Q(s,\zeta(s),\eta(s)) - Q(s,\zeta_1(s),\eta_1(s))|ds \\
&\leqslant e^{K_c t}L_c\int\limits_0^t [\|\zeta(s) - \zeta_1(s)\| + |\eta(s) - \eta_1(s)|]ds. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Поскольку функция $\tilde{\rho}$ удовлетворяет условию Липшица, то, используя оценки (2.14) и (2.20), получим

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\rho}(z_1 - \zeta(t))Q(t,\zeta,\eta) - \tilde{\rho}(z_1 - \zeta_1(t))Q(t,\zeta_1,\eta_1)|^2 \\
&\leqslant 2L_\rho^2 e^{2tK_c}\|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2 + 4tK_\rho^2 L_c^2 e^{2tK_c}\int\limits_0^t [\|\zeta(s) - \zeta_1(s)\|^2 \\
&+ |\eta(s) - \eta_1(s)|^2]ds \leqslant C\left[(1+t)\sup_{s\leqslant t}\|\zeta(s) - \zeta_1(s)\|^2 + \right. \\
&\left. + \int\limits_0^t |\eta(s) - \eta_1(s)|^2 ds\right]. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.21) в (2.18) , получим оценку для α_2, откуда, с учетом оценки (2.17) для α_1 и (2.16), получим

$$
\begin{aligned}
&|\tilde v^{\gamma}(t,z)-\tilde v^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 \leqslant 2C(t)\Big[\|z-z_1\|^2\\
&+(1+t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\zeta(s,\omega)-\zeta(s,\omega_1)\|^2\pi(d\omega,d\omega_1)\\
&+\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\int\limits_0^t|\tilde v^{\gamma}(s,\zeta(s,\omega))-\tilde v^{\gamma_1}(s,\zeta(s,\omega_1))|^2 ds\pi(d\omega,d\omega_1)\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.22}
$$

Из (2.22) вытекает оценка

$$
\begin{aligned}
&|\tilde v^{\gamma}(t,\zeta(t,\omega))-\tilde v^{\gamma_1}(t,\zeta(t,\omega_1))|^2\\
&\leqslant 2C(t)\Big[\|\zeta(t,\omega)-\zeta(t,\omega_1)\|^2\\
&+(1+t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\zeta(s,\omega)-\zeta(s,\omega_1)\|^2\pi(d\omega,d\omega_1)\\
&+\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\int\limits_0^t|\tilde v^{\gamma}(s,\zeta(s,\omega))-\tilde v^{\gamma_1}(s,\zeta(s,\omega_1))|^2 ds\pi(d\omega,d\omega_1)\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.23}
$$

Пусть

$$
\alpha(s)=\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}||\tilde v^{\gamma}(s,\zeta(s,\omega))-\tilde v^{\gamma_1}(s,\zeta(s,\omega_1))||^2\pi(d\omega,d\omega_1).
$$

Интегрируя соотношение (2.23) по мере π, получим

$$
\begin{aligned}
&\alpha(t)\leqslant 2C(t)\int\limits_0^t\alpha(s)ds\\
&\quad+2(t+2)C(t)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\in[0,t]}\|\zeta(s,\omega)-\zeta(s,\omega_1)\|^2\pi(d\omega,d\omega_1),
\end{aligned}
$$

откуда, в силу леммы Гронуолла, следует оценка

$$\alpha(t) = \int\limits_{\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d} |\tilde{v}^{\gamma}(t, \zeta(t,\omega)) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t, \zeta(t,\omega_1))|^2 \pi(d\omega, d\omega_1)$$
$$\leqslant 2C(t)(t+2)e^{2tC(t)} \int\limits_{\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d} \sup \|\zeta(s,\omega) - \zeta(s,\omega_1)\|^2 \pi(d\omega, d\omega_1).$$

С учетом последнего неравенства из (2.22) следует оценка

$$|\tilde{v}^{\gamma}(t,z) - \tilde{v}^{\gamma_1}(t,z_1)|^2 \leqslant 2C(t) \Big[\|z - z_1\|^2$$
$$\left. + K(t) \int\limits_{\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d} \sup_{s \leqslant t} \|\zeta(s,\omega) - \zeta(s,\omega_1)\|^2 \pi(d\omega, d\omega_1) \right]$$

где $K(t) = 1 + t + (t+2)e^{2tC(t)}$. Поскольку эта оценка справедлива для любой меры $\pi \in \Pi(\gamma, \gamma_1)$ то, вычисляя инфимум по $\pi \in \Pi(\gamma, \gamma_1)$, получим требуемую оценку (2.15). □

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* **C 2.1**. *Тогда существует единственное решение* $\zeta^{\gamma}(t), \tilde{v}^{\gamma}(t,z)$ *системы* (2.9), (2.10).

Доказательство. Поскольку, как показано выше, $\tilde{v}^{\gamma}(t,z)$ – липшицева функция, существует единственное сильное решение $\zeta^{\gamma}(t)$ СДУ (2.9). Используя неравенства Буркхольдера и Йенсена, нетрудно проверить, что существует такая константа, зависящая от констант в оценках условия **C 2**, что

$$E[\sup_{t \leqslant T} \|\zeta^{\gamma}(t)\|^2 \leqslant C[1 + E\|\zeta_0\|^2].$$

Отсюда следует, что распределение $\mathcal{L}(\zeta)$ процесса $\zeta^{\gamma}(t)$ принадлежит $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$. Рассмотрим отображение $\mathcal{K} : \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \to \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$, заданное соотношением $\mathcal{K}(\gamma) = \mathcal{L}(\zeta^{\gamma})$, и покажем, что оно является сжимающим отображением в $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$.

Пусть $\gamma, \gamma_1 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$, а $\tilde{v}^{\gamma}, \tilde{v}^{\gamma_1}$ – решения (2.9), соответствующие γ и γ_1. Из определения метрики Вассерштейна следует, что

$$\mathcal{W}_T^2(\mathcal{K}(\gamma), \mathcal{K}(\gamma_1)) \leqslant E[\sup_{t \leqslant T} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2]. \tag{2.24}$$

Используя оценки (2.15) и (2.24), покажем, что для любого $\tau \in [0, T]$

$$E[\sup_{t\leqslant\tau} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2] \leqslant \left[\int_0^\tau E[\sup_{s\leqslant t} \|\zeta(s) - \zeta_1(s)\|^2]dt + \int_0^\tau \mathcal{W}_t^2(\gamma, \gamma_1)dt\right] \tag{2.25}$$

с константой C, зависящей от констант в условии **C 2**. Применяя лемму Гронуолла, получим

$$E[\sup_{t\leqslant\tau} \|\zeta(t) - \zeta_1(t)\|^2] \leqslant Ce^{CT} \int_0^\tau \mathcal{W}_s^2(\gamma, \gamma_1)ds. \tag{2.26}$$

Из (2.24) и (2.26) следует, что

$$\mathcal{W}_\tau^2(\gamma, \gamma_1) \leqslant Ce^{CT} \int_0^\tau \mathcal{W}_s^2(\gamma, \gamma_1)ds. \tag{2.27}$$

Итерируя оценку (2.27), докажем, что отображение $\mathcal{K}$ является сжимающим, что завершает доказательство теоремы. □

§3. Вероятностное представление решения задачи Коши–Неймана

В заключение мы установим связь между процессами $\xi(t)$ и $k(t)$ и функцией $u(t, y)$, удовлетворяющими системе вида (2.5)–(2.7), и решением задачи Коши–Неймана в полупространстве $G = R_+^d$

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2[(AA^*)(y, [\rho * u](t, y))u(t, y)] + c(y, [\rho * u](t, y))u(t, y), \tag{3.1}$$

$$u(0, y) = u_0(y), y \in G, \quad \operatorname{div}(Bu) \cdot n = 0, y \in \partial G, \tag{3.2}$$

где $[\operatorname{div}(Bu)]_k = \sum_{j=1}^d B_{kj}u_j$, $h \cdot z = \sum_{k=1}^d h_k z_k$, и

$$\rho * u(t, y) = \int_G \rho(y - x)u(t, x)dx.$$

Введем ряд дополнительных обозначений. Пусть $L^2(G)$ – множество квадратично интегрируемых функций, $H^k(G)$ ($H^k_0(G)$) – множество функций квадратично интегрируемых вместе со своими производными до порядка k (с компактными носителями), $H^{-k}(G)$ – пространство, двойственное к $H^k(G)$, $\langle u,\phi\rangle = \int\limits_G u(y)\phi(y)dy$, $\forall\phi \in H^k(G)$, $u \in H^{-k}(G)$ и $L^\infty(G)$ – множество функций с $\|f\|_\infty = \text{ess}\sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$, $\mathcal{S}(R^d)$ – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций и $\mathcal{S}'(R^d)$ – двойственное пространство обобщенных функций.

Функцию $u \in H^1(G)$ назовем слабым решением задачи Коши - Неймана (3.1), (3.2), если для любой функции $\phi \in C^2(G))$ справедливо интегральное тождество

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle\phi, u(s)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Tr}(AA^*)([\rho * u](s))\phi, u\rangle + \langle c(\rho * u)(s)\phi, u\rangle = 0. \quad (3.3)$$

Борелевскую меру μ назовем слабым решением задачи Коши - Неймана (3.1), (3.2), если для любой функции $\phi \in C^2(G))$ справедливо интегральное тождество

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle\phi, \mu(s)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Tr}(AA^*)([\rho * \mu](s))\phi, \mu(s)\rangle + \langle c(\rho * \mu)\phi, \mu(s)\rangle = 0.$$

Здесь $\langle\phi,\mu\rangle = \int_G \phi(y)\mu(dy)\rangle$.

Пусть, как и в предыдущем параграфе, $G = R^d_+, \partial G = \{y \in R^d : y_d = 0\}$, внешняя нормаль задана соотношением $n(y) = (0,\dots,0,-1)$, а коэффициенты $A(y,u), c(y,u)$ в (3.1) ограничены и дифференцируемы вплоть до границы.

Рассмотрим стохастическую задачу

$$\xi(t) + k(t) = \xi_0 + \int\limits_0^t A(\xi(s), u(s,\xi(s)))dw(s), \quad (3.4)$$

$$|k|(t) = \int\limits_0^t I(\xi(s) \in \partial G)d|k|(s),$$

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_0^t B(\xi(s), u(s,\xi(s)))n(\xi(s))d|k|(s). \quad (3.5)$$

$$u(t,y)=E\left[\rho(y-\xi(t))\exp\left\{\int\limits_0^t c(\xi(s),u(s,\xi(s)))ds\right\}\right],\quad y\in\bar{G}. \tag{3.6}$$

Воспользовавшись отображением $\Gamma: C([0,T];R^d)\to C([0,T];R^d_+)$, перейдем от рассмотрения системы описывающей диффузионный процесс с отражением и функцию $u(t,y)$ в полупространстве R^d_+ к системе

$$\zeta(t)=\zeta_0+\int\limits_0^t \tilde{A}^u(\Gamma(s,\zeta))dw(s), \tag{3.7}$$

$$\tilde{u}(t,z)=E\left[\rho(z-\zeta(t))\exp\left\{\int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s),\tilde{u}(s,\zeta(s)))ds\right\}\right], \tag{3.8}$$

описывающей диффузионный процесс $\zeta(t)\in R^d$ и функцию $\tilde{u}(t,z), z\in R^d$. Здесь $P(\zeta_0\in dz)=\mu_0(dz)$ и ζ_0 не зависит от $w(t)$.

Из условий **C2** и свойств функции $\tilde{u}(t,z)$, установленных в параграфе 2, вытекает, что $\tilde{A}^u(z)$ и $\tilde{c}^u(z)$ – ограниченные липшицевы функции и существует такая константа C, что справедливы оценки

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|A^u(\Gamma_s(\zeta))-A^u(\Gamma_s(\zeta'))\|\leqslant C\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|\xi(s)-\xi'(s)\|. \tag{3.9}$$

Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что решение ($\zeta(t)\in R^d$, $\tilde{u}(t,z)\in R$) системы (3.7), (3.8) существует, единственно с вероятностью 1, процесс $\zeta(t)$ обладает марковским свойством, а функция $\tilde{u}(t,z)$ ограничена и липшицева. При этом из теоремы 2.1 следует, что пара процессов

$$\xi(t)=\Gamma(t,\zeta), k(t)=\eta(t,\zeta),$$

и функция $u(t,y)=u(t,\Gamma(z))=\tilde{u}(t,z)$ удовлетворяют системе (3.4)–(3.6), если $\zeta(t)\in R^d,\tilde{u}(t,z)\in R$ – решение системы (3.7), (3.8) и матрица $\tilde{B}^u(z)=\tilde{A}^u(z)(\tilde{A}^u)^*(z)$ невырождена.

Для того, чтобы установить связь между стохастической системой (3.4)–(3.6) и задачей Коши–Неймана (3.1), (3.2), наряду с системой (3.7), (3.8), нам понадобится еще одна стохастическая система, позволяющая определить обобщенное решение уравнения (3.1).

Перепишем систему (3.7), (3.8) в виде

$$\zeta(t)=\zeta_0+\int\limits_0^t \tilde{A}^u(\zeta(s))dw(s), \tag{3.10}$$

$$\tilde{u}^{\gamma}(t,z) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \left[\tilde{\rho}(z-\zeta(t)) \exp\left\{ \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s), \tilde{u}^{\gamma}(s,\zeta(s)))ds \right\} \right] \gamma(d\omega), \quad (3.11)$$

где $\gamma = \mathcal{L}(\zeta(t))$ распределение процесса ζ и $P(\zeta_0 \in dz) = \mu_0(dz)$.

Рассмотрим также вспомогательную стохастическую систему

$$d\zeta(s) = \tilde{A}([\rho * \mu](s,\zeta(s)))dw(s),$$

$$\zeta(0) = \zeta_0, \quad P\{\zeta_0 \in dz) = \mu_0(dz), \quad (3.12)$$

$$\int\limits_{R^d} h(z)\mu^{\gamma}(t,dz) = \mathbf{E}\left[h(\zeta(t)) \exp\left\{ \int\limits_0^t \tilde{c}([\rho*\mu](s,\zeta(s)))ds \right\} \right]$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} h(\zeta(t,\omega) Q_m(t,\zeta(\omega),[\rho*\mu](\zeta(\omega)))\gamma(d\omega) \quad (3.13)$$

$\forall h \in \mathcal{S}(R)$. Здесь $[\rho*\mu](s,z) = \int\limits_R \rho(z-x)\mu(s,dx)$ и ζ_0 не зависит от $w(t)$.

Используя технику работы [2], покажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть задано решение* (ζ,μ^{γ}) *системы* (3.12)–(3.13), *тогда пара* $(\zeta,\tilde{u}^{\gamma})$, *где* $v^{\gamma} = \rho * \mu^{\gamma}$ *удовлетворяет* (3.10)–(3.11). *Верно и обратное утверждение. Если пара* $(\zeta,\tilde{u}^{\gamma})$ *удовлетворяет* (3.10)–(3.11), *то существует мера* μ^{γ} *такая, что пара* (ζ,μ^{γ}) *удовлетворяет* (3.12)–(3.13).

Если, кроме того, мера Лебега измеримого множества $\{z \in R^d : F(\rho)(z) = 0\}$ *равна нулю, то системы* (3.10)–(3.11) *и* (3.12)–(3.13) *эквивалентны.*

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0,T]$ и пусть (ζ, v^{γ}) удовлетворяют (3.10)– (3.11). Обозначим $F : f \in \mathcal{S}(R^d) \mapsto F(f) \in \mathcal{S}(R^d)$ преобразование Фурье на пространстве Шварца,

$$F(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R^d} f(y)e^{-i\lambda\cdot y}dy.$$

Поскольку $\rho \in L^1(R^d)$, то преобразование Фурье функции $\tilde{u}^{\gamma}$, заданной соотношением (3.13) имеет вид

$$F(v^{\gamma})(\lambda) = F(\rho) \int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} Q(t,\zeta(\omega),v^{\gamma}(\zeta(\omega)))\gamma(d\omega). \quad (3.14)$$

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости функция

$$g^\gamma(\lambda) = \int_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} Q(t, \xi(\omega), \tilde{u}^\gamma(\zeta(\omega)))\gamma(d\omega)$$

непрерывна и ограничена, поскольку Q ограничена. Кроме того $g^\gamma(\lambda)$ неотрицательно определена, поскольку для последовательности комплексных чисел $b_k, k = 1, \ldots, d$ и последовательности $y_k \in R^d$, $k = 1, \ldots, d$ и всех $z \in R^d$ справедливо равенство

$$\sum_{k,j=1}^{d} b_k \bar{b}_j e^{-i\lambda\cdot(y_k - y_j)} = \left(\sum_{k=1}^{d} b_k e^{-i\lambda\cdot y_k}\right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{d} b_j e^{-i\lambda\cdot y_j}\right)}$$
$$= |\sum_{k=1}^{d} b_k e^{-i\lambda\cdot y_k}|^2.$$

Отсюда, в силу теоремы Бохнера, следует, что существует такая конечная неотрицательная борелевская мера $\mu^\gamma(t, dy)$ на R^d, что

$$g^\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R^d} e^{-i\lambda\cdot y} \mu^\gamma(t, dy). \tag{3.15}$$

Покажем, что $\mu^\gamma(t, dy)$ удовлетворяет (3.13). Неотрицательную борелевскую меру $\mu^\gamma(t, dy)$ можно интерпретировать как элемент пространства распределений Шварца, и, следовательно, $F^{-1}(g^\gamma) = \mu^\gamma$, и

$$\forall h \in \mathcal{S}(R^d), \quad |\int_{R^d} h(y)\mu^\gamma(t, dy)| \leqslant \|h\|_\infty \mu^\gamma(t, R^d) < \infty.$$

При этом из (3.14) и (3.15) вытекает, что

$$F(u^\gamma) = F(\rho)F(\mu^\gamma)$$

и, следовательно,

$$\tilde{u}^\gamma(t, z) = \rho * \mu^\gamma(t, z). \tag{3.16}$$

Наконец, обозначив $\langle h, \mu(t)\rangle = \int\limits_{R^d} h(y)\mu(t, dy), \quad \forall h \in \mathcal{S}(R^d)$, получим

$$\langle h, \mu(t)\rangle = \langle h, F^{-1}(g^\gamma)\rangle = \langle F^{-1}(h), g^\gamma\rangle$$

$$= \int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(\lambda) \left(\int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} \right.$$

$$\left. \times Q(t, \zeta(\omega), \tilde{u}^\gamma(\zeta(\omega)))\gamma(d\omega)\right) d\lambda = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \left(\int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(\lambda) \right.$$

$$\left. \times e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} d\lambda \right) \exp\left\{ \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s,\omega), \tilde{u}^\gamma(s, \zeta(s,\omega)))ds \right\} \gamma(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} \left(\int\limits_{R^d} F^{-1}(h)(z) e^{-i\lambda\cdot\zeta(t,\omega)} dz \right)$$

$$\times \exp\left\{ \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s,\omega), [\rho * \mu^\gamma](s, \zeta(s,\omega)))ds \right\} \gamma(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} h(\zeta(t,\omega) \exp\left\{ \int\limits_0^t \tilde{c}(\zeta(s,\omega), [\rho * \mu^\gamma](s, \zeta(s,\omega)))ds \right\} \gamma(d\omega),$$

что совпадает с (3.13). Для того, чтобы проверить обратное утверждение предположим, что $(\zeta(t), \mu^\gamma(t, dz))$ удовлетворяют (3.12), (3.13) и положим $\tilde{u}^\gamma(t,z) = [\rho * \mu^\gamma](t,z)$. При этом уравнение (3.12) совпадет с уравнением (3.10). Поскольку $\mu^\gamma(t)$ финитна, то уравнение (3.11) можно получить, выбрав $h(y) = \rho(z - y)$ в (3.13).

Для проверки эквивалентности систем (3.10), (3.11) и (3.12), (3.13) достаточно заметить, что из (3.16) следует, что если $Leb(\{z \in R^d : F(\rho)(\lambda) = 0\}) = 0$, (где Leb -мера Лебега), то $F(\mu^\gamma) = \frac{F(\tilde{u}^\gamma)}{F(\rho)}$ п.в. Таким образом, μ^γ однозначно определяет $\tilde{u}^\gamma$ и наоборот.

Покажем, что система (3.12)–(3.13) связана с задачей Коши следующего вида

$$\frac{\partial\mu^\gamma(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[B_{ij}(y,[\rho*\mu^\gamma](t,y))\mu^\gamma(t)\right]$$
$$+ c(y,[\rho*\mu^\gamma](t))\mu^\gamma(t), \quad \mu^\gamma(0,dy)=\mu_0(dy), \tag{3.17}$$

где $B_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{d} A_{ik}A_{kj}$. □

Теорема 3.3. *Мера* $\mu^\gamma(t)$ *заданная соотношением* (3.13) *удовлетворяет в слабом смысле задаче Коши* (3.17).

Доказательство. Пусть $h \in C_0^\infty(R_+^d)$ и $\zeta(t)$ – случайный процесс, удовлетворяющий (3.13). Рассмотрим случайный процесс

$$\phi(s) = h(\zeta(t))Q(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s))).$$

Воспользовавшись формулой Ито, получим

$$\begin{aligned} d\phi(s) &= dh(\zeta(s))Q(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s))) \\ &+ h(\zeta(s))dQ(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s))) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\nabla^2 h(\zeta(s))\tilde{B}(\zeta(s),[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)))] \\ &\times Q(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)))ds \\ &+ \tilde{c}(\zeta(s),[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)Q(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)))ds \\ &+ Q(s,\zeta,[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)))\tilde{A}(\zeta(s),[\rho*\mu^\gamma](s,\zeta(s)))dw(s). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Интегрируя по s в пределах от 0 до t, вычисляя математическое ожидание и принимая во внимание определение μ^γ, получим

$$\begin{aligned} \int_{R^d} h(z)\mu^\gamma(t,dz) &= \int_{R^d} h(z)\mu_0(dz) \\ &+ \int_0^t\int_{R^d} h(z)\tilde{c}(z,[\rho*\mu^\gamma](s,z))\mu^\gamma(s,dz)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Tr}[\nabla^2 h(z)\tilde{B}(z,[\rho*\mu^\gamma](s,z))]\mu^\gamma(s,dz)ds. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* **C 2**. *Тогда функция* $u^\gamma(t,y)$, *заданная соотношением* (3.16) *является слабым решением задачи Коши–Неймана* (3.1), (3.2) *в полупространстве* R^d.

Доказательство. Пусть $\xi(t), k(t), u(t,y) y \in R^d_+$ удовлетворяют системе (3.5)–(3.7) и $\xi(t)$ – марковский процесс в R^d_+ с отражением на границе. Используя свойства отображения Γ можно проверить, что липшицевость коэффициентов $A^v(y)$ и $c^v(y)$ позволяет доказать оценку $\mathbf{E}\|\zeta_x(t)-\zeta_y(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2$, где $\zeta_x(t)$ – решение уравнения с неслучайным начальным условием $\xi_0 = x$. Из свойств преобразования Γ вытекает справедливость оценки $\mathbf{E}\|\xi_x(t)-\xi_y(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2$.

Обозначим $U(t)$ эволюционное семейство операторов, порожденных процессом $\xi_x(t)$ с фазовым пространством R^d_+. Из оценки $\mathbf{E}\|\zeta_x(t) - \zeta_y(t)\|^2 \leqslant C\|x-y\|^2$ следует, что операторы $U(t)$ отображают пространство непрерывных ограниченных функций, заданных на R^d_+, в себя, т.е. процесс $\xi_x(t)$ является феллеровским процессом. Рассмотрим генератор $\mathcal{A}^u$ этого процесса,

$$\mathcal{A}^u = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{E}f(\xi_{0,x}(t)) - f(x)}{t},$$

заданный на пространстве $C^2(R^d)$ дважды дифференцируемых функций f таких, что $\frac{\partial f(x)}{\partial x^d}|_{x^d=0} = 0$. При этом поскольку $\xi(t) = \Gamma_t(\zeta)$ то, применяя формулу Ито, нетрудно проверить, что

$$\mathcal{A}^u f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x,u)\nabla^2 f(x) A^*(x,u).$$

Если $\frac{\partial f(x)}{\partial x^d} \neq 0$ для некоторой точки $x = x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^{d-1}, 0)$, то $f \notin D_{\mathcal{A}^u}$. Действительно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^d}E_{x_0}\xi^d(t) + \alpha(t)\right), \qquad (3.19)$$

где $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{t} = C < \infty$. При этом

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{x_0}\xi^d(t) &= \mathbf{E}\left(\zeta^d_{x^d_0}(t) - \min_{s\leqslant t}\zeta^d_{x^d_0}\right)\\
&= -\mathbf{E}\left(\min_{s<t}\int\limits_0^s \sum_{k=1}^d A^u_{dk}(\Gamma(\zeta_{x_0}))dw^k(\tau)\right) + O(t)\\
&\sim \mathbf{E}\max_{s\leqslant bt}\bar{w}(s) \sim C\sqrt{t}, \quad C>0 \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

для малых t и $0 < b < B_d(x,v) = \sum\limits_{k=1}^d A^2_{dk}(x,v)$. Эта оценка вытекает из того факта, что

$$
\int\limits_0^s \sum_{k=1}^d A_{dk}(\Gamma(\zeta_{x_0}))dw^k(\tau)
$$

имеет то же распределение, что и $\bar{w}(\int\limits_0^s B_d(\Gamma(\zeta_{x_0}))d\tau)$, где $\bar{w}$ – некоторый винеровский процесс. Из (3.19) и (3.20) вытекает, что

$$
\lim_{t\to 0}|U(t)f(x_0) - f(x_0)| = \infty
$$

и, следовательно, $f(x) \notin D_{\mathcal{A}^u}$.

Таким образом, функция $\tilde{u}^\gamma(t,z)$, заданная соотношением (3.16), определяет функцию $u(t,y)$, удовлетворяющую в слабом смысле задаче Коши–Неймана (3.1), (3.2) в полупространстве R^d_+. $\square$

Список литературы

1. H. P. McKean, *A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations.* — Proceedings of the National Academy of Sci. **56**, No. 6 (1966), 1907–1911.
2. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Probabilistic representation of a class of non-conservative nonlinear Partial Differential Equations.* — ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **13**, (2016), 1189–1233.
3. А. В. Скороход, *Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 3 (1961), 287–298.
4. М. И. Фрейдлин, *Диффузионные процессы с отражением и задача с косой производной на многообразии с краем.* — ТВиП **8**, No. 1 (1963), 80–88.
5. A. Sznitman, *Nonlinear reflecting diffusion process and the propagation of chaos and associated fluctuations.* — J. Funct. Anal. **56**, No. 3 (1984), 311–336.
6. A.-S. Sznitman, *Topics in propagation of chaos.* In Ecole d'éte de probabilités de Saint-Flour XIX, 1989, Springer, (1991), 165–251.

7. А. В. Скороход, И. И. Гихман, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова думка, Киев, 1968.
8. G. A. Brosamler, *A probabilistic solution of the Neumann problem.* — Math. Scand. **38**, (1976), 137–147.
9. M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations.* Princeton Univ. Press, 1985.
10. B. Jourdain, S. Méléard, *Probabilistic interpretation and particle method for vortex equations with Neumann's boundary condition.* — Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **47** (2004), 597–624.
11. R. F. Bass, P. Hsu, *Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains.* — Ann. Probab. **19**, No. 2 (1991), 486–508.
12. A. Benchérif-Madani, E. Pardoux, *A probabilistic formula for a Poisson equation with Neumann boundary condition.* — Stoch. Anal. Appl. **27**, (2009), 739–746.
13. R. F. Anderson, S. Orey, *Small random perturbation of dinamical systems with reflection boundary.* — Nagoya Math. J. **60** (1976), 189–216.

Belopolskaya Ya. I. Stochastic model of the Cauchy–Neumann problem for nonlinear parabolic equations.

We derive stochastic equations to describe reflected diffusion processes associated with the Cauchy–Neumann problem for nonlinear parabolic equations in non-divergent form in the half-space. As a result we obtain probabilistic representations of weak solutions to this problem.

Университет Сириус,
354340, Российская Федерация,
Олимпийский пр., д. 1,
Краснодарский край, г. Сочи;
СПбГАСУ,
ул. 2-я Красноармейская 4
190005, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 15 ноября 2021 г.