Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 505, 2021 г.

И. А. Алексеев

УСТОЙЧИВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ УСТОЙЧИВОСТИ α. СЛУЧАЙ $|\alpha - 1/2| < 1/2$

§1. Введение

Данная работа посвящена построению аналогов α-устойчивых случайных величин, отвечающих комплексным значениям α, удовлетворяющих условию $|\alpha - 1/2| < 1/2$.

Построенные α-устойчивые случайные величины будут комплекснозначными, стандартным образом мы будем отождествлять их с двумерными случайными векторами. Данные α-устойчивые величины будут обладать обычным свойством алгебраической устойчивости по отношению к комплексному параметру α.

Напомним, что для вещественных α случайная величина ξ называется α-устойчивой, если для всех b_1, $b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что $b_1\xi_1 + b_2\xi_2 \overset{d}{=} b\xi + a$ (здесь и далее символом $\overset{d}{=}$ будем обозначать совпадение по распределению), где ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ. Классические одномерные устойчивые распределения хорошо изучены (см. например, [3, 4, 11]).

Хорошо известно, что характеристическая функция одномерного устойчивого распределения может иметь только следующий вид

$$\mathbb{E}e^{ip\xi} = \exp\Big\{ipa - C|p|^\alpha\big(1 - i\varkappa \operatorname{sgn}(p)\omega(p,\alpha)\big)\Big\}, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $C \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \varkappa \leqslant 1$,

$$\operatorname{sgn}(p) = \begin{cases} \frac{p}{|p|}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0 \end{cases}, \omega(p,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi}\log|p|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Классические α-устойчивые распределения определены только для значений $\alpha \in (0, 2]$. Обобщение на другие значения α требует привлечения новых идей. В частности, А. М. Вершиком с соавторами и

Ключевые слова: устойчивые распределения, безгранично делимые распределения, предельные теоремы, процессы Леви.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2019-1620.

М. А. Лифшицем (см. [1,6]) были построены α-устойчивые распределения для $\alpha = 0$. В работах [8,12] были построены невероятностные аналоги α-устойчивых распределений для случаев $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Затем в работе [7] М. В. Платоновой этот метод был обобщен на случай $\alpha > 2$. При помощи построенных α-устойчивых величин были получены вероятностные представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувиля.

Поясним здесь основную идею построения устойчивых случайных величин, соответствующих комплексным α. Для простоты ограничимся здесь аналогами односторонних устойчивых величин.

Классическим подходом является задание устойчивых случайных величин стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере. Напомним, что если Y – пуассновское случайное поле с некоторой мерой интенсивности $\mu(dy)$ (см. например, [5]), то ему отвечает пуассоновская случайная мера, задаваемая формулой $\nu(A) = \operatorname{card}(X \cap A)$. При этом,

$$\mathbb{E}\nu(A) = \mu(A).$$

Для задания односторонних устойчивых случайных величин обычно используется пуассоновское случайное поле Y и отвечающая ему пуассоновская случайная мера $\nu_1(dy)$ на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mu_1(dy) = \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. Известно, что α-устойчивая случайная величина с параметрами $C = \cos(\pi\alpha/2)\Gamma(-\alpha)$, $a = 0$, и $\varkappa = 1$ задается следующим стохастическим интегралом (см. например, [11])

$$\xi_1 = \int\limits_0^\infty y\nu_1(dy) = \sum_{y \in Y} y. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $y = x^{-1/\alpha}$. По теореме об отображении (см. [5], с. 33), множество $X = \{y^{-\alpha} : y \in Y\}$ является пуассоновским полем с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \frac{1}{\alpha}dx$, где ν – отвечающая полю X, пуассоновская случайная мера. Делая замену переменной, получаем

$$\int\limits_0^\infty y\nu_1(dy) \stackrel{d}{=} \int\limits_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx).$$

Так как устойчивые случайные величины при умножении на вещественную константу остаются устойчивыми, то одностороннюю α-устойчивую случайную величину можно задавать следующим стохастическим интегралом

$$\xi = \int_0^\infty x^{-1/\alpha} \nu(dx) = \sum_{x \in X} x^{-1/\alpha}, \tag{3}$$

где X – пуассоновское поле на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$. Здесь ν – пуассоновская случайная мера, отвечающая полю X.

Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{C}$. В этом случае для определения устойчивой случайной величины формула (2) не подходит (мера интенсивности не может быть комплексной). Вместо нее мы будем использовать формулу (3).

Введем следующие параметры

$$a = \operatorname{Re} \alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im} \alpha^{-1}; \quad \beta = 1/a; \quad \gamma = b/a. \tag{4}$$

Параметр β будем называть *параметром устойчивости*, параметр γ – *параметром комплексности.* Для вещественных α имеем $\beta = \alpha$, $\gamma = 0$.

В параграфе 2 будет показано, что с точностью до мультипликативной константы случайная величина, определенная (3), по распределению совпадает со следующим стохастическим интегралом

$$\xi_1 = \int_0^\infty x e^{i\gamma \ln x} \nu(dx) = \sum_{x \in X_1} x e^{i\gamma \ln x}, \tag{5}$$

где X_1 – пуассоновское поле на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности

$$\mu(dx) = \tfrac{dx}{x^{1+\beta}}.$$

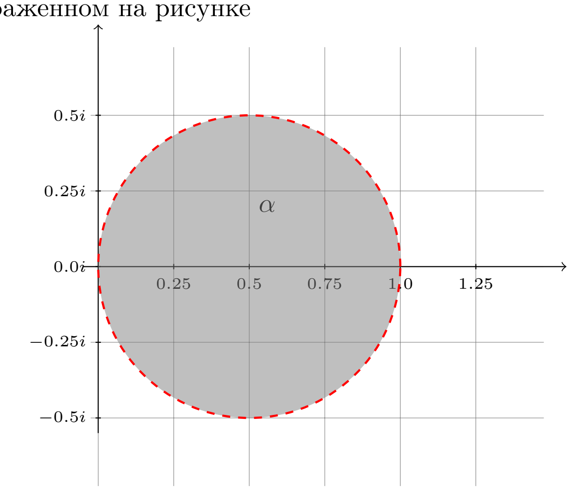
Представление (5) задает комплексную случайную величину, которую будем одновременно интерпретировать и как двумерный случайный вектор. Такая случайная величина является комплексным аналогом односторонней случайной величины. С использованием этих соображений также будут определены аналоги неодносторонних устойчивых случайных величин, как и в вещественном случае, зависящих от параметров $c_- \geqslant 0$, $c_+ \geqslant 0$, $c_- + c_+ > 0$. Распределение α-устойчивых случайных величин будет двумерным безгранично делимым распределением с мерой Леви, сосредоточенной на кривой

$$\Gamma = \{xe^{i\gamma \ln |x|} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

В рамках настоящей работы рассматриваются комплексные параметры α, удовлетворяющие условию

$$|\alpha - 1/2| < 1/2. \tag{6}$$

Рассмотрение последующих параметров α является объектом следующих работ. На комплексной плоскости такие α лежат в круге, изображенном на рисунке



Далее, в параграфе 2 будет показано, что для α, удовлетворяющих (6), ряд (5) сходится абсолютно с вероятностью единица. Также в параграфе 2 выводятся формулы для характеристической функции устойчивого распределения, в параграфе 3 исследуется свойство устойчивости, в параграфе 4 доказывается теорема о сходимости сумм независимых случайных величин. В параграфе 5 строятся аналоги устойчивых процессов Леви, а также находится генератор соответствующей полугруппы операторов.

Автор выражает благодарность Н. В. Смородиной за внимание и поддержку в работе и А. А. Хартову за ценные советы.

§2. Определение α-устойчивого вектора

Рассмотрим комплексный параметр α. Будем рассматривать α, удовлетворяющий условию (6). Покажем, что в этом случае ряд (3) сходится абсолютно с вероятностью единица. Пусть $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Случайный вектор $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ тоже является стохастическим интегралом по пуассоновскому полю X на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности $\mu(dx) = dx$ от вектор-функции (напомним, что $a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}$).

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^{-a}\cos(b\ln x)\\ -x^{-a}\sin(b\ln x)\end{pmatrix}.$$

По теореме Кэмпбелла (см. [5], с. 44, 45) получаем, что данный стохастический интеграл сходится абсолютно с вероятностью единица тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^\infty \min\bigl(|f(x)|, 1\bigr)\mu(dx) = \int\limits_0^\infty \min\bigl(x^{-a}, 1\bigr)\mu(dx) < \infty.$$

Это условие равносильно тому, что $a > 1$. Это в точности будут α, для которых выполнено условие (6).

Случайную величину, задаваемую (3), оказалось сложно обобщать на случай неодносторонних распределений. Чтобы справиться с этой проблемой немного модифицируем наше определение.

Рассмотрим случайный вектор $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \int\limits_0^\infty \begin{pmatrix} x^{-a}\cos(b\ln x)\\ -x^{-a}\sin(b\ln x)\end{pmatrix}\nu(dx). \tag{7}$$

В стохастическом интеграле (7) сделаем замену переменной $y = x^{-a}$. Пуассоновское поле X с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$ перейдет в пуассоновское поле Y с мерой интенсивности

$$\mathbb{E}\tilde\nu(dy) = \tfrac{dy}{ay^{1+1/a}} = \tfrac{dy}{ay^{1+\beta}}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \int\limits_0^\infty y\begin{pmatrix}\cos(b/a\ln y)\\ \sin(b/a\ln y)\end{pmatrix}\tilde\nu(dy) = \int\limits_0^\infty y\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln y)\\ \sin(\gamma\ln y)\end{pmatrix}\tilde\nu(dy).$$

Последняя формула есть мотивация для введения следующего определения.

Определение 1. Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (6), и параметрами $c_- \geqslant 0$, $c_+ \geqslant 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл

$$\xi = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma \ln|x|} \nu(dx) \tag{8}$$

по пуассоновской случайной мере ν с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(dx) = \mu(dx) = \begin{cases} \frac{c_- dx}{|x|^{1+\beta}}, & x < 0; \\ \frac{c_+ dx}{x^{1+\beta}}, & x > 0. \end{cases} \tag{9}$$

(параметры γ, β определены в (4)).

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln|x|) \\ \sin(\gamma \ln|x|) \end{pmatrix} \nu(dx). \tag{10}$$

Как и в вещественном случае назовем устойчивую величину *симметричной*, если $c_- = c_+$. Если $c_- = 0$ или $c_+ = 0$, то будем говорить, что устойчивая величина называется *односторонней*.

Найдем два полезных представления характеристической функции $H(p_1, p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. 1. *Справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} = r^\beta \Phi(\varphi + \gamma \ln r), \tag{11}$$

где $(p_1, p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, Ln *– логарифм, определенный по непрерывности с условием* $\mathrm{Ln}\, H(0,0) = 0$, *и*

$$\begin{aligned}
\Phi(\psi) &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{i\cos\left(\psi - \gamma\ln|y|\right)y} - 1\right)\mu(dy) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{i\cos(\psi-\gamma\ln|y|)y} - 1\right)\tfrac{c_- dy}{|y|^{1+\beta}} \\
&+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{i\cos(\psi-\gamma\ln y)y} - 1\right)\tfrac{c_+ dy}{y^{1+\beta}}, \quad \psi\in\mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{12}$$

2. *Справедлива формула*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\, H(p_1,p_2) = a|\alpha|\Big[&\int\limits_{\Gamma_0} \left(e^{i(p_1y_1+p_2y_2)} - 1\right)\tfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\beta}} \\
&+ \int\limits_{\Gamma_1} \left(e^{i(p_1y_1+p_2y_2)} - 1\right)\tfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\beta}}\Big],
\end{aligned} \tag{13}$$

где $y = (y_1, y_2)$, dS_y *– длина дуги, а кривые* Γ_0, Γ_1 *определяются как*

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 =& \big\{(w\cos(\gamma\ln w), w\sin(\gamma\ln w))| \quad w>0\big\}; \\
\Gamma_1 =& \big\{(w\cos(\gamma\ln|w|), w\sin(\gamma\ln|w|))| \quad w<0\big\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Докажем (11). Используя теорему Кэмпбелла, получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\, H(p_1,p_2) &= \mathrm{Ln}\,\mathbb{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{i\left(p_1\cos(\gamma\ln|y|)+p_2\sin(\gamma\ln|y|)\right)y} - 1\right)\mu(dy), \\
& p_1,p_2\in\mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $p_1 = r\cos\varphi$, $p_2 = r\sin\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = &\int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{ir\cos(\varphi - \gamma\ln|y|)y} - 1\right)\tfrac{c_- dy}{|y|^{1+\beta}}\\ &+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y)y} - 1\right)\tfrac{c_+ dy}{y^{1+\beta}}.\end{aligned}$$

В обоих интегралах сделаем линейную замену $w = ry$ и получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = r^\beta \Bigg[&\int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln|w|)w} - 1\right)\tfrac{c_- dw}{|w|^{1+\beta}}\\ &+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)w} - 1\right)\tfrac{c_+ dw}{w^{1+\beta}}\Bigg]\\ = r^\beta &\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln|w|)w} - 1\right)\mu(dw)\\ = r^\beta &\Phi(\varphi + \gamma\ln r).\end{aligned}$$

Докажем (13). Рассмотрим сначала интеграл по положительной полуоси. Обозначим его через I_1. Тогда

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{i\left(p_1\cos(\gamma\ln w)+p_2\sin(\gamma\ln w)\right)w} - 1\right)\tfrac{c_+ dw}{w^{1+\beta}}.$$

Сделаем замену $y_1 = w\cos(\gamma\ln w)$, $y_2 = w\sin(\gamma\ln w)$. Посчитаем модуль градиента для такой замены.

$$\begin{aligned}\left|\left(\tfrac{dy_1}{dw}, \tfrac{dy_2}{dw}\right)\right|^2 =&\left(\cos(\gamma\ln w) - \gamma\sin(\gamma\ln w)\right)^2\\ +&\left(\sin(\gamma\ln w) + \gamma\cos(\gamma\ln w)\right)^2 = 1 + \gamma^2.\end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$I_1 = \left(1 + \gamma^2\right)^{-1/2} \int\limits_{\Gamma_0} \left(e^{i(p_1y_1+p_2y_2)} - 1\right)\tfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\beta}},$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Gamma_0$, Γ_0 определено в (14), dS_y – длина дуги, заданная на кривой Γ_0. Отметим, что

$$1 + \gamma^2 = 1 + (b/a)^2 = \tfrac{1}{a^2}(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{a^2|\alpha|^2}.$$

Таким образом,

$$\big(1 + \gamma^2\big)^{-1/2} = a|\alpha|.$$

Аналогично рассмотрим интеграл по отрицательной полуоси. Обозначим его через I_2.

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \big(e^{i\left(p_1 \cos(\gamma \ln |w|) + p_2 \sin(\gamma \ln |w|)\right)w} - 1\big)\tfrac{c_- dw}{|w|^{1+\beta}}.$$

Сделаем замену $y_1 = w\cos(\gamma \ln(-w))$, $y_2 = w\sin(\gamma \ln(-w))$. Посчитаем модуль градиента для такой замены.

$$\Big|\big(\tfrac{dy_1}{dw}, \tfrac{dy_2}{dw}\big)\Big|^2 = \big(\cos(\gamma \ln |w|) + \gamma \sin(\gamma \ln |w|)\big)^2 + \big(\sin(\gamma \ln |w|) - \gamma \cos(\gamma \ln |w|)\big)^2 = 1 + \gamma^2.$$

В итоге получаем, что

$$I_2 = a|\alpha| \int\limits_{\Gamma_1} \big(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\big)\tfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\beta}},$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Gamma_1$, Γ_1 определен в (14), dS_y – длина дуги, заданная на кривой Γ_1.

Таким образом, получаем, что логарифм характеристической функции принимает вид

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = a|\alpha| \Big[\int\limits_{\Gamma_0} \big(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\big)\tfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\beta}} + \int\limits_{\Gamma_1} \big(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\big)\tfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\beta}}\Big].$$

□

Из (13) немедленно вытекает , что вектор $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ является безгранично делимым, а его мера Леви сосредоточена на кривой $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Отметим, что Γ_0 – логарифмическая спираль, определяемая в полярных координатах следующим уравнением

$$\ln r = \gamma^{-1}\varphi.$$

Важными свойствами логарифмической кривой являются свойства замкнутости и самоподобия. Именно, для любого $d > 0$ выполнено

$$d^{1+i\gamma}\Gamma_0 = de^{i\gamma\ln d}\Gamma_0 = \Gamma_0 \tag{16}$$

и

$$\{xe^{i\gamma\ln x} : x > d\} = de^{i\gamma\ln d}\{xe^{i\gamma\ln x} : x > 1\}. \tag{17}$$

Γ_1 получается поворотом логарифмической спирали Γ_0 на угол π.

Заметим еще, что если $c_- = c_+$, то $\operatorname{Im}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = 0$. Таким образом, соответствующее распределение действительно является симметричным.

В дальнейшем нам понадобится еще одно утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $p_1 + ip_2 = d^{1/\overline{\alpha}}e^{i\psi}$. *Тогда*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = d \cdot \Phi(\psi).$$

(*Здесь и далее через* $\bar{z}$ *обозначается комплексное сопряжение числа* z.)

Доказательство. Так как

$$d^{1/\overline{\alpha}}e^{i\psi} = d^a \exp\{i\big(-b\ln d + \psi\big)\},$$

то $r = d^a$, $\varphi = -b\ln d + \psi$. Подставим в (11) и получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) &= (d^a)^\beta\Phi(-b\ln d + \psi + \gamma\ln d^a)\\ &= (d^a)^{1/a}\Phi(-b\ln d + \psi + b/a\ln d^a).\end{aligned}$$

После всех сокращений получим нужный результат. □

Лемма 1 показывает, что в некотором смысле логарифм характеристической функции является возведением в степень $\bar{\alpha}$, что соответствует вещественному случаю.

Отметим, что любое комплексное число представимо в виде $d^{1/\overline{\alpha}}e^{i\psi}$. Отсюда следует, что любой вектор $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ можно представить в виде $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, где $z = d^{1/\overline{\alpha}}e^{i\psi}$.

§3. Матричное понятие устойчивости

Докажем, что для полученных α-устойчивых случайных величин также выполнено условие алгебраической устойчивости.

Теорема 2. *Пусть ξ – α-устойчивая случайная величина, ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ. Тогда*

$$d_1 e^{i\gamma \ln d_1}\xi_1 + d_2 e^{i\gamma \ln d_2}\xi_2 \stackrel{d}{=} d e^{i\gamma \ln d}\xi \quad \textit{тогда и только тогда, когда}$$

$$d_1^\beta + d_2^\beta = d^\beta, \tag{18}$$

где d_1, d_2, $d > 0$.

Доказательство. Для начала рассмотрим $d_1 > 0$ и пуассоновское поле X на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \mu(dx)$, где $\mu(dx)$ определяется равенством (9). Далее рассмотрим отображение $x \mapsto d_1 x$, где $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда пуассоновское поле X перейдет в пуассоновское поле $\tilde{X}$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\tilde{\nu}(dx) = d_1^\beta \cdot \mu(dx)$. Рассмотрим стохастический интеграл от функции $xe^{i\gamma \ln |x|}$ по мере $\tilde{\nu}$. Обозначим его через $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 + i\tilde{\xi}_2$. Получим

$$\tilde{\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma \ln |x|}\tilde{\nu}(dx) \stackrel{d}{=} d_1 e^{i\gamma \ln d_1} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma \ln |x|}\nu(dx).$$

Отсюда следует, что случайная величина $d_1 e^{i\gamma \ln d_1}\xi_1$ является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu_1(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu_1(dx) = d_1^\beta \mu(dx).$$

Аналогично получаем, что случайная величина $d_2 e^{i\gamma \ln d_2}\xi_2$ является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu_2(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu_2(dx) = d_2^\beta \mu(dx).$$

Из независимости случайных величин ξ_1, ξ_2 следует, что случайная величина $d_1 e^{i\gamma \ln d_1}\xi_1 + d_2 e^{i\gamma \ln d_2}\xi_2$ также является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu(dx) = \big(d_1^\beta + d_2^\beta\big)\mu(dx).$$

Это означает, что левая часть (18) равносильна следующему

$$d = \big(d_1^\beta + d_2^\beta\big)^{1/\beta},$$

что и требовалось доказать. □

Переформулируем теперь условие устойчивости в более привычном виде.

Следствие 1. *Пусть* ξ *–* α*-устойчивая случайная величина,* ξ_1*,* ξ_2 *– независимые копии* ξ *и пусть комплексные числа* A*,* B *лежат на логарифмической спирали* Γ_0*, определенной в* (14)*. Тогда существует* $C \in \Gamma_0$ *такое, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi,$$

причем

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha.$$

Доказательство. Так как A, $B \in \Gamma_0$, то существуют d_1, $d_2 > 0$ такие, что

$$A = d_1 e^{i\gamma \ln d_1}; \quad B = d_2 e^{i\gamma \ln d_2}.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} d e^{i\gamma \ln d}\xi,$$

где $d_1^\beta + d_2^\beta = d^\beta$.

Пусть $C = de^{i\gamma \ln d}$. Тогда осталось показать, что $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$. Для этого заметим, что

$$d_1 = A^{1/(1+i\gamma)}; \quad d_2 = B^{1/(1+i\gamma)}; \quad d = C^{1/(1+i\gamma)}.$$

Тогда имеем

$$A^{\beta/(1+i\gamma)} + B^{\beta/(1+i\gamma)} = C^{\beta/(1+i\gamma)}.$$

Воспользуемся (4) и получим

$$\frac{\beta}{(1+i\gamma)} = \frac{1-i\gamma}{a(1+\gamma^2)} = \frac{a^2}{a(a^2+b^2)} - i\frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \alpha.$$

$\square$

Посмотрим во что перейдет условие устойчивости с точки зрения матричной алгебры.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$. Для $d > 0$ через $M_\gamma(d)$ обозначим матрицу

$$M_\gamma(d) = d\begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln d) & -\sin(\gamma \ln d) \\ \sin(\gamma \ln d) & \cos(\gamma \ln d) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_\gamma(d) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$y_1 + iy_2 = d^{1+i\gamma}(x_1 + ix_2). \tag{20}$$

Из (20) немедленно следует, что для любых d_1, $d_2 > 0$

$$M_\gamma(d_1)M_\gamma(d_2) = M_\gamma(d_1 d_2). \tag{21}$$

Через S_γ обозначим множество матриц

$$S_\gamma = \{M_\gamma(d) : \, d > 0\}.$$

Из (21) вытекает, что отображение $d \mapsto M_\gamma(d)$ есть гомоморфизм групп. Значит S_γ – группа по умножению, изоморфная группе положительных чисел по умножению.

Отметим, что для любого $d > 0$ матрица $M_\gamma(d)$ постоянным множителем отличается от унитарной матрицы и значит для нее корректно определено возведение в степень (см. например, [2]). Для унитарных матриц возведение в вещественную степень означает возведение собственных чисел в данную степень. Воспользуемся этим соображением и получим, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ соответствует умножению на комплексное число

$$\left(d^{1+i\gamma}\right)^\alpha = d^{\beta(a+ib)\alpha} = d^\beta,$$

что означает, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ есть диагональная матрица вида

$$M_\gamma^\alpha(d) = \begin{pmatrix} d^\beta & 0 \\ 0 & d^\beta \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Перепишем также утверждение теоремы 2 в матричных терминах.

Следствие 2. *Пусть ξ – α-устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ – независимые копии ξ и пусть матрицы M_1, $M_2 \in S_\gamma$. Тогда существует $M \in S_\gamma$ такое, что*

$$M_1\xi^{(1)} + M_2\xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M\xi,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha.$$

Это утверждение легко следует из теоремы 2 и (22).

Как и для вещественных случайных величин можно получить условие устойчивости в следующем виде.

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$S_n = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{d}{=} \xi, \tag{23}$$

где ξ_k – независимые копии комплексной случайной величины ξ.

Доказательство. Докажем (23) по индукции. База $n = 2$ следует из теоремы 2. Покажем теперь индукционный переход.

Рассмотрим

$$d_1 = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{1/\beta}, \quad d_2 = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/\beta}.$$

Тогда из теоремы 2 следует, что

$$\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{1/\alpha} \xi_0 + \Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/\alpha} \xi_n \overset{d}{=} \xi.$$

По индукционному предположению имеем

$$\xi_0 \overset{d}{=} \frac{1}{(n-1)^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k.$$

Тогда

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k + \frac{1}{n^{1/\alpha}} \xi_n \overset{d}{=} \xi.$$

□

§4. Предельная теорема для сумм независимых случайных величин

Пусть $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных одномерных случайных величин. Через $\mathcal{P}$ обозначим распределение случайной величины X_1, а через $F(x)$ — соответствующую функцию распределения. Предположим, что для некоторого $\beta \in (0,1)$ распределение случайной величины X_1 удовлетворяет следующим двум условиям

(i) $F(x) = \frac{c_- + o(1)}{\beta |x|^\beta} h(x)$, $x < 0$;

(ii) $1 - F(x) = \frac{c_+ + o(1)}{\beta x^\beta} h(x)$, $x > 0$;

причем $h(x)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией, то есть

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \quad \text{для всех}\, c > 0.$$

Хорошо известно (см. например [4]), что тогда распределение $\mathcal{P}$ принадлежит области притяжения одномерной устойчивой случайной величины с параметрами c_1/β, c_2/β (в представлении (1) параметры $\varkappa = \frac{c_+-c_-}{c_++c_-}$, $C = \frac{c_++c_-}{\beta}$), то есть существует последовательность $B_n \to \infty$ такая, что последовательность случайных величин

$$S_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

слабо сходится к одномерной устойчивой случайной величине с параметрами c_1/β, c_2/β.

Выберем параметр $\gamma \in \mathbb{R}$. Для каждого натурального n определим случайную величину ζ_n, полагая

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} e^{-i\gamma \ln B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\gamma \ln |X_k|}. \tag{24}$$

В векторной форме мы имеем

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \frac{1}{B_n}\begin{pmatrix} \cos(\ln B_n) & \sin(\ln B_n) \\ -\sin(\ln B_n) & \cos(\ln B_n)\end{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} X_k \begin{pmatrix}\cos(\gamma \ln |X_k|) \\ \sin(\gamma \ln |X_k|)\end{pmatrix} \\ &= \tilde{B}_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \begin{pmatrix}\cos(\gamma \ln |X_k|) \\ \sin(\gamma \ln |X_k|)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть распределение* (X_k) *удовлетворяет условиям* (i)–(ii)*, и случайная величина* ζ_n *определена равенством* (24)*. Тогда* ζ_n *слабо сходится к* ξ*, где* ξ *–* α*-устойчивая случайная величина с параметрами* β*,* γ*,* c_-, c_+ *(см. определение* 1*).*

Доказательство. В теореме 1 доказано, что распределение α-устойчивой величины с параметрами β, γ, c_-, c_+ является безгранично делимым с мерой Леви $\nu(dx)$ равной

$$\nu(dx_1.dx_2) = \begin{cases} a|\alpha| \frac{c_+ dS_x}{|x|^{1+\beta}}, & x \in \Gamma_0, \\ a|\alpha| \frac{c_- dS_x}{|x|^{1+\beta}}, & x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

где Γ_0, Γ_1 определены в (14).

Пусть $\tilde{\mathcal{P}}$ – распределение комплексной случайной величины $X_1 e^{i\gamma \ln |X_1|}$. Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что выполнены следующие два условия (см. например, [9, 10]) I $n\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n S) \to \nu(S)$, где S – борелевское множество в $\mathbb{R}^2$ такое, что $\nu(\partial S) = 0$.

II Верно следующее равество

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n\Bigg[\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n dx) -$$

$$\Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n dx)\Big)^2\Bigg] = 0.$$

Покажем I. Рассмотрим

$$S = \Gamma_0^d = \{xe^{i\gamma\ln|x|} : x > d\}.$$

Из (17) получаем, что

$$n\mathbb{P}\big(X_1e^{i\gamma\ln|X_1|} \in \tilde{B}_n\Gamma_0^d\big) = n\mathbb{P}\big(X_1e^{i\gamma\ln|X_1|} \in \Gamma_0^{B_n d}\big)$$
$$= n\mathbb{P}\big(X_1 > B_n d\big) = n(1 - F(B_n d)).$$

Из теорем 1.7.3 и 2.2.1 в [4] следует, что

$$n\mathbb{P}\big(X_1e^{i\gamma\ln|X_1|} \in \tilde{B}_n\Gamma_0^d\big) \to c_+d^{-\beta}/\beta = \nu(\Gamma_0^d).$$

Аналогично получаем для $S = \Gamma_1^d = \{xe^{i\gamma\ln|x|} : x < -d\}$, что

$$n\mathbb{P}\big(X_1e^{i\gamma\ln|X_1|} \in \tilde{B}_n\Gamma_1^d\big) \to c_-d^{-\beta}/\beta = \nu(\Gamma_1^d).$$

Тогда условие I выполнено для множеств

$$S = \Gamma^{c,d} = \{xe^{i\gamma\ln|x|} : x \in (c,d)\}$$

и их конечных объединений. Любое борелевское множество из Γ по мере приближается конечным числом пересечений множеств вида $\Gamma^{c,d}$. Отсюда следует выполнение условия I.

Осталось показать II. Воспользуемся простейшими неравенствами и получим

$$\Bigg|\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n dx) - \Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n dx)\Big)^2\Bigg|$$
$$\leqslant |t|^2\int\limits_{|x|<\varepsilon}|x|^2\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{B}_n dx) = |t|^2\int\limits_{|x|<\varepsilon}|x|^2 dF(B_n x).$$

В теореме 2.6.1 в [4] было показано, что при выполнении условий (i) – (ii) будет выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n \int\limits_{|x|<\varepsilon} |x|^2 dF(B_n x) = 0,$$

что влечет II и, соответственно, доказывает теорему. □

§5. Процессы Леви с комплексным индексом устойчивости и отвечающие им полугруппы операторов.

Аналогично вещественному случаю можно определить α-устойчивый процесс Леви. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру

$$\nu(ds, dx)$$

на $[0,\infty)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ с интенсивностью

$$\mathbb{E}\nu(ds, dx) = ds\cdot\mu(dx), \tag{26}$$

где мера $\mu(dx)$ определена в (9).

Аналогично вещественному случаю, процесс Леви, отвечающий α-устойчивому распределению с комплексным α зададим стохастическим интегралом.

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma\ln|x|}\nu(ds, dx). \tag{27}$$

В векторном виде данное определение перепишется как

$$\begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln|x|)\\ \sin(\gamma\ln|x|)\end{pmatrix}\nu(ds, dx). \tag{28}$$

Покажем, что определенные таким образом случайные процессы обладают свойством самоподобия. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\xi(t)$ – комплекснозначный случайный процесс, определенный (27). Тогда для любого $t \geqslant 0$ и $d > 0$ выполнено*

$$\xi(d\cdot t) \stackrel{d}{=} d^{1/\alpha}\xi(t). \tag{29}$$

Доказательство. Достаточно показать (29) для $t = 1$. Из общей теории процессов Леви хорошо известно, что $\xi(d)$ также является безгранично делимой случайной величиной с мерой Леви $d \cdot \mu(dx)$, что в данном случае соответствует умножению параметров c_+, c_- на d. Из доказательства теоремы 2 следует

$$\xi(d) \stackrel{d}{=} d^{1/\beta} e^{i\gamma/\beta \ln d} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma \ln x} \nu(ds, dx) = d^{1/\alpha} \xi(1).$$

□

По процессу $\xi(t)$ построим полугруппу операторов, действующую на $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ следующим образом

$$\big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\varphi\big(x_1 - \xi_1(t), x_2 - \xi_2(t)\big). \tag{30}$$

Определим оператор $\mathcal{L} : W_2^1(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}\varphi\big)&(x_1, x_2)\\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma \ln |y|), x_2 - y \sin(\gamma \ln |y|)) - \varphi(x_1, x_2)\Big)\mu(dy).\end{aligned} \tag{31}$$

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувиля порядка* α.

Из общей теории процессов Леви следует, что $\mathcal{L}$ является генератором полугруппы P^t (см. например, [11, теорема 31.5]). Это эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 6. *Функция*

$$u(t, x_1, x_2) = \big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2)$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \tag{32}$$

с начальным условием

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2). \tag{33}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным, и найдем его символ.

Теорема 7. *Оператор $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$h(p_1,p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{i\left(p_1\cos(\gamma\ln|y|)+p_2\sin(\gamma\ln|y|)\right)y} - 1\right)\mu(dy) = r^\beta\Phi(\varphi+\gamma\ln r),$$

где $\Phi(\psi)$ *из* (12).

Доказательство. Пусть $f\in W_2^1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}f}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\big(\mathcal{L}f\big)(x_1,x_2)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big(f(x_1-y\cos(\gamma\ln|y|),x_2-y\sin(\gamma\ln|y|))\\ &- f(x_1,x_2)\Big)\mu(dy)\Bigg)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Так как функция $f\in W_2^1(\mathbb{R})$, то можно воспользоваться теоремой Фубини и получить

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}f}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(f(x_1-y\cos(\gamma\ln|y|),x_2-y\sin(\gamma\ln|y|))\\ &- f(x_1,x_2)\Big)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2\Bigg)\mu(dy).\end{aligned}$$

Воспользуемся простейшими свойствами преобразования Фурье и получим, что

$$\widehat{\mathcal{L}f}(p_1,p_2) = \hat f(p_1,p_2)\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(e^{i(p_1\cos(\gamma\ln|y|)+p_1\sin(\gamma\ln|y|)} - 1\right)\mu(dy).$$

Это доказывает теорему 7. □

Отметим, что в случае $\gamma=0$ мы имеем

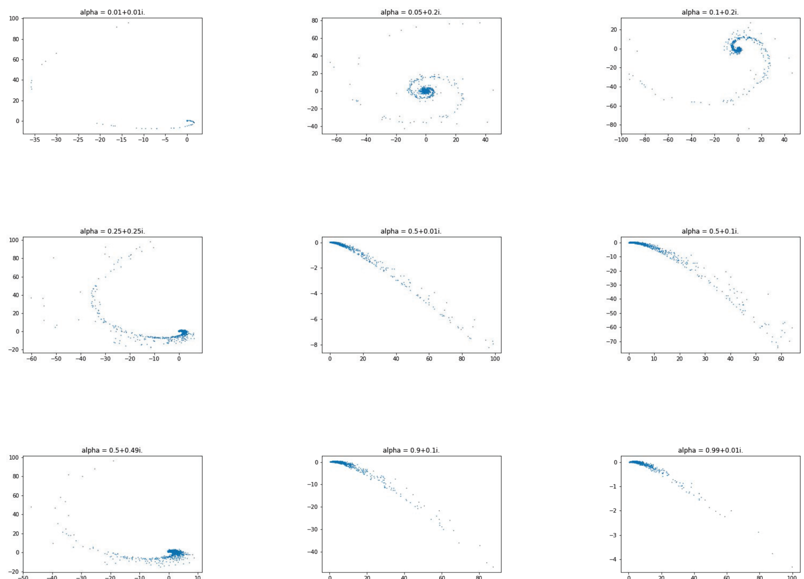
$$\mathcal{L} = \Gamma(-\alpha)D_+^\alpha,$$

где D_+^α – оператор дробной производной порядка α, который также называется оператором Римана-Лиувиля.

§6. Моделирование.

На следующих рисунках представлены результаты моделирования случайной величины $\tilde{\xi} = \int\limits_{0.01}^{\infty} x e^{i\gamma \ln x} \nu(dx)$ при условии, что модуль случайной величины ограничен числом 100 при различных значениях α.

Отметим, что случаи $\alpha = 0.01 + 0.01i$, $0.25 + 0.25i$ и $0.5 + 0.49i$ внешне являются похожими. Это может быть связано с тем, что в этих случаях параметр γ близок или равен -1. Также несложно видеть, что похожими являются картинки при $\alpha = 0.05 + 0.2i$ и $0.1 + 0.2i$. В этих случаях $\gamma = -4$ и -2 соответственно. В остальных случаях, коэффициент γ ближе к нулю.



Список литературы

1. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Коммутативная модель представления группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой.* — Функц. анализ и его прилож. **17**(1983), 70–72.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М. 1966.

3. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М. 1983.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М. 1965.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, Издательство МЦНМО, М. 2007.
6. М. А. Лифшиц, *Инвариантные меры, порождаемые случайными полями с независимыми значениями.* — Функц. анализ и его прил. **19** (1985), 92–93.
7. М. В. Платонова, *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **442** (2015), 101–117.
8. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 201–228.
9. Mark M. Meerschaert, Hans-Peter Scheffler *Limit distributions for sums of independent random vectors : heavy tails in theory and practice*, Wiley, New York, 2001.
10. E. Rvaceva, *On domains of attraction of multidimensional distributions*, Select. Transl. Math. Stat. Prob., American Math. Soc., Providence, Rhode Island, **2** (1962), 183–205.
11. K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
12. N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta applicandae mathematicae **110** (2010), 1289–1308.

Alexeev I. A. Stable random variables with a complex index α. The case of $|\alpha - 1/2| < 1/2$.

In this paper, we construct complex-valued random variables that satisfy the usual stability condition, but for a complex parameter α such that $|\alpha - 1/2| < 1/2$. The characteristic function of the obtained random variables is found and limit theorems for sums of independent identically distributed random variables are proved. The corresponding Lévy processes and semigroups of operators corresponding to these processes are constructed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, С.-Петербург, Россия
E-mail: `vanyalexeev@list.ru`

Поступило 14 сентября 2021 г.