

Т. Е. Абильдаев

АНАЛОГ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Рассмотрим вещественнозначный процесс $\xi(t)$ с почти наверное (п.н.) измеримыми траекториями. По теореме о замене меры в интеграле справедливо равенство

$$\int_0^t f(\xi(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mu_t(dy), \quad (1)$$

где случайная мера μ_t такова, что $\mu_t(\Gamma) = \text{mes} \{ \tau \in [0, t] \mid \xi(\tau) \in \Gamma \}$ для борелевского множества Γ . Мера μ_t имеет смысл времени пребывания процесса $\xi(\tau)$ в множестве Γ до момента времени t .

В том случае, если μ_t п.н. абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, тождество (1) можно переписать следующим образом:

$$\int_0^t f(\xi(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(y) l(t, y) dy. \quad (2)$$

Производная Радона-Никодима $l(t, \cdot)$ меры μ_t относительно меры Лебега называется *локальным временем* процесса ξ до момента времени t .

Локальное время может не существовать. Например, для устойчивых процессов при показателе устойчивости $\alpha \in (1, 2]$ локальное время существует, а при $\alpha \in (0, 1)$ – нет (см., напр., [1]). Если локальное время не существует, в качестве его замены можно ввести случайную величину

$$m(t, y) = \int_0^t h(\xi(\tau) - y) d\tau = \int_{\mathbb{R}} h(z - y) \mu_t(dz),$$

где h – некоторая измеримая функция, и рассмотреть сглаженную меру $m(t, y) dy$. Обозначим через A_h оператор свертки с h . Аналогом (2)

Ключевые слова: случайные процессы, процессы Леви, устойчивые процессы, локальное время.

является следующее тождество:

$$\int_0^t (A_h f)(\xi(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(y) m(t, y) dy.$$

Есть большая свобода в выборе сглаживающего ядра h . В работе [2] аналог локального времени был построен для центрированных случайных процессов Леви с конечным вторым моментом, то есть процессов, в определенном смысле близких к винеровскому. Ядро h в этой конструкции определялось мерой Леви процесса, и для самого винеровского процесса h совпадало с дельта-функцией, а обобщенное локальное время $m(t, y)$ совпадало с локальным временем винеровского процесса. Также было показано, что $m(t, \cdot)$ ведет себя как локальное время винеровского процесса при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, в работе [3] было показано, что для последовательности сложных пуассоновских процессов, слабо сходящейся к винеровскому процессу, обобщенное локальное время $m(t, y)$ слабо сходится к локальному времени винеровского процесса.

В настоящей работе аналог локального времени $m(t, y)$ строится для специального класса процессов Леви, включающих симметричные устойчивые процессы с показателем устойчивости $\alpha \in (1, 2)$, для которых $m(t, y)$ совпадает с локальным временем. Доказывается предельная теорема, связывающая обобщенное локальное время с решением неоднородного дифференциального уравнения, порожденного генератором соответствующей устойчивому процессу полугруппы операторов.

Пусть $\xi(t)$ – центрированный процесс Леви с нулевой гауссовой компонентой. Такой процесс определяется своей мерой Леви Λ , то есть σ -конечной мерой на борелевских множествах, удовлетворяющей условиям:

$$\Lambda(\{0\}) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, y^2) \Lambda(dy) < \infty.$$

Фиксируем $\alpha \in (1, 2)$. Введем константу H_α , полагая

$$H_\alpha = \frac{1}{2 \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(-\alpha)}.$$

Предположим, что Λ обладает следующими свойствами:

$$1. \quad \Lambda([x, \infty)) = \frac{1}{\alpha x^\alpha} (1 + \gamma(x)), \text{ если } x > 1; \quad (3)$$

$$\Lambda((-\infty, x]) = \frac{1}{\alpha |x|^\alpha} (1 + \gamma(x)), \text{ если } x < -1. \quad (4)$$

При этом $\gamma(x)$ измерима и такова, что

$$|\gamma(x)| \leq \frac{C_\gamma}{|x|^\beta},$$

где $\beta > 2 - \alpha$.

$$2. \quad \int_{0 < |x| \leq \delta} x^2 \Lambda(dx) = O(\delta^{2-\alpha}) \text{ при } \delta \rightarrow 0+. \quad (5)$$

$$3. \quad \int_{\varepsilon < |x| \leq 1} |x| \Lambda(dx) = O(\varepsilon^{1-\alpha}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (6)$$

Свойства 1–3 меры Λ показывают, что процесс $\xi(t)$ в определенном смысле близок к устойчивому процессу с показателем устойчивости α и мерой Леви $dy / |y|^{1+\alpha}$. Также заметим, что свойство 1 обеспечивает абсолютную сходимость интеграла

$$\int_{|y| > 1} y \Lambda(dy).$$

При фиксированных t и s , таких, что $t > s$, характеристическая функция случайной величины $\xi(t) - \xi(s)$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} \exp(ip(\xi(t) - \xi(s))) = e^{-(t-s)L(p)},$$

где

$$L(p) = - \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{ipy} - 1 - ipy) \Lambda(dy).$$

Процесс $\xi(t)$ задает полугруппу операторов P^t , $t \geq 0$, каждый элемент которой действует по следующему правилу:

$$(P^t g)(x) = \mathbf{E} g(x + \xi(t)).$$

Генератором полугруппы P^t является оператор \mathcal{L} :

$$(\mathcal{L}g)(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (g(x+y) - g(x) - yg'(x)) \Lambda(dy).$$

Если процесс устойчив, \mathcal{L} обозначается \mathcal{D}^α и является оператором симметричного дробного дифференцирования порядка α :

$$(\mathcal{D}^\alpha g)(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (g(x+y) - g(x) - yg'(x)) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} dy.$$

Нетрудно показать, что оператор $\widehat{\mathcal{D}}^\alpha$, определяемый из равенства

$$\mathcal{F}\mathcal{D}^\alpha = \widehat{\mathcal{D}}^\alpha \mathcal{F},$$

где \mathcal{F} – преобразование Фурье, действует как умножение на функцию $H_\alpha^{-1} |\cdot|^\alpha$. То есть для подходящей функции g

$$(\widehat{\mathcal{D}^\alpha g})(p) = H_\alpha^{-1} |p|^\alpha \widehat{g}(p). \quad (7)$$

Теперь введем сглаживающее ядро, полагая

$$h(x) = H_\alpha^2 \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (|x+y|^{\alpha-1} - |x|^{\alpha-1} - (\alpha-1)y \operatorname{sgn}(x)|x|^{\alpha-2}) \Lambda(dy).$$

Преобразование Фурье функции h имеет следующий вид [4, стр. 219]:

$$\widehat{h}(p) = -H_\alpha |p|^{-\alpha} L(-p). \quad (8)$$

Для устойчивого процесса $\widehat{h}(p) \equiv 1$, а мера $h(x) dx$ является дельта-функцией Дирака. Последний факт становится нагляднее, если представить h в виде

$$h = \mathcal{L}(H_\alpha^2 |\cdot|^{\alpha-1}).$$

Таким образом, h – результат применения генератора \mathcal{L} полугруппы процесса $\xi(t)$ к функции $H_\alpha^2 |\cdot|^{\alpha-1}$, которая является фундаментальным решением оператора \mathcal{D}^α , то есть

$$\mathcal{D}^\alpha (H_\alpha^2 |\cdot|^{\alpha-1}) = \delta,$$

где δ – дельта-функция.

Следующая теорема подтверждает корректность выбора h .

Теорема 1. Пусть, как и ранее, \mathcal{A}_h – оператор свертки с h , а

$$m(t, y) = \int_0^t h(\xi(\tau) - y) d\tau = \int_{\mathbb{R}} h(z - y) \mu_t(dz).$$

Тогда A_h ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, $m(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ п.н. и для любой $g \in L_2(\mathbb{R})$

$$\int_0^t (A_h g)(\xi(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{R}} g(y) m(t, y) dy. \quad (9)$$

Доказательство. Сначала сформулируем и докажем лемму, играющую основную роль в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Существует положительная константа C такая, что*

$$|L(p)| \leq C|p|^\alpha. \quad (10)$$

Доказательство леммы 1. Имеем

$$|L(p)| = \left| \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{ipy} - 1 - ipy) \Lambda(dy) \right| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy). \quad (11)$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле четна по p , а для $|L(-p)|$ справедлива та же оценка. Это позволяет далее считать p положительным.

Из (5), (6) следует существование констант C_1, C_2, r_1, r_2 таких, что

$$\int_{0 < |x| \leq \delta} x^2 \Lambda(dx) \leq C_1 \delta^{2-\alpha} \text{ для любого } \delta \in (0, r_1], \quad (12)$$

$$\int_{\varepsilon < |x| \leq 1} |x| \Lambda(dx) \leq C_2 \varepsilon^{1-\alpha} \text{ для любого } \varepsilon \in (0, r_2]. \quad (13)$$

Взяв вместо C_1 максимум из C_1 и $C_1/r_1^{2-\alpha}$, а вместо C_2 максимум из C_2 и $C_2 r_2^{1-\alpha}$, можем считать оба неравенства справедливыми на промежутке $(0, 1]$.

а) Пусть сначала $p > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |L(p)| &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &= \int_{0 < |y| \leq 1/p} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) + \int_{1/p < |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &\quad + \int_{y > 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \quad (14) \end{aligned}$$

$$+ \int_{y < -1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy). \quad (15)$$

Обозначим интегралы в (14) и (15) как I_1 , I_2 , I_3 и I_4 соответственно. Оценим I_1 , используя (12).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{0 < |y| \leq 1/p} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &\leq p^2 \int_{0 < |y| \leq 1/p} y^2 \Lambda(dy) \leq C_1 p^2 \left(\frac{1}{p}\right)^{2-\alpha} = C_1 p^\alpha, \end{aligned}$$

Оценим I_2 , используя (13).

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{1/p < |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &\leq 2p \int_{1/p < |y| \leq 1} |y| \Lambda(dy) \leq 2C_2 p \left(\frac{1}{p}\right)^{1-\alpha} = 2C_2 p^\alpha. \end{aligned}$$

Оценим I_3 , используя (3).

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{y > 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &\leq 2p \int_{y > 1} y \Lambda(dy) \leq 2p \int_{y > 1} y \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2C(\gamma, C_\gamma) p \int_{y > 1} y \frac{dy}{y^{1+\alpha+\beta}} \\ &= C(\gamma, C_\gamma, \alpha, \beta) p \leq C(\gamma, C_\gamma, \alpha, \beta) p^\alpha. \end{aligned}$$

Оценка интеграла I_4 основана на (4) и аналогична оценке I_3 .

б) Пусть теперь $p \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} |L(p)| &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &= \int_{0 < |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) + \int_{y > 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \\ &\quad + \int_{y < -1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy). \quad (16) \end{aligned}$$

Обозначим интегралы в (16) как I_1 , I_2 и I_3 соответственно. Оценим I_1 .

$$I_1 = \int_{0 < |y| \leq 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \leq p^2 \int_{0 < |y| \leq 1} y^2 \Lambda(dy) \leq C(\Lambda) p^\alpha.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha - 1)$ и оценим I_2 , используя (3).

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{y > 1} |e^{ipy} - 1 - ipy| \Lambda(dy) \leq 2p^{\alpha-\varepsilon} \int_{y > 1} y^{\alpha-\varepsilon} \Lambda(dy) \\ &\leq 2p^\alpha \int_{y > 1} y^{\alpha-\varepsilon} \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2C(\gamma, C_\gamma) p^\alpha \int_{y > 1} y^{\alpha-\varepsilon} \frac{dy}{y^{1+\alpha+\beta}} \\ &\leq C(\gamma, C_\gamma, \beta, \varepsilon) p^\alpha. \end{aligned}$$

Оценка интеграла I_3 основана на (4) и аналогична оценке I_2 . Лемма 1 доказана. \square

Перейдем к доказательству теоремы 1. Ограниченность \mathcal{A}_h немедленно следует из (8) и (10):

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}_h f)(x)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * h)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2 |\widehat{h}(p)|^2 dp \\ &= H_\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |p|^{-2\alpha} |\widehat{f}(p)|^2 |L(-p)|^2 dp \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2 dp = C \|\widehat{f}(p)\|_2^2 = C \|f(x)\|_2^2. \end{aligned}$$

Докажем, что $m(t, y)$ с вероятностью 1 принадлежит классу $L_2(\mathbb{R})$. Для этого покажем конечность величины

$$\mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} |m(t, y)|^2 dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} |m(t, y)|^2 dy &= \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{m}(t, p)|^2 dp = \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} \widehat{h}(-p) d\tau \right|^2 dp \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(-p)|^2 \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 dp \\
&= \int_{0 < |p| \leq 1} |\widehat{h}(-p)|^2 \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 dp + \int_{|p| > 1} |\widehat{h}(-p)|^2 \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 dp.
\end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим интегралы в (17) как I_1 и I_2 соответственно.

Оценим I_1 , используя (8) и (10).

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{0 < |p| \leq 1} |\widehat{h}(-p)|^2 \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 dp \leq t^2 \int_{0 < |p| \leq 1} |\widehat{h}(-p)|^2 dp \\
&\leq Ct^2 \int_{0 < |p| \leq 1} \left(\frac{|L(p)|}{|p|^\alpha} \right)^2 dp \leq Ct^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что $L(p) \neq 0$, если $p \neq 0$. Для того, чтобы оценить I_2 , оценим сперва $\mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2$ при $p \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 &= 2\operatorname{Re} \int_0^t \int_0^\tau e^{ip(\xi(\tau) - \xi(s))} d\tau ds = 2\operatorname{Re} \int_0^t \int_0^\tau e^{-(\tau-s)L(p)} d\tau ds \\
&= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{L(p)} \left(t + \frac{1}{L(p)} (e^{-tL(p)} - 1) \right) \right] \\
&\leq 2 \left| \frac{1}{L(p)} \left(t + \frac{1}{L(p)} (e^{-tL(p)} - 1) \right) \right| \leq \frac{2}{|L(p)|} \left(t + \frac{2}{|L(p)|} \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

Теперь оценим I_2 , используя (8), (10) и (18).

$$I_2 = \int_{|p| > 1} |\widehat{h}(-p)|^2 \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right|^2 dp \leq 2 \int_{|p| > 1} \frac{|L(p)|}{|p|^{2\alpha}} \left(t + \frac{2}{|L(p)|} \right) dp$$

$$\leq 2C \int_{|p|>1} \frac{1}{|p|^\alpha} \left(t + \frac{2}{|L(p)|} \right) dp < \infty.$$

Итак, доказано, что $m(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ с вероятностью 1.

Докажем теперь справедливость формулы (9). Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. При $M > 0$ обозначим через f_M функцию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-ipx} \widehat{f}(p) dp.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t (A_h f)(\xi(\tau)) d\tau &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t (A_h f_M)(\xi(\tau)) d\tau = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t (f_M * h)(\xi(\tau)) d\tau \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(\int_0^t e^{-ip\xi(\tau)} d\tau \right) \widehat{f}(p) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ipy} h(y) dy \right) dp \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(\int_0^t e^{-ip\xi(\tau)} d\tau \right) \widehat{f}(p) \widehat{h}(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{-ip\xi(\tau)} d\tau \right) \widehat{f}(p) \widehat{h}(p) dp. \quad (19) \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y) m(t, y) dy &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_0^t h(\xi(\tau) - y) d\tau \right) dy \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) h(\xi(\tau) - y) dy \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{-ip\xi(\tau)} d\tau \right) \widehat{f}(p) \widehat{h}(p) dp. \quad (20) \end{aligned}$$

Из (19) и (20) следует требуемое. \square

Обозначим через $l(t, y)$ локальное время рассматриваемого нами устойчивого процесса. Следующая теорема демонстрирует связь $l(t, y)$ с решением неоднородного дифференциального уравнения, порожденного оператором \mathcal{D}^α .

Теорема 2. *Положим*

$$u(x) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(f * l)(t, x),$$

где f такова, что

$$\int_{\mathbb{R}} |p|^{-2\alpha} |\widehat{f}(p)|^2 dp < \infty.$$

Тогда u является единственным решением уравнения

$$\mathcal{D}^\alpha u = f$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Построенную величину $m(t, y)$ можно считать обобщением $l(t, y)$ для процессов, близких к устойчивому. Если процесс $\xi(t)$ устойчив, $m(t, y)$ совпадает с $l(t, y)$, а оператор \mathcal{A}_h является тождественным. Более того, оказывается, что для $m(t, y)$ сохраняется утверждение теоремы 2. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Положим*

$$u(x) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(f * m)(t, x), \quad (21)$$

где f такова, что

$$\int_{\mathbb{R}} |p|^{-2\alpha} |\widehat{f}(p)|^2 dp < \infty. \quad (22)$$

Тогда u является единственным решением уравнения

$$\mathcal{D}^\alpha u = f \quad (23)$$

в классе $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Покажем сначала, что если решение существует, то оно единственно. Пусть u_1, u_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяют уравнению (23). Из (7) следует, что

$$\widehat{f}(p) = (\widehat{\mathcal{D}^\alpha u_1})(p) = H_\alpha^{-1} |p|^\alpha \widehat{u}_1(p),$$

откуда при $p \neq 0$

$$\widehat{u}_1(p) = H_\alpha |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p).$$

То же верно и для \widehat{u}_2 . Ввиду линейности и унитарности преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ заключаем, что u_1 и u_2 равны.

Докажем, что решение имеет вид (23). Положим $g_x(y) = f(x - y)$. Тогда, используя равенство (9), имеем

$$\begin{aligned} (f * m)(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - y)m(t, y) dy = \int_0^t (\mathcal{A}_h g_x)(\xi(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-ip\xi(\tau)} e^{ipx} \widehat{f}(-p) \widehat{h}(p) d\tau dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right) e^{-ipx} \widehat{f}(p) \widehat{h}(-p) dp \\ &= -\frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right) e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) L(p) dp. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}(f * m)(t, x) &= \frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbf{E} e^{ip\xi(\tau)} d\tau \right) e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) L(p) dp \\ &= \frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{-\tau L(p)} d\tau \right) e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) L(p) dp \\ &= \frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-tL(p)}) e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) dp. \end{aligned}$$

Последний интеграл при $t \rightarrow \infty$ стремится к интегралу

$$\frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) dp,$$

конечность которого следует из (22). Далее,

$$\frac{H_\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} |p|^{-\alpha} \widehat{f}(p) dp = H_\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |y|^{\alpha-1} f(x - y) dy = (f * H_\alpha^2 \cdot |\cdot|^{\alpha-1})(x).$$

Как было отмечено ранее, функция $H_\alpha^2|\cdot|^{\alpha-1}$ является фундаментальным решением оператора \mathcal{D}^α . Поэтому $f * H_\alpha^2|\cdot|^{\alpha-1}$ есть решение уравнения (23). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*. — Тр. МИАН СССР **195** (1994), 2–285.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одном обобщении понятия локального времени*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 148–157.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об аппроксимации локального времени винеровского процесса функционалами от случайных блужданий*. — Теория вероятн. и ее примен. **66** (2021), 73–93.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, Физматгиз, 1959.

Abildaev T. E. An analogue of the local time for a certain class of Levy processes.

We consider a class of Levy processes that includes symmetric α -stable processes for $\alpha \in (1, 2)$. We obtain an analogue of the local time for this class of processes, study this analogue's properties and show that it can be considered as the generalization of the local time of symmetric stable process.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: t.abildaev23@gmail.com

Поступило 28 октября 2021 г.