Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

П. М. Штейнер

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

§1. Введение

Через $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначим множества целых, рациональных и действительных чисел соответственно. Через $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ обозначим соответствующие множества неотрицательных чисел. Для множества $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с координатами из $\mathcal{M}$. $|\mathcal{M}|$ обозначает мощность множества $\mathcal{M}$. $-\mathcal{M}$ обозначает множество $\{-x \,|x \in \mathcal{M}\}$. Через $\max(v)$ (соотв. $\min(v)$) обозначим максимальную (соотв. минимальную) координату $v \in \mathbb{R}^n$. Множество действительных $n \times m$ матриц обозначим через $M_{n,m}$.

Векторы из $\mathbb{R}^n$ считаются столбцами и отождествляются с соответствующими n-кортежами. Координатный вектор с номером j обозначается e_j. Также $e = (1, \dots, 1)^t$.

Исследование линейных операторов, сохраняющих различные матричные функции и инварианты восходит к Фробениусу. В 1897 году он охарактеризовал линейные операторы, сохраняющие определители комплексных матриц, см. [5]. Многие математики внесли свой вклад в исследование линейных операторов, сохраняющих различные матричные инварианты и свойства. Более подробную информацию о теории линейных операторов, сохраняющих инварианты (Linear Preserver Problems) можно найти в [10, 13, 17].

Другим важным направлением исследований являются операторы, сохраняющие бинарные матричные отношения. Например, матричные мажоризации, семейство отношений предпорядка на множестве действительных матриц (см. [1, 6–8, 15, 16]), стали богатым источником задач на сохранение инвариантов, см. [1–3, 11, 12, 14, 18].

Ограничение мажоризаций на матрицы с коэффициентами из некоторого специального множества, как, например, (0, 1)-матрицы, может

Ключевые слова: линейные отображения, линейные функционалы.
Работа поддержана фондом БАЗИС (грант No. 19-8-2-35-1).

приводить к интересным комбинаторным результатам, см. [4,6,9]. Возникает естественный вопрос о том, как устроены линейные операторы, сохраняющие такие классы матриц. Линейный оператор на множестве действительных $n \times m$ матриц можно рассматривать как линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}^{nm}$. Это значит, что для характеризации линейных операторов, сохраняющих классы матриц, достаточно изучить линейные операторы, сохраняющие классы векторов.

Для исследования линейных операторов, сохраняющих векторы с коэффициентами из выбранного множества $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, достаточно рассмотреть линейные функционалы $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Дело в том, что одному линейному оператору $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ взаимно-однозначно соответствует набор n линейных функционалов $\Phi_1, \dots, \Phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемых соотношениями $\Phi_i(v) = (\Phi(v))_i$, $i = \{1, \dots, n\}$. Тогда Φ сохраняет векторы с коэффициентами из некоторого множества $\mathcal{M}$, если и только если все $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ сохраняют множество $\mathcal{M}$. В настоящей статье дается характеризация линейных функционалов, сохраняющих различные подмножества $\mathbb{R}$.

Во многих областях математики рассматриваются различные комбинаторные классы матриц. Например, $(0,1)$-матрицы, (± 1)-матрицы, $(\pm 1, 0)$-матрицы, целочисленные матрицы и многие другие. В связи с этим, актуально изучение линейных операторов, сохраняющих эти классы. В то же время, характеризации линейных операторов, сохраняющих матрицы с коэффициентами из некоторого множества $\mathcal{M}$, ещё не были получены. В настоящей работе на основе полученных для линейных функционалов результатов мы получаем характеризации линейных операторов, сохраняющих множество матриц с коэффициентами из $\mathcal{M}$. В качестве $\mathcal{M}$ рассматриваются множества целых, рациональных, неотрицательных целых, рациональных и вещественных чисел, интервалы на числовой прямой, нечетные числа, числа, кратные произвольному целому k, и любые конечные множества действительных чисел. Приведенные множества соответствуют значительной части возникающих в комбинаторных задачах классов матриц. Отметим, что идеи и методы доказательств настоящей работы заметно отличаются от стандартных методов теории линейных операторов, сохраняющих матричные инварианты.

Настоящая статья построена следующим образом. Вводная информация приведена в §1. В §2 содержатся основные определения и понятия. Также в этом параграфе показана связь между линейными функционалами $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющими множество $\mathcal{M}$, и линейными операторами на пространстве $\mathbb{R}^n$, сохраняющими векторы с координатами из $\mathcal{M}$. В §3 рассматриваются общие свойства линейных функционалов, сохраняющих некоторое множество $\mathcal{M}$. В §4 рассматриваются бесконечные множества целых чисел. В §5 и §6 приводятся характеризации линейных функционалов, сохраняющих соответственно ограниченные и неограниченные интервалы. В §7 дается полная характеризация линейных функционалов, сохраняющих конечные множества. Наконец, в §8 мы показываем, как, зная характеризацию линейных функционалов, сохраняющих множество $\mathcal{M}$, дать характеризацию линейных операторов на пространстве $M_{n,m}$, сохраняющих множество матриц с коэффициентами из $\mathcal{M}$.

§2. Линейные операторы и функционалы

Определение 2.1. *Линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет *множество* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, *если* $\phi(v) \in \mathcal{M}$ *для любого вектора* $v \in \mathcal{M}^n$.

Определение 2.2. *Линейный оператор* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет *множество* $\mathcal{M}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, *если* $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$ *для любого вектора* $v \in \mathcal{M}^n$.

Напомним, что векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. Координатами *линейного функционала* $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется набор* $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ *действительных чисел, определяемых равенствами* $\phi_i = \phi(e_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i$ *для любого вектора* $v = (v_1, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

Мы отождествляем линейный функционал ϕ *с вектор-строкой его координат* $(\phi_1, \dots, \phi_n)$.

Для линейного оператора $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ определим $\Phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейный функционал, задаваемый равенством $\Phi_i(v) = (\Phi(v))_i$.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ *и* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– линейный оператор. Тогда* Φ *сохраняет* $\mathcal{M}^n$, *если и только если каждый функционал* Φ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, *сохраняет* $\mathcal{M}$.

Доказательство. I. Предположим, что Φ сохраняет множество $\mathcal{M}^n$.

Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$, т.е. $(\Phi(v))_i = \Phi_i(v) \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, каждый линейный функционал Φ_i сохраняет множество $\mathcal{M}$.

II. Предположим, что каждый линейный функционал Φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, сохраняет множество $\mathcal{M}$.

Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. По условию,

$$(\Phi(v))_i = \Phi_i(v) \in \mathcal{M}$$

для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Следовательно, $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$, т.е. Φ сохраняет множество $\mathcal{M}^n$. □

Таким образом, лемма 2.4 позволяет свести задачу характеризации линейных операторов на пространстве $\mathbb{R}^n$, сохраняющих некоторое множество векторов $\mathcal{M}^n$, к характеризации линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих множество $\mathcal{M}$. В настоящей статье мы даем такие характеризации для различных множеств $\mathcal{M}$.

§3. Общие свойства

Лемма 3.1. *Пусть $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $e_i \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e_i) = \phi_i \in \mathcal{M}$. □

Лемма 3.2. *Пусть $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, и пусть множество $\mathcal{M}$ замкнуто относительно сложения и умножения. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. I. Если ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, то $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ по лемме 3.1.

II. Предположим, что $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \in \mathcal{M}$, поскольку $\mathcal{M}$ замкнуто относительно сложения и умножения. □

Следствие 3.3. *Пусть $\mathcal{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+\}$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$, если и только если $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если ϕ сохраняет множество $-\mathcal{M}$, где $-\mathcal{M} = \{-x \mid x \in \mathcal{M}\}$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда $v \in \mathcal{M}^n$, если и только если $-v \in -\mathcal{M}^n$. Поскольку $\phi(-v) = -\phi(v)$, мы получаем, что $\phi(v) \in \mathcal{M}$, если и только если $\phi(-v) \in -\mathcal{M}$. □

Заметим, что лемма 3.4 позволяет, зная характеризацию линейных функционалов, сохраняющих множество $\mathcal{M}$, автоматически получить характеризацию линейных функционалов, сохраняющих множество $-\mathcal{M}$. Таким образом, лемма 3.4 расширяет область применимости лемм 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.2, 6.4, в которых рассматриваются такие множества $\mathcal{M}$, что, вообще говоря, $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

§4. Бесконечные множества целых чисел

Лемма 4.1. *Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 2$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $k\mathbb{Z}$, если и только если $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. I. Пусть $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $v \in (k\mathbb{Z})^n$, то $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \in k\mathbb{Z}$.

II. Предположим, что ϕ сохраняет множество $k\mathbb{Z}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ – произвольный индекс. Тогда $ke_i \in (k\mathbb{Z})^n$ и, таким образом, $\phi(ke_i) = k\phi_i \in k\mathbb{Z}$. Из этого следует, что $\phi_i \in \mathbb{Z}$. □

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{M} = (\mathbb{Z} \backslash 2\mathbb{Z})$ – множество нечетных чисел. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и число $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ нечетно.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Имеем $e \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{M}$. Теперь для произвольного $j \in \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим вектор $e - 2e_j \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e - 2e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i - 2\phi_j \in \mathcal{M}$. Таким образом, число $2\phi_j$ четно, т.е. $\phi_j \in \mathbb{Z}$.

II. Предположим, что $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и число $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ нечетно. Тогда, в частности, ϕ имеет нечетное число нечетных координат. Из этого следует, что число $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i$ нечетно для любого $v \in \mathcal{M}^n$. $\square$

§5. Ограниченные интервалы

Лемма 5.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$, если и только если $\phi_i \geqslant 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$. Для произвольного $j \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим вектор $\alpha e_j \in [0, \alpha]^n$. Тогда $\phi(\alpha e_j) = \alpha\phi_j \in [0, \alpha]$. Следовательно, $\phi_j \geqslant 0$. Также $\alpha e \in [0, \alpha]^n$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant \alpha$. Из этого следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$. Тогда для любого $v \in [0, \alpha]^n$ имеем $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\phi_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant \alpha$. Кроме того, $\phi(v) \geqslant 0$. Из этого следует, что ϕ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – такие числа, что $\beta > \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$, если и только если $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$. Имеем $\alpha e \in [\alpha, \beta]^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant \alpha$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant 1$. Аналогично, $\beta e \in [\alpha, \beta]^n$ и $\phi(\beta e) = \beta \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant \beta$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.

Теперь для произвольного $j \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим вектор $v = \alpha e + (\beta - \alpha)e_j$. Тогда $v \in [\alpha, \beta]^n$ и $\phi(v) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i + (\beta - \alpha)\phi_j = \alpha + (\beta - \alpha)\phi_j \in [\alpha, \beta]$. Таким образом, $(\beta - \alpha)\phi_j \in [0, \beta - \alpha]$. Следовательно, $\phi_j \geqslant 0$.

II. Предположим, что $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1,\ldots,n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$. Пусть $v \in [\alpha,\beta]^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v)$ – выпуклая комбинация координат v. Из этого следует, что $\phi(v) \in [\min(v), \max(v)] \subseteq [\alpha,\beta]$. В итоге, ϕ сохраняет отрезок $[\alpha,\beta]$. □

Лемма 5.3. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – такие числа, что $\beta \geqslant \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha,\beta]$, если и только если*

$$\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leqslant \alpha.$$

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha,\beta]$.

Пусть $w \in [-\alpha,\beta]^n$ – такой вектор, что для $i = \{1,\ldots,n\}$

$$w_i = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } \phi_i \geqslant 0, \\ \beta, & \text{если } \phi_i < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$-\alpha \leqslant \phi(w) = -\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} \phi_j).$$

Из этого следует, что

$$\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leqslant \alpha.$$

II. Предположим, что $\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum\limits_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leqslant \alpha$. Пусть $v \in [\alpha,\beta]^n$ – произвольный вектор.

Тогда

$$\begin{aligned}\phi(v) = \sum_{i:\phi_i>0} v_i\phi_i + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \geqslant -\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \\ \geqslant -\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} \phi_j) \geqslant -\alpha.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\alpha\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| = \alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \alpha(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \\ \leqslant \alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leqslant \alpha.\end{aligned}$$

Из этого следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant 1$.

Тогда мы получаем, что

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i v_i = \sum_{i:\phi_i>0} v_i\phi_i + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \leqslant \beta\Bigg(\sum_{i:\phi_i>0}\phi_i\Bigg) + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j$$
$$\leqslant \beta\Bigg(\sum_{i:\phi_i>0}\phi_i\Bigg) + \alpha\Bigg(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j\Bigg)$$
$$\leqslant \beta\Bigg(\sum_{i:\phi_i>0}\phi_i\Bigg) + \beta\Bigg(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j\Bigg) = \beta\sum_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant \beta.$$

В итоге, $\phi(v) \in [-\alpha, \beta]$, и ϕ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$. □

Следствие 5.4. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – такие числа, что $\beta \geqslant \alpha > 0$. Если линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$, то $\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant 1$.*

Следствие 5.5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – такие числа, что $\beta \geqslant \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$, если $\phi_i \geqslant 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i \leqslant 1$.*

Доказательство. Прямое следствие леммы 5.3. □

Следствие 5.6. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $[-\alpha, \alpha]$, если и только если $\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant 1$.*

Доказательство. I. Если ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha, \alpha]$, то $\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant 1$ по следствию 5.4.

II. Если $\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant 1$, то $\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0}\phi_i) + \alpha(\sum\limits_{j:\phi_j<0} -\phi_j) = \alpha\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i| \leqslant \alpha$. Таким образом, ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha, \alpha]$ по лемме 5.3. □

§6. Неограниченные интервалы

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$, если и только если $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i \geqslant 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$. Имеем $\alpha e \in [\alpha, +\infty)^n$. Отсюда следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant \alpha$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant 1$.

Предположим, что $\phi_k < 0$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant 1$. Пусть $v = \alpha e - \frac{\alpha\Sigma}{\phi_k} e_k \in [\alpha, +\infty)^n$. Тогда

$$\phi(v) = \phi(\alpha e) - \phi(\frac{\alpha\Sigma}{\phi_k} e_k) = \alpha\Sigma - \frac{\alpha\Sigma}{\phi_k}\phi_k = 0 < \alpha,$$

противоречие. Таким образом, $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant 1$. Пусть $v \in [\alpha, +\infty)^n$ – произвольный вектор. Тогда

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha\phi_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant \alpha.$$

Таким образом, ϕ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$. □

Лемма 6.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$, если и только если $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$. Имеем $-\alpha e \in [-\alpha, +\infty)^n$. Из этого следует, что

$$\phi(-\alpha e) = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant -\alpha,$$

т.е. $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$.

Предположим, что $\phi_k < 0$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $v = -\frac{\alpha+1}{\phi_k} e_k$. Тогда $v \in [-\alpha, +\infty)^n$, поскольку $-\frac{\alpha+1}{\phi_k} > 0$. Из этого следует, что $\phi(v) = -\frac{\alpha+1}{\phi_k}\phi_k = -\alpha - 1 < -\alpha$, противоречие. Таким образом, $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geqslant 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leqslant 1$. Пусть $v \in [-\alpha, +\infty)^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\phi_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} (-\alpha)\phi_i = -\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geqslant -\alpha$. Таким образом, ϕ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$. □

Следствие 6.3. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ и пусть $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейный функционал. Тогда ϕ сохраняет $[0, \alpha]$, если и только если ϕ сохраняет $[-\beta, +\infty)$.*

Доказательство. Это прямое следствие лемм 5.1 и 6.2. □

Лемма 6.4. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – такие числа, что $\beta \geqslant \alpha > 0$. Пусть $\mathcal{M} = (-\infty, -\alpha] \cup [\beta, +\infty)$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in (-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty)$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

Допустим, что как минимум две координаты ϕ не равны нулю. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ – такой индекс, что ϕ_k имеет минимальное по модулю значение среди ненулевых ϕ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\sigma = \frac{\sum_{i \neq k} |\phi_i|}{|\phi_k|}$. Тогда $\sigma \geqslant 1$. Определим вектор $v \in \mathbb{R}^n$ таким образом:

$$v_i = \begin{cases} -\sigma\beta(\operatorname{sign}(\phi_k)) & \text{для } i = k, \\ \operatorname{sign}(\phi_i)\beta & \text{для } i \neq k. \end{cases}$$

Тогда $\phi(v) = -\sigma\beta|\phi_k| + \sum\limits_{i \neq k} \beta|\phi_i| = 0 \notin \mathcal{M}$. Но $v \in \mathcal{M}^n$, противоречие.

Также $\phi^t \neq 0$. Таким образом, $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Имеем $-\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Отсюда следует, что $\phi(-\alpha e) = -\alpha\lambda \in \mathcal{M}$.

Если $\lambda > 0$, то $-\alpha\lambda < 0$ и, как следствие, $-\alpha\lambda \leqslant -\alpha$. Из этого следует, что $\lambda \geqslant 1$.

Если $\lambda < 0$, то $-\alpha\lambda > 0$ и, как следствие, $-\alpha\lambda \geqslant \beta$. Из этого следует, что $\lambda \leqslant -\frac{\beta}{\alpha}$.

В итоге, $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in (-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty)$.

II. Предположим, что $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого

$$\lambda \in \Big(-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty\Big).$$

Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \lambda v_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Остается рассмотреть следующие 4 случая:

1. Если $v_i \geqslant \beta$ и $\lambda \geqslant 1$, то $\lambda v_i \geqslant \beta$.
2. Если $v_i \geqslant \beta$ и $\lambda \leqslant -\frac{\beta}{\alpha}$, то $\lambda v_i \leqslant -\frac{\beta}{\alpha}\beta \leqslant -\beta \leqslant -\alpha$.
3. Если $v_i \leqslant -\alpha$ и $\lambda \geqslant 1$, то $\lambda v_i \leqslant -\alpha$.
4. Если $v_i \leqslant -\alpha$ и $\lambda \leqslant -\frac{\beta}{\alpha}$, то $\lambda v_i \geqslant \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta$.

В итоге, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. □

§7. Конечные множества

В этом параграфе мы даем полную характеризацию линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих конечные множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$. Для начала разберем случай $|\mathcal{M}| = 1$.

Замечание 7.1. *Любой линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\{0\}$.*

Лемма 7.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\{\alpha\}$, если и только если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.*

Доказательство. Имеем $\{\alpha\}^n = \{\alpha e\}$.

I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\{\alpha\}$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = \alpha$, т.е., $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.

II. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha$ и ϕ сохраняет $\{\alpha\}$. □

Далее мы можем предполагать, что $|\mathcal{M}| \geqslant 2$.

Лемма 7.3. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – такое множество, что $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha e \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно, $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{M}$. Тогда $(\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)e \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно,

$\alpha(\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i)^2 \in \mathcal{M}$. Таким образом, мы получаем, что

$$\alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i),\ \alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i)^2,\ \alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i)^3,\ \ldots \in \mathcal{M}.$$

Имеем $\alpha \neq 0$. Если $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i \notin \{0, \pm 1\}$, то числа

$$\alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i),\ \alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i)^2,\ \alpha(\sum_{i=1}^{n}\phi_i)^3,\ \ldots$$

различны. Получается, что $|\mathcal{M}| = \infty$, противоречие. □

Лемма 7.4. *Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – *такое множество, что* $|\mathcal{M}| < \infty$. *Предположим, что линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* $\mathcal{M}$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i = -1$. *Тогда* $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$ – произвольное число. Тогда $\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i = -\alpha \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$. □

Лемма 7.5. *Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – *такое множество, что* $|\mathcal{M}| < \infty$. *Предположим, что линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* $\mathcal{M}$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i = 0$. *Тогда* $0 \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Если $\alpha \in \mathcal{M}$ – произвольное число, то $\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = 0 \in \mathcal{M}$. □

Лемма 7.6. *Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – *такое множество, что* $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$. *Предположим, что линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* $\mathcal{M}$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i = 1$. *Тогда* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Доказательство. Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$ и $\alpha = \max(\mathcal{M} \setminus \{\beta\})$. В частности, $\alpha < \beta$ и, если $\alpha < x < \beta$, то $x \notin \mathcal{M}$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ – произвольный индекс. Рассмотрим вектор $v = \beta e + (\alpha - \beta)e_j \in \mathcal{M}^n$.

Тогда $\phi(v) = \beta \sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i + (\alpha - \beta)\phi_j = \beta + (\alpha - \beta)\phi_j \in \mathcal{M}$. Из этого следует, что $(\alpha - \beta)\phi_j \leqslant 0$, поскольку $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\phi_j \geqslant 0$.

Предположим, что $0 < \phi_j < 1$. Тогда $\alpha < \beta + (\alpha - \beta)\phi_j < \beta$. Таким образом, $\phi(v) \notin \mathcal{M}$, противоречие. В итоге, $\phi_j \in \{0, 1\}$. Из этого следует, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. □

Лемма 7.7. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – такое множество, что $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -1$. Тогда $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$.*

Доказательство. По лемме 7.4 имеем $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$ и $\alpha = \max(\mathcal{M} \setminus \{\beta\})$. В частности, $\alpha < \beta$ и, если $\alpha < x < \beta$, то $x \notin \mathcal{M}$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ – произвольный индекс. Рассмотрим вектор $v = -\beta e + (\beta - \alpha)e_j \in \mathcal{M}^n$.

Тогда $\phi(v) = -\beta \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i + (\beta - \alpha)\phi_j = \beta + (\beta - \alpha)\phi_j \in \mathcal{M}$. Из этого следует, что $(\beta - \alpha)\phi_j \leqslant 0$, поскольку $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\phi_j \leqslant 0$.

Предположим, что $-1 < \phi_j < 0$. Тогда $\alpha < \beta + (\beta - \alpha)\phi_j < \beta$. Таким образом, $\phi(v) \notin \mathcal{M}$, противоречие. В итоге, $\phi_j \in \{0, -1\}$. Из этого следует, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$. □

Лемма 7.8. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – такое множество, что $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$ и $0 \in \mathcal{M}$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$. Тогда $\phi_i \in \{0, \pm 1\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ – произвольный индекс и пусть $\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha e_i \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно, $\phi(\alpha e_i) = \alpha \phi_i \in \mathcal{M}$. Тогда $\alpha \phi_i e_i \in \mathcal{M}^n$ и, как следствие, $\alpha(\phi_i)^2 \in \mathcal{M}$. Таким образом, мы получаем, что $\alpha(\phi_i)$, $\alpha(\phi_i)^2$, $\alpha(\phi_i)^3, \ldots \in \mathcal{M}$.

Имеем $\alpha \neq 0$. Если $\phi_i \notin \{0, \pm 1\}$, то числа $\alpha(\phi_i)$, $\alpha(\phi_i)^2$, $\alpha(\phi_i)^3, \ldots$ различны. В итоге, $|\mathcal{M}| = \infty$, противоречие. □

Лемма 7.9. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – такое множество, что $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$ и $0 \in \mathcal{M}$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\phi_j = -1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.*

Доказательство. Если $\alpha \in \mathcal{M}$ – произвольное число, то $\alpha e_j \in \mathcal{M}^n$. Отсюда следует, что $\phi(\alpha e_j) = -\alpha \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$. □

Лемма 7.10. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ – такое множество, что $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$. Тогда $\phi = 0$.*

Доказательство. По лемме 7.5 имеем $0 \in \mathcal{M}$. По лемме 7.8 имеем $\phi_i \in \{0, \pm 1\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что $\phi \neq 0$. Из этого следует, что $\phi_j = 1$ и $\phi_k = -1$ для некоторых $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$ по лемме 7.9.

Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\beta > 0$ и $-\beta \in \mathcal{M}$. Рассмотрим вектор $v = \beta e_j - \beta e_k \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(v) = 2\beta \in \mathcal{M}$, противоречие. Из этого следует, что $\phi = 0$. □

Вместе с замечанием 7.1 и леммой 7.2 следующая теорема дает полную характеризацию линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих конечные подмножества $\mathbb{R}$.

Теорема 7.11. *Пусть множество* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ *таково, что* $2 \leqslant |\mathcal{M}| < \infty$. *Пусть* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– линейный функционал.*

1. *Если* $0 \in \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$, *то* ϕ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.
2. *Если* $0 \in \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$, *то* ϕ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
3. *Если* $0 \notin \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$, *то* ϕ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.
4. *Если* $0 \notin \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$, *то* ϕ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Доказательство. Если ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$ по лемме 7.3.

(1) $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 7.6.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$ по лемме 7.7.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$, то $\phi = 0$ по лемме 7.10.

Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда

$$\phi(v) \in \{0, \pm v_1, \ldots, \pm v_n\} \subseteq \mathcal{M}.$$

Таким образом, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

(2) $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда, по лемме 7.4, $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \neq -1$.

Если $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 7.6.

Если $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 0$, то $\phi = 0$ по лемме 7.10.

Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{0, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

(3) $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда, по лемме 7.5, $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \neq 0$.

Если $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 7.6.

Если $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = -1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$ по лемме 7.7.

Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{\pm v_1, \ldots, \pm v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Значит, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

(4) $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. В этом случае, $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \neq -1$ по лемме 7.4 и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \neq 0$ по лемме 7.5.

Тогда $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$ и $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 7.6.

Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и пусть $v \in \mathcal{M}^n$ – произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет $\mathcal{M}$.

$\square$

§8. Векторы и матрицы

Продемонстрируем на примере нескольких комбинаторных матричных классов сведение задачи характеризации линейных операторов, сохраняющих эти классы, к линейным функционалам.

Следствие 8.1. *Линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* $\{\pm 1, 0\}$, *если и только если* $(\phi_1, \dots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$.

Доказательство. Следует из теоремы 7.11. □

Следствие 8.2. *Пусть* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. Φ *сохраняет* $\{\pm 1, 0\}^n$.
2. *Существуют такие отображения* $f : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, n\}$, $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{\pm 1\}$, *что для любого* $v \in \mathbb{R}^n$ *и для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *выполнено* $\Phi(v)_i = \sigma(i) v_{f(i)}$, *где* $v_0 \coloneqq 0$.

Доказательство. I. Если выполнено условие 2, то для любых $v \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\Phi(v)_i \in \{0, \pm v_1, \dots, \pm v_n\} \subseteq \{\pm 1, 0\}$.

II. Предположим, что выполнено условие 1.

По лемме 2.4, Φ сохраняет $\{\pm 1, 0\}^n$, если и только если каждый линейный функционал Φ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, сохраняет $\{\pm 1, 0\}$.

По следствию 8.1, Φ_i сохраняет $\{\pm 1, 0\}$, если и только если

$$((\Phi_i)_1, \dots, (\Phi_i)_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}.$$

Если $\Phi_i = 0^t$, то пусть $f(i) = 0$. Тогда $\Phi(v)_i = 0 = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Если $\Phi_i = e_j^t$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$, то пусть $f(i) = j$, $\sigma(i) = 1$. Тогда $\Phi(v)_i = v_j = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Если $\Phi_i = -e_j^t$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$, то пусть $f(i) = j$, $\sigma(i) = -1$. Тогда $\Phi(v)_i = -v_j = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$. □

Линейный оператор на множестве действительных $n \times m$ матриц можно рассматривать как линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}^{nm}$. Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 8.3. *Пусть* $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ *– линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Φ *сохраняет* $(\pm 1, 0)$*-матрицы.*

2. *Существуют такие отображения*

$$f : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \cup \{(0, 0)\},$$

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{\pm 1\},$$

что для любого $X \in M_{n,m}$ *и для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ *выполнено* $\Phi(X)_{i,j} = \sigma(i, j) X_{f(i,j)}$, *где* $X_{0,0} \coloneqq 0$.

Аналогично, получаем следующие результаты.

Следствие 8.4. *Пусть* $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ *– линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. Φ *сохраняет* (± 1)*-матрицы.*
2. *Существуют такие отображения*

$$f : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\},$$

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{\pm 1\},$$

что для любого $X \in M_{n,m}$ *и для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ *выполнено* $\Phi(X)_{i,j} = \sigma(i, j) X_{f(i,j)}$.

Следствие 8.5. *Пусть* $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ *– линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. Φ *сохраняет* $(0, 1)$*-матрицы.*
2. *Существует такое отображение*

$$f : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \cup \{(0, 0)\},$$

что для любого $X \in M_{n,m}$ *и для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ *выполнено* $\Phi(X)_{i,j} = X_{f(i,j)}$, *где* $X_{0,0} \coloneqq 0$.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи и интересные и полезные обсуждения.

Список литературы

1. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **118** (1989), 163–248.
2. L. B. Beasley, S.-G. Lee, *Linear operators preserving multivariate majorization.* — Linear Algebra Appl. **304**, No. 1 (2000), 141–159.
3. L. B. Beasley, S.-G. Lee, Y.-H. Lee, *A characterization of strong preservers of matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **367** (2003), 341–346.

4. R. A. Brualdi, *Combinatorial Matrix Classes*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press, 2006.
5. G. Frobenius, *Uber die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen.* — Sitz. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
6. G. Dahl, *Matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **288** (1999), 53–73.
7. G. Dahl, *Majorization polytopes.* — Linear Algebra Appl. **297** (1999), 157–175.
8. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for matrix classes.* — Linear Algebra Appl. **555** (2018), 201–221.
9. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for* $(0,1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **585** (2020), 147–163.
10. A. Guterman, C.-K. Li, P. Šemrl, *Some general techniques on linear preserver problems.* — Linear Algebra Appl. **315**, No. 1–3 (2000), 61–81.
11. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear converters of weak, directional and strong majorizations.* — Linear Algebra Appl. **613** (2021), 320–346.
12. А. Гутерман, П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц.* — Вестн. СПбГУ, матем. мех. астрон. **7 (65)** (2020), 217–229.
13. C.-K. Li, S. Pierce, *Linear preserver problems.* — Amer. Math. Monthly **108**, No. 7 (2001), 591–605.
14. C.-K. Li, E. Poon, *Linear operators preserving directional majorization.* — Linear Algebra Appl. **325**, No. 1 (2001), 141–146.
15. A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Second Edition, Springer, New York, 2011.
16. F. M. Perı́a, P. Massey, L. Silvestre, *Weak matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **403** (2005), 343–368.
17. S. Pierce, et al., *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
18. П. М. Штейнер, *Конвертация столбцовой мажоризации.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 195–215.

Shteyner P. M., Linear operators preserving combinatorial matrix sets.

The paper investigates linear functionals $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ preserving a set $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, i.e., $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that $\phi(v) \in \mathcal{M}$ for any vector $v \in \mathbb{R}^n$ with components from $\mathcal{M}$. For different types of subsets of real numbers, characterizations of linear functionals that preserve them are obtained. In particular, the sets $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$, several infinite sets of integers, bounded and unbounded intervals, and finite subsets of real numbers are considered.

A characterization of linear functionals preserving a set $\mathcal{M}$ also allows one to describe linear operators preserving matrices with entries from this set, i.e., operators $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ such that all entries of a matrix $\Phi(A)$ belong to $\mathcal{M}$ for any matrix $A \in M_{n,m}$ with all entries in $\mathcal{M}$. As an

example, linear operators preserving $(0,1)$, (± 1), and $(\pm 1, 0)$-matrice are characterized.

Московский Гос. университет
им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия;
Моск. центр фунд. и прикл. математики
119991, Москва, Россия;
Моск. физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Поступило 3 октября 2021 г.