Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

В. Б. Хазанов

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЖОРДАНОВЫХ ПОЛУРЕШЕТОК ВЕКТОРОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

1. Модификация алгоритма вычисления жордановых полурешеток векторов

В работе [2] был описан алгоритм вычисления жордановых полурешеток векторов, отвечающих кратной точке спектра многопараметрической полиномиальной матрицы. Этот алгоритм основан на построении базисов нуль-пространств последовательности квазирезультантных матриц возрастающих уровней, отвечающих исходной многопараметрической полиномиальной матрице.

В нем наиболее трудоемким, с вычислительной точки зрения, является вычисление базисных матриц разностей определяемых подпространств, размерности которых также возрастают. Для исключения этого этапа воспользуемся идеями, приведенными в работе [1], посвященной вычислению полиномиальных решений сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы. Эти идеи касаются иного способа формирования результантной матрицы следующего уровня и использования метода одновременного нахождения базисов образа и нуль-пространства постоянной матрицы [3]:

$$\left(\frac{A}{I}\right) \to \left(\frac{A_1}{Y}\middle|\frac{O}{X}\right),\ \ A_1 = \operatorname{im} A,\ \ X = \ker A.$$

Ключевые слова: многопараметрическая полиномиальная матрица, кратная точка спектра, жорданова полурешетка векторов, результантный подход.

Отличие описанного в этой работе подхода применительно к рассматриваемой здесь задаче состоит в том, что вместо результантных матриц используются квазирезультантные матрицы[1]. Предлагаемая модификация позволяет существенно уменьшить объем вычислений. Удаление столбцов преобразуемой результантной матрицы, которые отвечают получаемым нулевым столбцам квазирезультантной матрицы, снимает необходимость последующего исключения “паразитических” жордановых полурешеток. Тем самым вычисление упомянутой выше разности подпространств становится ненужным, а размеры результантных матриц следующих уровней уменьшаются.

Не повторяя изложение двух указанных работ, опишем более подробно первые шаги предлагаемого модифицированного алгоритма в предположении, что $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ является кратной точкой спектра[2] q-параметрической $m \times n$ матрицы степени s

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{\boldsymbol{k}} F_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} \equiv \sum_{k} F_{k_1 \dots k_q} \lambda_1^{k} \dots \lambda_q^{k_q} \\
&= F_{00\dots0} + \bigl(F_{10\dots0}\lambda_1 + F_{01\dots0}\lambda_2 + \dots + F_{0\dots01}\lambda_q\bigr) \\
&+ \bigl(F_{20\dots0}\lambda_1^2 + F_{11\dots0}\lambda_1\lambda_2 + \dots + F_{00\dots2}\lambda_q^2\bigr) \\
&+ \dots + \bigl(F_{s00\dots0}\lambda_1^s + F_{s-1,10\dots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_2 + F_{s-1,01\dots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_3 \\
&+ \dots + F_{s-1,00\dots1}\lambda_1^{s-1}\lambda_q + \dots + F_{000\dots0s}\lambda_q^s\bigr),
\end{aligned}$$

предполагая, что она не имеет правых полиномиальных решений.

Вначале формируется результантный вектор матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$

$$F^R = \begin{pmatrix} F_{0\dots0} \\ \hline F_{1\dots0} \\ \vdots \\ F_{0\dots s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{F}^R \\ \hline F_{1\dots0} \\ \vdots \\ F_{0\dots s} \end{pmatrix}.$$

Для одновременного вычисления базисов образа и нуль-пространства квазирезультантного вектора $\check{F}^R$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, т.е. матрицы $F_{0\dots0}$,

---

[1] Квазирезультантная матрица представляет собой верхний блок соответствующей результантной матрицы, число строк которого равен числу строк результантной матрицы предыдущего уровня.

[2] Если точка спектра отлична от нулевой, то следует выполнить замену $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*$ (замены $\lambda_j := \lambda_j - \lambda_j^*,\ j = 1, \dots, q$).

применим указанный выше алгоритм[3]:

$$\begin{pmatrix} F_{0\dots 0} \\ \hline F_{1\dots 0} \\ \vdots \\ \hline F_{0\dots s} \\ \hline I_n \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \breve F_{0\dots 0} & O \\ \hline \breve F_{1\dots 0} & * \\ \vdots & \vdots \\ \hline \breve F_{0\dots s} & * \\ \hline Y_0 & X_0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} n_0 & \delta_0 \end{array} \end{array}, \quad F_0^R = \begin{pmatrix} \breve F_{0\dots 0} \\ \hline \breve F_{1\dots 0} \\ \vdots \\ \breve F_{0\dots s} \end{pmatrix},$$

$$\breve F_{0\dots 0} = \mathrm{im}\breve F^R, \;\; X_0 = \ker \breve F^R = \ker F(\mathbf{0}), \;\; n_0 \equiv n_0^{(0,0,\dots,0)}.$$

Столбцы матрицы[4] X_0 дают δ_0 линейно независимых собственных векторов матрицы $F(\boldsymbol\lambda)$, отвечающих нулевой точке ее спектра. Отвечающие им столбцы преобразованного результантного вектора исключаются (неиспользуемые в дальнейшем матричные объекты обозначены символом $*$). Как отмечено в [1], желательно не преобразовывать неаннулируемые столбцы результантной матрицы. В связи с этим процесс нахождения столбцов, являющихся линейными комбинациями предшествующих им столбцов, целесообразно выполнять, используя, например, процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

Результантный столбец F_0^R отвечает полиномиальной $m \times n_0$ матрице $F_0(\boldsymbol\lambda) \equiv \sum \breve F_k \boldsymbol\lambda^{\boldsymbol k}$ степени s. На втором шаге для матрицы $F_0(\boldsymbol\lambda)$ формируется начальное представление модифицируемой результантной матрицы первого уровня:

$$\begin{aligned} F_0^{R_1} &= \begin{pmatrix} F_0^R & F_0^{(1,\dots,0)R} & \dots & F_0^{(0,\dots,1)R} \\ O & & & \end{pmatrix} \\ &\equiv \left(\begin{array}{cccc} F_0^R & \bar F_0^{(1,\dots,0)R} & \dots & \bar F_0^{(0,\dots,1)R} \\ \hline O & \bar{\bar F}{}_0^{(1,\dots,0)R} & \dots & \bar{\bar F}{}_0^{(0,\dots,1)R} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Здесь $F_0^{(1,\dots,0)R}, \dots, F_0^{(0,\dots,1)R}$ – результантные столбцы матриц $\lambda_1 F_0(\boldsymbol\lambda)$, $\dots, \lambda_q F_0(\boldsymbol\lambda)$ соответственно.

---

[3]Те же преобразования столбцов выполняются и для остальной части результантного вектора F^R.

[4]В приводимых изображениях модифицируемых результантных матриц местоположение нулевой матрицы и расположенной под ней матрицы, столбцы которой определяют найденные жордановы полурешетки, является условным.

Возможное уменьшение у блочных столбцов модифицируемой результатной матрицы числа образующих её столбцов приводит к необходимости формирования одномерного массива размерностей. Размерность самого этого массива будет увеличиваться по мере роста уровня формируемых результантных матриц. Каждый элемент этого массива отвечает соответствующему показателю мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$ и определяет число столбцов соответствующего блочного столбца модифицируемой результантной матрицы. Таким образом, имеем:

$$\left(n_0^{(0,\ldots,0)}\ n_0^{(1,\ldots,0)}\ \ldots\ n_0^{(0,\ldots,1)}\right) := \left(n_0^{(0,\ldots,0)}\ n_0^{(0,\ldots,0)}\ \ldots\ n_0^{(0,\ldots,0)}\right).$$

Применим к квазирезультантной матрице

$$\breve{F}_0^{R1} = \left(F_0^R\ \bar{F}_0^{(1,\ldots,0)R}\ \ldots \bar{F}_0^{(0,..,1)R}\right)$$

алгоритм одновременного вычисления базисов образа и нуль-пространства:

$$\left(\begin{array}{cccc} F_0^R & \bar{F}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{F}_0^{(0,\ldots,1)R} \\ \hline O & \bar{\bar{F}}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{\bar{F}}_0^{(0,\ldots,1)R} \\ \hline Y_0 & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} F_0^R & \breve{F}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \breve{F}_0^{(0,\ldots,1)R} & O \\ \hline O & \widehat{F}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \widehat{F}_0^{(0,\ldots,1)R} & * \\ \hline \begin{matrix} Y_0 \\ O \end{matrix} & Y_{(1,\ldots,0)} & \ldots & Y_{(0,\ldots,1)} & X_1 \end{array}\right)$$

Столбцы матрицы X_1 образуют базис искомого нуль-пространства, а столбцы полиномиальной матрицы первой степени $X_1(\boldsymbol{\lambda}) = \left[I\ \ \lambda_1 I \lambda_2 I\ \ \ldots\ \lambda_q I\right] X_1$ порождают соответствующие жордановы полурешетки векторов высоты 1 или начальные фрагменты жордановых полурешеток большей высоты. Столбцы, отвечающие нулевому блоку, исключаются. Соответствующим образом корректируются значения элементов массива размерностей $(n_0^{(0,\ldots,0)}\ n_1^{(1,\ldots,0)}\ \ldots\ n_1^{(0,\ldots,1)})$.

Преобразованная результантная матрица имеет следующий вид:

$$F_1^{R1} \equiv \begin{pmatrix} F_0^R & \check{F}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \check{F}_0^{(0,\ldots,1)R} \\ \hline O & \widehat{F}_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & \widehat{F}_0^{(0,\ldots,1)R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^R & F_0^{(1,\ldots,0)R} & \ldots & F_0^{(0,\ldots,1)R} \\ O & & & \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{im} F_0^{R1}, \quad X_1 = \ker F_0^{R_1}.$$

Затем формируется начальное представление модифицируемой результантной матрицы второго уровня и отвечающий ей вектор размерностей:

$$F_1^{R2} = \begin{pmatrix} F_1^{R1} & F_1^{(2,0,\ldots,0)R} & F_1^{(1,1,0,\ldots,0)R} & \ldots & F_1^{(0,0,\ldots,2)R} \\ O & & & & \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} F_1^{R1} & \bar{F}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{F}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{F}_1^{(0,0,\ldots,2)R} \\ \hline O & \bar{\bar{F}}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{\bar{F}}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{\bar{F}}_1^{(0,0,\ldots,2)R} \end{pmatrix},$$
$$\left(n_0^{(0,\ldots,0)}\ n_1^{(1,\ldots,0)} \ldots n_1^{(0,\ldots,1)}\ n_1^{(2,0,\ldots,0)R}\ n_1^{(1,1,\ldots,0)R} \ldots n_1^{(0,0,\ldots,2)R}\right).$$

Здесь $F_1^{(2,0,\ldots,0)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_1 F_1^{(1,0,\ldots,0)R}(\boldsymbol{\lambda})$, $F_1^{(1,1,\ldots,0)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_1 F_1^{(0,1,\ldots,0)R}(\boldsymbol{\lambda})$, … , $F_1^{(0,0,..,2)R}$ – результантный столбец матрицы $\lambda_q F_1^{(0,0,\ldots,1)R}(\boldsymbol{\lambda})$.

Затем вычисляются базисы образа и нуль-пространства квазирезультантной матрицы $F_1^{R2} = \left(F_1^R\ \bar{F}_1^{(2,0,\ldots,0)R}\ \bar{F}_1^{(1,1,\ldots,0)R} \ldots \bar{F}_1^{(0,0,\ldots,2)R}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc} F_1^R & \bar{F}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \bar{F}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{F}_1^{(0,0,\ldots,2)R} \\ \hline O & \bar{\bar{F}}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \bar{\bar{F}}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \bar{\bar{F}}_1^{(0,0,\ldots,2)R} \\ \hline Y_1 & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} F_1^R & \check{F}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \check{F}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \check{F}_1^{(0,0,\ldots,2)R} & O \\ \hline O & \widehat{F}_1^{(2,0,\ldots,0)R} & \widehat{F}_1^{(1,1,\ldots,0)R} & \ldots & \widehat{F}_1^{(0,0,\ldots,2)R} & * \\ \hline Y_1 & & & & & \\ O & Y_{(2,0,\ldots,0)} & Y_{(1,1,\ldots,0)} & \ldots & Y_{(0,0,\ldots,2)} & X_2 \end{array}\right).$$

Столбцы матрицы X_2 образуют базис искомого нуль-пространства, а столбцы полиномиальной матрицы второй степени

$$X_2(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} I & \lambda_1 I & \lambda_2 I & \dots & \lambda_q I & \lambda_1^2 I & \lambda_1\lambda_2 I & \dots & \lambda_q^2 I \end{bmatrix} X_2$$

порождают соответствующие жордановы полурешетки векторов высоты 2 или начальные фрагменты жордановых полурешеток большей высоты. Отвечающие им нулевые столбцы исключаются.

Корректируются значения элементов массива размерностей

$$\left(n_0^{(0,\dots,0)}\ n_1^{(1,\dots,0)}\ \dots\ n_1^{(0,\dots,1)}\ n_2^{(2,0,\dots,0)R}\ n_2^{(1,1,\dots,0)R}\ \dots\ n_2^{(0,0,\dots,2)R}\right)$$

и формируется результантная матрица

$$F_2^{R2} \equiv \left(\frac{F_1^R\ \ \breve{F}_1^{(2,0,\dots,0)R}\ \ \breve{F}_1^{(1,1,\dots,0)R} \dots\ \breve{F}_1^{(0,0,\dots,2)R}}{O\ \ \breve{F}_1^{(2,0,\dots,0)R}\ \ \widehat{F}_1^{(1,1,\dots,0)R}\ \dots\ \widehat{F}_1^{(0,0,\dots,2)R}}\right) = \operatorname{im}\breve{F}_1^{R2},$$
$$X_2 = \ker\breve{F}_1^{R2}.$$

Далее процесс продолжается аналогичным образом до тех пор, пока либо размерность нуль-пространства построенной квазирезультантной матрицы не окажется равной нулю, либо сумма высот жордановых полурешеток не окажется равной кратности точки спектра.

2. Иллюстрация реализации алгоритмов

Спектр регулярной двухпараметрической матрицы

$$F(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1-\mu & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

определяется ее характеристическим полиномом $\varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \mu^2$. Точка $(0,0)$ ее спектра имеет кратность 2. Вычислим отвечающие ей векторные характеристики. Малые размерность задачи и кратность точки спектра не позволяют полноценно оценить преимущество модифицированного алгоритма. По этой же причине в модифицированном алгоритме не приводятся массивы размерностей.

Исходный алгоритм. Строятся квазирезультантные матрицы:

$$\breve{F}^{R\,0}_{2\times 2;2;2} = F(0,0) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \breve{F}^{R\,1}_{2\times 2;2;2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & & 1 & 1\\ -1 & 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляются базисные матрицы их правых нуль-пространств:

$$\breve{X}^{R}_{2\times 1;2;1} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, \quad \breve{X}^{R}_{2\times 3;2;1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Находится базис разности подпространств $\breve{X}^{R}_{2\times 3;2;1}$ и $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \breve{X}^{R}_{2\times 1;2;1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \breve{X}^{R}_{2\times 1;2;1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \right\}$:

$$\widetilde{X}^{R}_{2\times 1_t;2;1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Блочные компоненты полученного вектора дают искомую жорданову полурешетку векторов:

$$\boldsymbol{x}_{00} = [1 \ \ -1]^T, \ \ \boldsymbol{x}_{10} = [-1 \quad 0]^T, \ \ \boldsymbol{x}_{01} = [0 \quad 1]^T.$$

Модифицированный алгоритм. Строится результантная матрица нулевого уровня и одновременно вычисляются базисы образа и нуль-пространства квазирезультантной матрицы (мелким шрифтом приводятся элементы результантных матриц, не относящиеся к квазирезультантным матрицам):

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \scriptstyle\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ 1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\\ \scriptstyle\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{matrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1 & \mathbf{-1}\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \end{array}.$$

Столбец нижней подматрицы, отвечающий нулевому столбцу верхней подматрицы, является собственным вектором (соответствующие компоненты выделены жирным шрифтом).

Строится модифицированная результантная матрица первого уровня и вычисляются базисы образа и нуль-пространства квазирезультантной матрицы:

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & \\
1 & 0 & & \\
1 & -1 & 1 & \\
0 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & & 1\\
-1 & 1 & & 1
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}} & \\
 & & & {\scriptstyle\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}}
\end{array}\\
\hline
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & \\
0 & 1 & & \\
 & & 1 & \\
 & & 0 & \\
 & & & 1\\
 & & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & \mathbf{0}\\
1 & 0 & & \mathbf{0}\\
1 & -1 & 1 & \mathbf{0}\\
0 & -1 & 1 & \mathbf{0}\\
0 & 1 & & \mathbf{0}\\
-1 & 1 & & \mathbf{0}
\end{pmatrix}\\
\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}} & \\
 & & & {\scriptstyle\begin{matrix}1\\0\\0\\-1\end{matrix}}
\end{array}\\
\hline
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & \mathbf{1}\\
0 & 1 & & \mathbf{-1}\\
 & & 1 & \mathbf{-1}\\
 & & 0 & \mathbf{0}\\
 & & & \mathbf{1}\\
 & & & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Блочные компоненты последнего столбца нижней подматрицы, отвечающего нулевому столбцу верхней подматрицы, дают искомую жорданову цепочку векторов:

$$\boldsymbol{x}_{00} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_{10} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что, как и в однопараметрическом случае, векторы из жордановых полурешеток определяются неоднозначно, что и проявляется в различающихся представлениях вектора $\boldsymbol{x}_{01}$: сумма его представления в исходном алгоритме с собственным вектором дает его представление в модифицированном алгоритме.

Список литературы

1. В. Б. Хазанов, *Построение минимального базиса правого нуль-пространства сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 272–287.
2. В. Б. Хазанов, *Вычисление жордановых полурешеток векторов многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 182–194.

3. В. А. Чуркин, *Жорданова классификация конечномерных линейных операторов: Методические указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора.* Новосибирск, Изд-во НГУ, 1991.

Khazanov V. B. Computation of Jordan vector semilattices of a multiparameter polynomial matrix

A modification of the algorithm for computing the Jordan vector semilattices corresponding to a multiple point of the spectrum of a multiparameter polynomial matrix is suggested. The modification is based on using quasiresultant matrices and allows one to reduce the computational costs significantly. A numerical example illustrating application of the original algorithm and its modification is considered.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@gmail.com

Поступило 23 сентября 2021 г.