Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

О. В. Маркова, Д. Ю. Новочадов

СИСТЕМЫ ПОРОЖДАЮЩИХ ПОЛНОЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

§1. Введение

При изучении матричной подалгебры необходимо уметь устанавливать, собственная ли она или же совпадает с полной алгеброй матриц. Если подалгебра задана системой порождающих, то проверка даже такого свойства нетривиальна: хотя для непосредственного нахождения размерности подалгебры достаточно времени и памяти, зависящих от порядка матриц полиномиально, высокая степень многочлена серьёзно ограничивает размерность задач, к которым на практике может быть применим такой алгоритм.

Среди известных результатов, помогающих различать подалгебры, можно назвать доказанную в начале XX века теорему Бёрнсайда. В современной формулировке она характеризует комплексные матричные подалгебры в терминах общих инвариантных подпространств этих матриц (простое доказательство можно найти в работе Ломоносова и Розенталя [11]). В работах Лаффи и Лоуренса [7, 9, 10] данная задача исследуется с использованием теории графов. В литературе также известно множество результатов о близко связанных с этой задачей сюжетах, в частности, об одновременной приводимости систем к треугольному виду, и в настоящее время эти смежные области продолжают весьма активно изучаться.

Описанные выше результаты можно отнести к структурному направлению теории матриц, поскольку получены результаты о свойствах и строении систем порождающих. Другим классическим направлением является количественный подход, а именно, вычисление числовых характеристик порождающих множеств.

Ключевые слова: матричная алгебра, система порождающих, циклические матрицы, граф Бернсайда, функция длины алгебр.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Одной из важных числовых характеристик является длина порождающего множества и алгебры. Длина в некотором смысле измеряет мультипликативную сложность данной порождающей системы или алгебры в целом, поэтому она важна в ряде задач вычислительных методов теории матриц (см., например, работу Альпина и Икрамова [1]). Заметим, что длина является нетривиальной для вычисления характеристикой, поскольку даже для полной матричной алгебры задача вычисления длины как функции порядка матриц поставлена ещё в 1984 г. [16] и до сих пор не решена. Тем не менее, для многих матричных множеств и собственных подалгебр часто удаётся явно вычислить длину или получить хорошие оценки, см., например, работы [4,5,12–15] и их библиографию.

В данной работе проводится исследование систем порождающих, содержащих циклические матрицы. Матрица называется *циклической*, если она имеет циклический вектор. Введённый Сильвестром в 80-х годах XIX в. класс циклических матриц обладает многими интересными свойствами. Это крупный класс, который оказывается полезным и при рассмотрении порождающих систем. Так, в статье Гутермана, Лаффи, Марковой и Шмигоц [4] при наличии в системе циклической матрицы доказана справедливость гипотезы Паза [16] об оценке длины порождающей системы алгебры матриц порядка n числом $2n-2$.

Мы покажем, что при наличии циклической жордановой матрицы в системе порождение полной матричной алгебры определяется свойствами некоторого графа, построенного по ней (графа Бёрнсайда). Преобразование подобия позволяет использовать этот результат и после нахождения в системе произвольной циклической матрицы. Однако если в системе циклических матриц нет, соответствующий критерий, к сожалению, теряет силу – недостаток существенный, поскольку порождающая полную алгебру система может вовсе не содержать циклических матриц даже в своей линейной оболочке.

С точки зрения задачи вычисления функции длины для данного класса матриц, интересен вопрос характеризации систем образующих, длина которых в точности равна максимальному значению. Так, в работах [4, 12, 14] проводится исследование возможных значений рангов матриц в таких парах образующих, а именно, получены результаты для матриц рангов 1, 2 и полного ранга. Мы продолжим начатое в работе [4] исследование матриц ранга 2, содержащих в точности 2 единицы.

На пересечении этих двух сюжетов естественным образом возникает вопрос: определяет ли граф Бёрнсайда длину системы порождающих? Мы в общем случае дадим на него отрицательный ответ.

Наша работа построена следующим образом. В §2 вводятся обозначения и формулируются необходимые теоремы. §3 посвящен доказательству обобщения теорем Лаффи из [7] и [9] на класс циклических матриц. В §4 приводятся примеры, из наличия которых следует невозможность дальнейшего прямого обобщения основного результата на системы без циклических матриц, а также показываются различные варианты поведения таких систем. В §5 оценены длины некоторых пар образующих, содержащих циклическую матрицу и матрицу ранга 2, и показано, что граф Бёрнсайда системы порождающих, содержащей циклическую матрицу, не определяет её длину.

§2. Обозначения, определения и известные результаты

Рассматриваются полные алгебры $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{M}_n$ $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Матрицы действуют на $\mathbb{F}^n$ левым умножением; введём на $\mathbb{F}^n$ базис $e_1, \ldots, e_n$.

Обозначения для других классических понятий:
$(M)_{ij}$ или m_{ij} – элемент матрицы M на пересечении i-й строки и j-го столбца;
δ_{ij} – символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$;
E_k – единичная матрица из M_k;
J_k – нильпотентная верхнетреугольная жорданова клетка из M_k.

Линейную оболочку множества $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\} \subseteq V$, где V – произвольное векторное пространство, мы будем обозначать $\langle w_1, w_2, w_3, \ldots \rangle$ или $\langle W \rangle$, а обозначение $\mathcal{L}(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ или $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ оставим для подалгебры с единицей, порождённой системой $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\} \subseteq \mathrm{M}_n$ (так что $\mathcal{L}(\varnothing) = \mathbb{F}E_n$).

Пусть J – жорданова матрица. Перестановкой векторов базиса $\mathbb{F}^n$ сгруппируем клетки J по собственным значениям и упорядочим их по невозрастанию размеров. Тогда корневые подпространства J – это линейные оболочки поднаборов из подряд идущих векторов стандартного базиса.

Пусть задана квадратная матрица A и упорядоченный набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, где $\sigma_i = \{m \in \mathbb{Z} : l_i \leqslant m \leqslant r_i\}$ для некоторых l_i и $r_i \in \mathbb{Z}$, при этом σ_i попарно не пересекаются, а их объединение содержит все целые числа от 1 до n. В таком случае естественно называть подматрицу матрицы A, образованную строками с индексами из σ_i и столбцами с индексами из σ_j, $[i,j]$-*ым блоком* матрицы A и обозначать её A_{ij}. Набор $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ будем называть *блочной структурой*, заданной на M_n.

В последней части работы будет удобно называть d-*й диагональю* матрицы A множество позиций элементов вида $a_{i,i+d}$. Мощность d-й диагонали равна $\max(0,n-|d|)$.

Напомним также одну из современных формулировок классической теоремы Бёрнсайда.

Теорема 2.1. Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле. Тогда всякая подалгебра $\mathcal{A}\subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, матрицы которой не имеют общих собственных инвариантных подпространств, равна $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Следуя терминологии работ Лаффи и Лоуренса [7, 9, 10], построим по системе образующих граф, структура которого может помочь в определении подалгебры, порождённой данным множеством матриц.

Определение 2.2. *Граф Бёрнсайда* $G(\mathcal{S})$ системы матриц $\mathcal{S}\subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ – простой орграф без петель на вершинах $1,\dots,n$, в котором есть ребро $i\to j$ $(i\neq j)$ тогда и только тогда, когда в системе $\mathcal{S}$ есть матрица A с ненулевым элементом a_{ij}.

В работе Лоуренса [10] можно найти наглядное доказательство следующей важной теоремы.

Теорема 2.3 ([10, теорема 1])**.** Если $\mathcal{L}(\mathcal{S})=\mathrm{M}_n$, то граф $G(\mathcal{S})$ сильно связен.

В некоторых случаях, но не всегда, данное необходимое условие порождения становится достаточным; в частности, в работах Лаффи [7] и [9] для комплексных матриц были доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.4 ([7, теоремы 1–2])**.** Пусть $\mathcal{S}$ содержит жорданову матрицу J, состоящую из одной клетки. В этом случае $\mathcal{L}(\mathcal{S})=\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда граф $G(\mathcal{S})$ сильно связен.

Теорема 2.5 ([9, теорема 2])**.** Пусть $\mathcal{S}$ содержит диагональную матрицу, все собственные значения которой различны. В этом случае $\mathcal{L}(\mathcal{S})=\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда граф $G(\mathcal{S})$ сильно связен.

В §3 мы обобщим данные результаты на жордановы матрицы из следующего класса.

Определение 2.6. Пусть $A \in \mathrm{M}_n$, $v \in \mathbb{F}^n$. Вектор v называется *циклическим* для A, если $\langle v, Av, \ldots, A^{n-1}v \rangle = \mathbb{F}^n$. Если A имеет хотя бы один циклический вектор, то она называется *циклической* (nonderogatory).

Известно больше десятка других содержательных эквивалентных описаний циклических матриц, см., например, [2]. Отметим, что и жорданова матрица, состоящая из одной клетки, и диагональная матрица с попарно различными собственными значениями являются примерами циклических матриц.

Для произвольного конечного подмножества $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_h\} \subseteq \mathrm{M}_n$ определим его *длину* как порождающей системы. *Длина слова* $S_{i_1} \ldots S_{i_t}$, где $S_{i_j} \in \mathcal{S}$, равна t. Договоримся считать единичную матрицу E_n (пустое слово) словом от элементов $\mathcal{S}$ длины 0.

Пусть $\mathcal{S}^t$, $t \geqslant 0$, обозначает множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не большей t. Положим $\mathcal{L}_t(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^t \rangle$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle E_n \rangle \cong \mathbb{F}$, а $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ – линейная оболочка всех слов в алфавите $\mathcal{S}$.

Определение 2.7. *Длиной множества* $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{M}_n$ называется число $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S})\}$.

Определение 2.8. *Длиной алгебры* $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n$ называется число $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Гипотеза Паза [16] утверждает, что $l(\mathrm{M}_n) = 2n - 2$. На сегодняшний день полностью она не доказана; асимптотически наилучшая известная оценка длины M_n получена в работе Шитова [17] и равна $2n \log_2 n + 4n$.

§3. Циклические матрицы

В данном параграфе мы докажем основную теорему статьи. Пусть далее $J = \mathrm{diag}(\lambda_1 E_{k_1} + J_{k_1}, \ldots, \lambda_m E_{k_m} + J_{k_m})$ – циклическая жорданова матрица (то есть из $\lambda_p = \lambda_q$ следует $p = q$). Зафиксируем на алгебре матриц индуцированную J блочную структуру.

Легко видеть, что $\mathcal{L}(J)$ – это алгебра блочно-диагональных матриц с таким же разбиением на блоки, в каждом из которых находится произвольная верхнетреугольная матрица Тёплица.

Наличие J в алгебре позволяет следующим образом “вырезать” из матрицы блок.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{M}_n$, $J \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Тогда для любой матрицы $R \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ есть матрица, все блоки которой, кроме $[p, q]$, нулевые, а блок $[p, q]$ такой же, как и в R.

Доказательство. $\mathcal{L}(J)$ содержит матрицы тождественных операторов на каждом из коревых подпространств J. Поскольку J циклическая, это означает наличие в $\mathcal{L}(J)$ матриц D_r, которые имеют в блоке $[r, r]$ единичную матрицу, а во всех остальных блоках – нули. В таком случае требуемая матрица равна $D_p R D_q$. □

Подействуем на “вырезанный” блок найденными в алгебре жордановыми подматрицами.

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{M}_n$, $J \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, а в $G(\mathcal{S})$ есть ребро $i \to j$. Тогда всякое $\mathcal{S}$-инвариантное подпространство $\mathcal{I}$, содержащее базисный вектор e_j, содержит и e_i.

Доказательство. По условию, существует такая матрица $R \in \mathcal{S}$, что $(R)_{ij} \neq 0$. Пусть элемент $(R)_{ij}$ лежит в блоке $[p, q]$. По предыдущей лемме можно считать, что все остальные блоки R пусты.

Алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ содержит матрицу $\hat{J}$ с нильпотентной жордановой клеткой в блоке $[p, p]$ и пустыми остальными блоками. Заметим, что если в матрице M единственный ненулевой блок находится на месте $[p, q]$, то при переходе от M к $\hat{J}M$ этот блок сдвигается внутри себя на одну строчку вверх, причём верхняя строчка исчезает, а освободившаяся нижняя заполняется нулями.

Рассмотрим матричные произведения вида $R_s = \hat{J}^s R$, $s = 0, 1, \ldots$ Заметим, что R_{k_p} нулевая. Обозначим j-й столбец матрицы R_s через v_s; по условию i-я координата v_0 была ненулевой. Существует шаг t, на котором v_t содержит единственную ненулевую координату (находящуюся в верхней строчке блока). Тогда v_{t-1} может иметь не более чем две ненулевые координаты в верхней части блока, v_{t-2} – не более трёх, и так далее. Наконец, существует такое r, что нужная нам i-я координата вектора v_r – самая нижняя из ненулевых (r может не быть равно 0). Поэтому существует L – линейная комбинация матриц R_s, у которой в j-м столбце i-я координата – единственная ненулевая (L можно строить сверху вниз, начиная с v_t). Поскольку по построению $Le_j = \lambda e_i$, $\lambda \in \mathbb{F}^*$, то e_i также обязан принадлежать $\mathcal{I}$. □

Теперь докажем основной результат.

Теорема 3.3. Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $J \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ – циклическая жорданова матрица. Равенство $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеет место тогда и только тогда, когда граф $G(\mathcal{S})$ сильно связен.

Доказательство. Ввиду теоремы 2.3, требуется доказать лишь достаточность. Заметим также, что переход к матрицам над алгебраическим замыканием $\mathbb{F}$ (осуществляемый тензорным умножением $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ на новое поле) сохраняет все размерности линейных оболочек слов от матриц, поэтому $\mathbb{F}$ можно считать алгебраически замкнутым.

Пусть $\mathcal{I}$ инвариантно для $\mathcal{S}$, $0 \neq v \in \mathcal{I}$. Тогда $\mathcal{I}$ обязано содержать некоторый собственный вектор J вида e_w (доказательство аналогично лемме 3.2: разложим v по стандартному базису; с помощью $\mathcal{L}(J)$ обнулим все собственные значения, кроме одного, которое действует хотя бы на одну ненулевую координату вектора v; дальше нильпотентной жордановой клеткой сдвинем координату, соответствующую присоединённому вектору наибольшей высоты, на место собственного вектора). Пусть $V_0 = \{w\}$. Рассмотрим в $G(\mathcal{S})$ множество вершин V_1, из которых идут рёбра в w. Тогда по предыдущей лемме $\mathcal{I}$ также обязано содержать все векторы $\{e_i \colon i \in V_1\}$. Теперь рассмотрим V_2 – вершины, из которых есть ребро в какую-нибудь из вершин V_1, снова применим предыдущую лемму, получая, что $\mathcal{I}$ содержит и $\{e_i \colon i \in V_2\}$, и так далее. Тогда $\bigcup\limits_{k=0}^{n} V_k = \{1, 2, \ldots, n\}$ в силу связности графа $G(\mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{I}$ содержит базис $\mathbb{F}^n$, и $\mathcal{S}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств. Так как $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то по теореме 2.1 (Бёрнсайда) $\mathcal{S}$ порождает всю алгебру $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. □

Теорема 3.3 напрямую неприменима к системам с произвольными (не жордановыми) циклическими матрицами. В качестве контрпримера достаточно взять систему из одной циклической матрицы без нулевых элементов (такая существует над любым бесконечным полем). Если в системе есть какая-то циклическая матрица общего вида, можно привести её к жордановой форме над алгебраическим замыканием $\mathbb{F}$ и подействовать тем же преобразованием подобия на остальные матрицы системы, при этом порождённая подалгебра перейдёт в изоморфную. Однако нахождение циклической матрицы в порождённой подалгебре может быть нетривиальной задачей: в частности, множество нециклических матриц имеет коразмерность 3 как алгебраическое подмногообразие в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ независимо от n (см. лемму 4.9 из статьи [3]), а также содержит крупные линейные подпространства (легко построить такое пространство коразмерности $2n-1$).

Напоследок покажем вычислительное преимущество теоремы 3.3 перед явным нахождением линейного базиса подалгебры в системе с жордановой циклической матрицей, когда требуется лишь сравнить $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ с M_n. Можно действовать следующим образом. Начнём с $B_0 = \{E_n\}$; $\langle B_0 \rangle = \mathcal{L}_0(\mathcal{S})$. Пусть на очередном шаге уже построен матричный базис B_k для $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})$; возьмём

$$C_{k+1} = B_k \cup \{TB \colon B \in B_k, T \in \mathcal{S}\} \cup \{BT \colon B \in B_k, T \in \mathcal{S}\}.$$

Тогда $\langle C_{k+1} \rangle = \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{S})$; выберем в нём базис B_{k+1}. Если $|B_{k+1}| > |B_k|$, переходим на следующий шаг, иначе останавливаемся, поскольку базис найден.

Для этой процедуры количество требуемых в худшем случае операций оценивается снизу многочленом пятой степени от n (длина M_n по крайней мере линейна, а на последних шагах для нахождения базиса потребуется работать с матрицей из порядка $(2|\mathcal{S}|+1)n^2 \times n^2$ элементов), а сверху $O(n^7 \log n)$, если умножать матрицы по определению, искать базис с помощью метода Гаусса и использовать оценку для длины $O(n \log n)$ из [17]. При этом для проверки сильной связности графа Бёрнсайда достаточно квадратичного времени по n.

§4. Матрицы, не являющиеся циклическими

Циклические матрицы – наиболее общий подкласс жордановых матриц, наличие которых в системе позволяет графовым методом установить факт порождения всей алгебры. Чтобы это доказать, обратим внимание на следующий факт.

Предложение 4.1. Пусть $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ – матрица, у которой два первых столбца нулевые. Тогда существует матрица A со всеми ненулевыми элементами такая, что $\mathcal{L}(R, A) \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Обозначим через F матрицу, все элементы которой – единицы. Пусть также D – диагональная матрица, у которой $d_{11} = d_{22}$ и $d_{ii} \neq -1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и положим $A = D + F$. Тогда для всех $Q \in \mathcal{L}(R, A)$ верно равенство $q_{n1} = q_{n2}$. Достаточно доказать утверждение для $Q \in \{R, A\}^t$, $t \geqslant 0$. Это нетрудно сделать индукцией по t (нужно домножить Q справа на A или R и сравнить соответствующие элементы произведения). Таким образом, $\mathcal{L}(R, A) \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. $\square$

Замечание 4.2. Над некоторыми полями $\mathbb{F}$ можно добиться того, что у $A = D + F$ будет не менее $n - 1$ различных собственных значений (например, для $\mathbb{C}$ можно использовать теорему о кругах Гершгорина).

Следствие 4.3. Если J – жорданова матрица, не являющаяся циклической, то существует матрица A такая, что граф Бёрнсайда для $\{J, A\}$ полный, но $\mathcal{L}(J, A) \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Два собственных вектора J со значением λ можно переместить в левые столбцы, сопрягая $\mathcal{S}$ матрицей перестановки, после чего вычесть λE и воспользоваться предыдущим предложением. □

Линейная оболочка порождающей системы не обязана содержать циклические матрицы: Уотерхаус [18] и Лаффи [8] построили контрпримеры к гипотезе Киппенхана [6], утверждавшей противное для систем из двух эрмитовых матриц. Приведём пример такой системы, в которой часть матриц содержит нетривиальные жордановы клетки.

Предложение 4.4. Существует система матриц $\{H, K\} \subseteq \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ такая, что $\mathcal{L}(H, K) = \mathrm{M}_6$, но $\lambda H + \mu K$ не является циклической ни при каких λ, $\mu \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $A = (J_6^3)^T + E_{12} + E_{34} + E_{46} + E_{56}$, $B = E_{12} + E_{23} + E_{45} + E_{56}$. Тогда $H = A^2$ и $K = AB + BA$ – искомые матрицы.

Жорданова форма H содержит в числе прочих блоки размера 1×1 и 2×2 с собственным значением 0. Далее, $\mathrm{rk}(K + tH) \leqslant 4$, $t \in \mathbb{C}$, так как первая и пятая, а также вторая и шестая строки $K + tH$ линейно зависимы. Поскольку циклическая матрица не может иметь ранг меньше $n-1$, весь пучок нециклический. Порождение можно доказать следующим образом. Матрица $HK + KH$ оказывается циклической и обладает жордановым базисом с рациональными координатами. Если произвести сопряжение H и K соответствующей матрицей перехода, а по результатам построить граф Бёрнсайда, то, как показывает непосредственная проверка, он является сильно связным. □

Другой пример подобной системы: в M_8 можно взять $A = (J_8^2)^T + E_{23} + 2E_{45} + 3E_{67}$, $B = E_{12} + E_{34} + E_{56} + E_{78}$, и снова $H = A^2$, $K = AB + BA$ (тогда H, K будут нильпотентными). Данные примеры были получены с помощью модификации метода из статьи [8], основанного на известном факте, что если M коммутирует с $N \notin \mathcal{L}(M)$, то M не может быть циклической.

§5. Длина системы и граф Бёрнсайда

Покажем, что граф Бёрнсайда системы порождающих не определяет её длину, для чего обобщим примеры из теоремы 4.16 статьи [4]. Для краткости обозначим $J_n = J$, $\mathcal{L}_k(J, B) = \mathcal{L}_k$ (матрица B будет определена ниже). Дальнейшие рассуждения проводятся над произвольным полем.

Предложение 5.1. Для $(0,1)$-матрицы B ранга 2, в которой ровно две единицы, равенство $\mathcal{L}(J, B) = \mathrm{M}_n$ выполнено тогда и только тогда, когда существуют натуральные $p \neq n$, $q \neq 1$ такие, что либо $B = E_{n1} + E_{pq}$, либо одновременно $B = E_{p1} + E_{nq}$ и $q \leqslant p$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{L}(J, B) = \mathrm{M}_n$. Из сильной связности графа Бёрнсайда системы следует, что B обязана иметь единицы среди внедиагональных элементов первого столбца, а также последней строки. Если $b_{n1} = 1$, то получаем первый случай из формулировки; иначе выполнено $B = E_{p1} + E_{nq}$. При этом неравенство $p < q$ не может быть выполнено, поскольку тогда граф представлял бы собой два цикла, соединённых односторонним путём, и поэтому не был бы сильно связным. В случае же $q \leqslant p$ в графе есть цикл $p \to n \to q \to p \to 1 \to p$, проходящий через все вершины. $\square$

Теперь оценим длину таких систем, пробуя явно получить базис M_n из матричных единиц.

Заметим, что отображение $\psi : \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n$, отражающее матрицу относительно побочной диагонали, является антиавтоморфизмом M_n как $\mathbb{F}$-алгебры (это можно доказать, представив ψ в виде композиции транспонирования и сопряжения матрицей с единицами на побочной диагонали), следовательно, при его применении сохраняются размерности $\mathcal{L}_k$ и длина, и выполнено $\psi(J) = J$, что позволит уменьшить количество разбираемых случаев примерно вдвое.

Лемма 5.2. Пусть $B = E_{p1} + E_{nq}$ удовлетворяет условию предложения 5.1. Если либо $B \neq B_n = (J^T)^{n-2}$, либо n нечётное, то $l(J, B) \leqslant 2n - 3$.

Доказательство. Сперва покажем, как получить матричную единицу в нижнем левом углу. Так как $q \leqslant p$, то

$$BJ^{p-q} = (E_{p,p-q+1} + E_{np}) \in \mathcal{L}_{p-q+1},$$

и тогда

$$(E_{p,p-q+1}+E_{np})(E_{p1}+E_{nq}) = E_{p1}\delta_{p-q+1,p}+E_{n1}+E_{pq}\delta_{p-q+1,n}+E_{nq}\delta_{pn},$$

но по условию $q \neq 1$, $p-q+1 < n$, $p \neq n$. Поэтому $E_{n1} \in \mathcal{L}_{p-q+2}$.

Если $B = B_n$ и n нечётно, то из слов длины не более $n-1$ можно "собрать" единичную матрицу без одной (произвольной) единицы на диагонали, поэтому, в отличие от случая чётного n, в $\mathcal{L}_{n-1}$ есть все матричные единицы главной диагонали. Чтобы получить все единицы на диагоналях $\pm[1, n-2]$ (сдвигая вправо/вверх $E_{n1} \in \mathcal{L}_{n-1}$ и главную диагональ), достаточно выполнить ещё $n-2$ шага. Рассматривая $(n-2)$-ю диагональ, получаем, что в таком случае $l(J,B) = 2n-3$ в точности.

Пусть теперь $B \neq B_n$. Тогда $p-q+2 \leqslant n-2$ и в $\mathcal{L}_{2n-3}$ входят все единицы с диагоналей с номерами не больше $-(n-1)+(2n-3)-(p-q+2) = n-p+q-4$ (в случае B_n имеем $p-q+2 = n-1$, и диагональные единицы вошли бы только в $\mathcal{L}_{2n-2}$).

Домножением B слева на степени J можно добиться того, что левый столбец станет нулевым, и останется лишь одна матричная единица: $J^pB = E_{n-p,q} \in \mathcal{L}_{p+1}$. Её можно (также с помощью J) сдвигать вправо и вверх, при этом все получающиеся единицы, кроме E_{1n}, будут лежать в $\mathcal{L}_{2n-3}$ (требуется не более $2n-4$ сдвигов). $E_{n1} = J^{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}$.

Далее, вид матрицы B позволяет сдвигать имеющиеся матричные единицы вправо вниз: если $J^lBJ^m = E_{p-l,1+m} + E_{n-l,q+m} \in \mathcal{L}_k$ и $E_{p-l,1+m} \in \mathcal{L}_k$, то, разумеется, и $E_{n-l,q+m}$, будучи их разностью, принадлежит $\mathcal{L}_k$. Заметим, что в случае $n-p+1 \geqslant q$ этим способом из единиц, полученных в предыдущем абзаце, можно (в $\mathcal{L}_{2n-3}$) получить и все матричные единицы с диагоналей $[q-1, n-1]$. Чтобы заполнить оставшиеся диагонали сдвигами E_{n1}, требуется, чтобы $n-p+q-4 \geqslant q-2$, что равносильно $p \neq n-1$. Но $p = n-1$ при $n-p+1 \geqslant q$ может быть только в случае $q = 2$, то есть при $B = B_n$. Случай $n-p+1 < q$ сводится к только что разобранному отражением относительно побочной диагонали. □

Перейдём ко второму случаю, $B = E_{n1} + E_{pq}$.

Предложение 5.3. Пусть $B = E_{n1} + E_{pq}$ удовлетворяет условию предложения 5.1. Если либо $B \neq C_n = E_{n1} + E_{n/2,n/2+1}$, либо n нечётное, то в $\mathcal{L}_{2n-3}$ лежат все матричные единицы E_{ij} за исключением, возможно, $E_{1+(n-p)d,n-1+(1-q)d}$ и $E_{2+(n-p)d,n+(1-q)d}$ для целых неотрицательных d.

Доказательство. Сдвигами вправо или вверх с помощью умножения на J можно избавиться от матричной единицы в середине (получаются $E_{n,n-q+2}$ и $E_{n-p,1}$) – это даёт $E_{ij} \in \mathcal{L}_{2n-3}$ для всех матричных единиц E_{ij}, принадлежащих строкам от 1 до $n-p$ или столбцам от $n-q+2$ до n, кроме $E_{1,n-1}$, E_{1n}, E_{2n}. Из них и J^{n-1} аналогично предыдущей лемме можно, не выходя из $\mathcal{L}_{2n-3}$, получить все единицы из формулировки ("сдвигая влево вниз" уже имеющиеся единицы из строк $[1, n-p]$ и столбцов $[n-q+2, n]$). □

Остаётся лишь получить одну из единиц $E_{1,n-1}$ и E_{2n} (другая будет разностью J^{n-2} и имеющейся, а остальные пробелы заполнятся с помощью сдвигов матрицы B). Нетрудно видеть, что для этого достаточно найти в некотором $\mathcal{L}_k$ матричную единицу, лежащую на d-й диагонали, для которой $k \leqslant (n-1)+d$. Тогда сдвигами вправо и вверх её можно перевести на $(n-2)$-ю диагональ, оставаясь в $\mathcal{L}_{2n-3}$. Назовём такие единицы *опережающими*. Снова без ограничения общности E_{pq} лежит не ниже побочной диагонали.

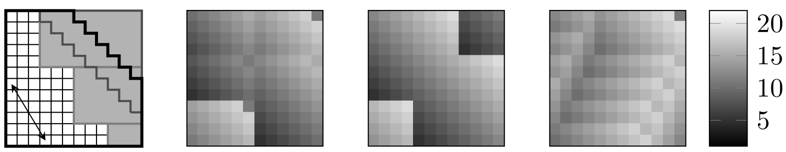
Лемма 5.4. Пусть $B = E_{n1} + E_{pq}$ удовлетворяет условию предложения 5.1. Если $B \neq C_n = E_{n1} + E_{n/2,n/2+1}$, то $l(J, B) \leqslant 2n-3$.

Доказательство. Если E_{pq} лежит на диагонали с номером не меньше 2 $(q-p \geqslant 2)$, то $BJ^{p-1}B = E_{nq} \in \mathcal{L}_{p+1}$, выполнено неравенство $p+1 \leqslant (n-1)+(q-n)$ и E_{nq} является опережающей. На диагонали 1 этого построения недостаточно, однако при $B \neq C_n$ выполнено $2p+1 \leqslant n$ и, соответственно, в качестве опережающей единицы можно взять $BJ^p - BJ^{p-1}B = E_{p,2p+1} \in \mathcal{L}_{p+1}$, поскольку заведомо выполнено $p+1 \leqslant (n-1)+(p+1)$.

Для E_{pq} на диагонали с номером 0 и меньше воспользуемся тем, что $BJ^{p-q}B = E_{pq} \in \mathcal{L}_{p-q+2}$ (единицу в середине можно вертикально сдвинуть на диагональ), и для получения опережающей единицы будем совмещать левые нижние углы сдвинутых копий матрицы B с уже имеющимися единицами, начиная с E_{pq}.

Для того, чтобы переставить единицу из E_{n1} на первоначальную позицию правой единицы B, требуется $\Delta = (n-p)+(q-1)$ умножений на J, поэтому за $p-q+1$ умножение можно произвести сдвиг $\kappa = \lfloor \frac{p-q+1}{\Delta} \rfloor$ раз, добравшись до единицы на диагонали с номером $\Delta(\kappa+1)-(n-1)$. При этом нужно следить, чтобы координаты оставались внутри матрицы, – так как $n-p \geqslant q-1$, это контролируется условием $n-\kappa(n-p) \geqslant 1$ (которое всегда выполнено, так как $\kappa(n-p) < p-q+1$, и поэтому $n-\kappa(n-p) \geqslant 1$). Тогда верхняя правая из полученных единиц будет являться опережающей, поскольку $p-q+2 \leqslant \Delta(\kappa+1)$; явно она выражается в виде альтернированной суммы $J^{\kappa(n-p)}BJ^{\kappa(q-1)} - J^{(\kappa-1)(n-p)}BJ^{(\kappa-1)(q-1)} + \cdots \pm E_{pq}$. □

Следующие изображения иллюстрируют доказательства утверждений 5.2, 5.3, 5.4. На левом изображении для $B = E_{71} + E_{12,4}$ стрелкой показаны места матричных единиц в B; жирным чёрным контуром обведены матричные единицы, до которых от E_{n1} можно добраться в $\mathcal{L}_{2n-3}$ (то есть до $n-p+q-4$-й диагонали включительно); серая область — места, которые заполняются после исчезновения верхней единицы B сдвигами вверх, а также последующих сдвигов “вверх/вправо/вправо-вниз”; треугольник с серой границей объединяет диагонали, полностью входящие в серую область ($q-1$-я и выше). На остальных трёх (они соответствуют $E_{12,1} + E_{47}$, $E_{12,1} + E_{45}$ и $E_{12,1} + E_{10,2}$) для каждой матричной единицы цветом показан номер $k \in [1, 22]$, на котором она впервые появляется в $\mathcal{L}_k$:



Собирая результаты двух лемм и [4, теоремы 4.16], получаем следующее утверждение.

Теорема 5.5. Пусть B удовлетворяет условию предложения 5.1. Если n чётное и $B \in \{B_n = (J^T)^{n-2}, C_n = E_{n1} + E_{n/2,n/2+1}\}$, то $l(J,B) = 2n-2$. Во всех остальных случаях, $l(J,B) \leqslant 2n-3$.

В частности, из рассмотрения $\{J, C_n\}$ и $\{J, E_{n1}+E_{12}\}$ получаем, что граф Бёрнсайда системы не определяет её длину.

Интересен также вопрос, какие точные значения функция длины может принимать на таких системах $\{J, B\}$. Компьютерные вычисления показывают, что при $n \in [3, 16]$ на этих $(3n-4)(n-1)/2$ системах достигаются все значения из отрезка $[\lfloor \frac{4n}{3} \rfloor - 1, 2n-2-(n \bmod 2)]$ и только они. Авторы предполагают, что подобное будет выполняться и в высших размерностях.

§6. Заключение

В работе теоремы Лаффи из [7, 9] о порождающих системах обобщены на класс жордановых циклических матриц. Получен ряд вспомогательных результатов о порождающих системах, верных при более общей постановке. Построены примеры различного поведения систем, не содержащих циклических матриц; установлено, что утверждение о жордановых матрицах, подобное теоремам Лаффи, может иметь место только для циклической матрицы. Также исследовано поведение некоторых систем с циклической матрицей и матрицей ранга 2.

Авторы благодарят А.Э. Гутермана за важные замечания, позволившие улучшить статью.

Список литературы

1. Yu.A. Al'pin, Kh.D. Ikramov, *Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria.* — Linear Algebra Appl. **313** (2000), 155–161.
2. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers.* — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 2904–2910.
3. M. Elyze, A. Guterman, R. Morrison, K. Sivic, *Higher-distance commuting varieties.* — Linear Multilinear Algebra, DOI:10.1080/03081087.2020.1834493 (2020).
4. A. Guterman, T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018), 234–250.
5. A.E. Guterman, O.V. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices.* — Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.
6. R. Kippenhahn, *Über der Wertevorrat einer Matrix.* — Math. Nachr. **6** (1951–52), 193–228.
7. T. Laffey, *A note on matrix subalgebras containing a full Jordan block.* — Linear Algebra Appl. **37** (1981), 187–189.
8. T. Laffey, *A counterexample to Kippenhahn's conjecture on Hermitian pencils.* — Linear Algebra Appl. **51** (1983), 179–183.
9. T. Laffey, *A structure theorem for some matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **162–164** (1992), 205–215.
10. B. Lawrence, *Burnside graphs, algebras generated by sets of matrices, and the Kippenhahn conjecture.* — Linear Multilinear Algebra **67** (2019), 51–69.
11. V. Lomonosov, P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **383** (2004), 45–47.

12. W.E. Longstaff, *On minimal sets of* $(0, 1)$*-matrices whose pairwise products form a basis for* $M_n(\mathbb{F})$. — Bull. Austral. Math. Soc. **98**, No. 3 (2018), 402–413.
13. W.E. Longstaff, *Irreducible families of complex matrices containing a rank-one matrix.* — Bull. Austral. Math. Soc. **102**, No. 2 (2020), 226–236.
14. W.E. Longstaff, P. Rosenthal, *On the lengths of irreducible pairs of complex matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **139**, No. 11 (2011), 3769–3777.
15. О.В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. матем. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
16. A. Paz, *An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
17. Y. Shitov, *An improved bound for the lengths of matrix algebras.* — Algebra Number Theory **13**, No. 6 (2019), 1501–1507.
18. W. Waterhouse, *A conjectured property of Hermitian pencils.* — Linear Algebra Appl. **51** (1983), 173–177.

Markova O. V., Novochadov D. Yu. Generating systems of the full matrix algebra that contain nonderogatory matrices.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra over a field $\mathbb{F}$ generated by a set of matrices $\mathcal{S}$. The paper considers algorithmic aspects of checking whether $\mathcal{A}$ coincides with the full matrix algebra. Laffey has shown that for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, under the assumption that $\mathcal{S}$ contains a Jordan matrix from a certain class, there is a fast method for checking whether $\mathcal{A}$ possesses nontrivial invariant subspaces and, consequently, coincides with the full algebra by Burnside's theorem. This paper extends the class to the largest subclass of Jordan matrices on which the algorithm works correctly. Examples demonstrating the different behavior of other matrix systems are provided.

Поступило 4 октября 2021 г.

Московский
государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Россия
E-mail: ov_markova@mail.ru

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия
E-mail: dnovochadov@yandex.ru