Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

О ПОСТРОЕНИИ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ МИНИМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

§1. Введение

Одной из основных задач построения сплайн-аппроксимации является определение коэффициентов при базисных функциях. При интерполяции полиномиальными сплайнами нечетной степени множество точек интерполяции и сетку узлов сплайна принято выбирать совпадающими, а для сплайнов четной степени – несовпадающими. Решением общей задачи интерполяции будет являться *простой* полиномиальный сплайн наименьшего дефекта 1, т.е. максимальной гладкости. Такие сплайны имеют нелокальный характер, для их вычисления требуется решать систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой совпадает с количеством точек интерполяции. Для решения задачи интерполяции параболическими сплайнами классическими можно считать два подхода: по Субботину и по Марсдену. Ю. Н. Субботин предложил узлы параболического сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции, а М. Марсден стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна. Вообще говоря, в случае неравномерных сеток получаются две принципиально различные конструкции (на равномерных сетках это одно и то же), имеющие различные аппроксимационные свойства, в целом предназначенные для решения разных задач (подробнее см., например, [1, 2]).

В последние десятилетия активное развитие получили локальные методы, в которых коэффициенты при базисных функциях определяются как значения аппроксимационных функционалов, представляющих из себя, например, линейные комбинации значений функции и ее производных в нескольких точках (подробнее см. [3–9]). Локальные

Ключевые слова: минимальные сплайны, B-сплайны, локальная аппроксимация, квазиинтерполяция.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-31-90095.

схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, называют *квазиинтерполяцией*, а возникающие при их построении функционалы – *квазиинтерполяционными*. Квазиинтерполяционные функционалы построены для различных сплайнов [10–17]. Приближение функций на основе квазиинтерполяции широко применяется при решении краевых задач математической физики [18–21], в методах численного дифференцирования и интегрирования [22], в системах автоматизированного проектирования и др. В частности, окружности и их дуги являются распространенным инструментарием в этих системах, разнообразные техники аппроксимации дуги окружности рассмотрены в различных работах (см., например, работы [23–27] и их библиографию).

Целью данной работы является построение аппроксимационных (квазиинтерполяционных) функционалов для минимальных сплайнов. Сплайны, полученные из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и порождающей вектор-функции, обладающие минимальным носителем, назваются *минимальными* сплайнами (см., например, [28–30]). Определенный способ выбора упомянутой цепочки векторов позволяет рассмотреть минимальные сплайны максимальной гладкости и установить единственность пространства таких сплайнов [31]. Минимальные сплайны предоставляют прекрасный аппарат аппроксимации, поскольку они получаются из аппроксимационных соотношений.

Оказывается, что при квазиинтерполяции квадратичными полиномиальными сплайнами можно использовать подходы, схематически аналогичные интерполяции по Субботину и по Марсдену. А. И. Гребенников [10] аналогично Ю. Н. Субботину строил усредняющие локальные схемы, выбирая узлы сплайна посередине между заданными дискретными значениями функции, а позже П. Шаблонир [12] аналогично М. Марсдену стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки для квазиинтерполяции выбирал посередине между узлами сплайна. Эти схемы можно считать частными случаями построенных в данной работе схем при выборе полиномиальной порождающей вектор-функции для построения минимальных сплайнов. Вообще говоря, можно рассматривать и смешанную конструкцию упомянутых выше подходов – n-точечную квазиинтерполяцию. В этом случае сетка узлов сплайна считается заданной, а точки для квазиинтерполяции выбираются и в *основных* узлах сплайна, и в *дополнительных* узлах сетки – между узлами сплайна. Такой подход рассматривался, например, в работе [13]. В этой работе мы рассматриваем обобщение этого подхода на случай минимальных сплайнов, используя трехточечную схему построения.

Данная работа продолжает исследования по построению биортогональных систем функционалов для минимальных сплайнов невысоких порядков, начатые в работах [32, 33]. Основанная на использовании этих функционалов схема приближения была успешно применена в ряде практических задач: для приближения экспоненциальных кривых [34], дуги окружности [27], а также для ряда функций, обладающих экспоненциальным пограничным слоем и возникающих при решении сингулярно возмущенных краевых задач [35, 36]. В данной работе приводятся результаты численных экспериментов по приближению дуги окружности минимальными сплайнами с различными порождающими вектор-функциями, при этом в качестве коэффициентов используются значения различных аппроксимационных функционалов. Мы также приводим формулы для построения биортогональных функционалов типа де Бура–Фикса в целях использования их в численном эксперименте.

§2. Пространство квадратичных минимальных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ := \{j \mid j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^1$ – множество вещественных чисел. Векторное (линейное) пространство трехмерных вектор-столбцов обозначим через $\mathbb{R}^3$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ выражение $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ (в указанном порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ обозначает ее определитель. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются целыми числами; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Для любого $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S[a,b] := \{u \mid u^{(i)} \in C[a,b],$ $i = 0, 1, \ldots, S\}$, полагая $C^0[a,b] := C[a,b]$. Будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S[a,b]$, если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемы S раз на отрезке $[a,b]$.

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X:

$$a = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = b. \quad (1)$$

Введем обозначение $J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}$, $i, k \in \mathbb{Z}$, $i < k$. Упорядоченное множество $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов*. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной* цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0,n-1}$.

Введем обозначения для объединения элементарных сеточных интервалов $M := \cup_{j \in J_{0,n-1}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Пусть $S_j := [x_j, x_{j+3}]$, $j \in J_{-2,n-1}$.

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a, b]$ и ненулевым вронскианом $W(t)$:

$$W(t) := \det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}''(t)) \neq 0, \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Пусть $\mathbf{A}$ – полная цепочка векторов. Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^{k} \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t), \quad & t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv 0, \qquad & t \in M \backslash S_j, \ j \in J_{-2,n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ и любого $k \in J_{0,n-1}$ соотношения (3) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки векторов $\mathbf{A}$, система (3) имеет единственное решение. По формулам Крамера находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j' \in J_{k-2,k}, j' \neq j} \ \ \| \ \ {}'^j \, \boldsymbol{\varphi}(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k\Big)}, \ \ t \in (x_k, x_{k+1}), \ \ j \in J_{k-2,k},$$

где символьная запись $\| \ {}'^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Отсюда также следует, что $\operatorname{supp} \omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$-*сплайнов*, которое мы будем обозначать через

$$\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi}) := \left\{ u(t) \mid u(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\,\omega_j(t),\ \ c_j \in \mathbb{R}^1,\ t \in [a,b] \right\}.$$

Тождества (3) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* (или *генерирующей*) сплайн вектор-функцией.

Для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1[a,b]$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j), \quad \boldsymbol{\varphi}'_j := \boldsymbol{\varphi}'(x_j), \quad j \in J_{-2,n+2},$$

и рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$, задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T\mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}'_j, \boldsymbol{\varphi}''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A} = \mathbf{A}^N := \{\mathbf{a}_j^N\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^N := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \alpha_{j+1}\boldsymbol{\varphi}'_{j+1}, \tag{5}$$

где $\alpha_{j+1} := \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T\,\boldsymbol{\varphi}'_{j+1}}$.

Известно [31], что если выполнено условие

$$|W(t)| \geqslant c = \mathrm{const} > 0 \ \text{ для всех } \ t \in [a,b],$$

то при достаточно малом $h_X := \sup\limits_{j \in J_{0,n-1}} (x_{j+1} - x_j)$ цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j^N\}$, $j \in J_{0,n-1}$, является полной, и функции $\omega_j \in C^1[a,b]$ для каждого $j \in J_{-2,n-1}$. Более того, если $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1$, где вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}_1$ такая, что $[\boldsymbol{\varphi}_1(t)]_0 \equiv 1$, то справедливо свойство разбиения единицы:

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) = 1, \quad t \in [a,b].$$

В этом случае функции $\omega_j(t)$ называются *квадратичными нормализованными минимальными координатными $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами*, а соответствующее пространство координатных сплайнов обозначается через $\mathbb{S}(X) := \mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi}_1)$. При этом справедлива следующая теорема [32].

Теорема 1. *Функция $\omega_j \in C^1[a,b]$ и ее производная представимы формулами ($i = 0, 1$):*

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{6}$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{7}$$

$$\omega_j^{(i)}(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \tag{8}$$

Замечание 1. Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными квадратичными полиномиальными B-сплайнами (третьего порядка) $\omega_j^B(t)$:

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{(t - x_j)^2}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{1}{x_{j+1} - x_j} \left(\dfrac{(t - x_j)^2}{x_{j+2} - x_j} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{(t - x_{j+1})^2 (x_{j+3} - x_j)}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+1})} \right), & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{(t - x_{j+3})^2}{(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+2})}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $g \in \mathbb{S}(X)$, т.е. сплайн $g(t)$ на отрезке $t \in [a, b]$ представим в виде $g(t) = \sum\limits_{j=-2}^{n-1} c_j \, \omega_j(t)$, $c_j \in \mathbb{R}^1$. Тогда*

(1) *Если $t \in [x_k, x_{k+1})$ для некоторого $k = 0, \ldots, n-1$, то $g(t) = \sum\limits_{j=k-2}^{k} c_j \, \omega_j(t)$.*

(2) *Справедливы равенства $g(a) = c_{-2}$ и $g(b) = c_{n-1}$.*

Доказательство. Справедливость первого утверждения следует из рассмотрения расположения конечного носителя сплайн-функции $\operatorname{supp} \omega_j = [x_j, x_{j+3}]$ для различных j.

Докажем второе утверждение. Известно (подробнее см. [37]), что если $x^* := x_j = x_{j+1} = x_{j+2} < x_{j+3}$, то $\omega_j(x^*) = 1$, а $\omega_{j'}(x^*) = 0$

для $j' \neq j$. Поэтому, по первому утверждению теоремы, верна цепочка равенств $g(a) = g(x_0) = c_{-2}\,\omega_{-2}(x_0) + c_{-1}\,\omega_{-1}(x_0) + c_0\,\omega_0(x_0) = c_{-2}$. Аналогично устанавливается, что $g(b) = g(x_n) = c_{n-1}$. $\square$

Пусть далее $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^2[a, b]$. Используя обозначение (подробнее см. [33])

$$\Delta_j(\rho,\, \sigma) := \begin{vmatrix} \rho_j & \rho'_j \\ \sigma_j & \sigma'_j \end{vmatrix},$$

где $\rho_j := \rho(x_j), \sigma_j := \sigma(x_j)$, из тождества (4) получаем

$$\mathbf{d}_j = (\Delta_j(\rho,\, \sigma), -\sigma'_j,\, \rho'_j)^T. \tag{10}$$

Введем обозначение

$$S_j(\rho,\, \sigma,\, \tau) := -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_j(\rho,\, \sigma) & \Delta_{j+1}(\rho,\, \sigma) \\ \tau_j & \tau_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j+1} \\ \sigma_j & \sigma_{j+1} \end{vmatrix}},$$

где $\tau \in C^1[a, b]$, $\tau_j := \tau(x_j)$.

Тогда, в силу соотношения (5), для вектора $\mathbf{a}_j^N$ справедливо представление

$$\mathbf{a}_j^N = (1,\, S_{j+1}(\rho,\, \sigma,\, \rho'),\, S_{j+1}(\rho,\, \sigma,\, \sigma'))^T\,. \tag{11}$$

Ввиду соотношений (10) и (11), имеем

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{vmatrix} \rho'_j & \rho(t) - \rho_j \\ \sigma'_j & \sigma(t) - \sigma_j \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = \begin{vmatrix} \rho'_j & S_{k+1}(\rho,\, \sigma,\, \rho') - \rho_j \\ \sigma'_j & S_{k+1}(\rho,\, \sigma,\, \sigma') - \sigma_j \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Далее, используя равенства (12) и (13), а также соотношения (6)–(8), получим формулы для минимальных квадратичных нормализованных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов в явном виде.

При $t \in [x_j,\, x_{j+1})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\begin{vmatrix} \rho'_j & \rho(t) - \rho_j \\ \sigma'_j & \sigma(t) - \sigma_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \rho') - \rho_j \\ \sigma'_j & S_{j+1}(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma_j \end{vmatrix}}. \tag{14}$$

Если $t \in [x_{j+1},\, x_{j+2})$, то получаем цепочку равенств

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N\, \mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N\, \mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N\, \mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) & \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N \\ \mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t) & \mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N \end{vmatrix}}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N\, \mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \rho_j' & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho') - \rho_j & \rho(t) - \rho_j & 0 \\ \sigma_j' & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma_j & \sigma(t) - \sigma_j & 0 \\ 0 & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho') - \rho_{j+1} & \rho(t) - \rho_{j+1} & \rho_{j+1}' \\ 0 & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma_{j+1} & \sigma(t) - \sigma_{j+1} & \sigma_{j+1}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j' & S_{j+1}(\rho,\sigma,\rho') - \rho_j \\ \sigma_j' & S_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho_{j+1}' & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho') - \rho_{j+1} \\ \sigma_{j+1}' & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma_{j+1} \end{vmatrix}}. \qquad (15)$$

При $t \in [x_{j+2},\, x_{j+3})$ имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\begin{vmatrix} \rho_{j+3}' & \rho(t) - \rho_{j+3} \\ \sigma_{j+3}' & \sigma(t) - \sigma_{j+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_{j+3}' & S_{j+1}(\rho,\sigma,\rho') - \rho_{j+3} \\ \sigma_{j+3}' & S_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma_{j+3} \end{vmatrix}}. \qquad (16)$$

§3. О методе приближения

Рассмотрим схему построения приближения некоторой заданной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ сплайн-функциями из пространства $\mathbb{S}(X)$, описываемую следующим алгоритмом.

(1) Рассмотрим отрезок $I = [x_\mu,\, x_\nu] \subset [a,b]$ такой, что $I \cap (x_j, x_{j+3}) \neq \varnothing$. Обозначим через f^I сужение функции f на отрезок I, т.е. $f^I := f|_{[x_\mu,\, x_\nu]}$.

(2) С помощью некоторого метода локальной аппроксимации P^I построим приближение g^I функции f^I в виде

$$g^I = P^I f^I = \sum_{i=\mu-2}^{\nu-1} b_i\, \omega_i, \quad b_i \in \mathbb{R}^1. \qquad (17)$$

(3) Аппроксимацию функции f на отрезке $[a,b]$ обозначим через

$$Pf = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1. \qquad (18)$$

Тогда в качестве коэффициента c_j аппроксимации (18) выберем полученное на предыдущем шаге значение b_j, т.е. положим $c_j = b_j$.

Обозначим через $\mathbb{S}(X^I)$ сужение пространства $\mathbb{S}(X)$ на отрезок I. Тогда справедливо следующее утверждение относительно точности предложенной схемы аппроксимации.

Теорема 3. *Если метод локальной аппроксимации P^I обладает свойством точности на функциях пространства $\mathbb{S}(X^I)$ (т.е. воспроизводит любую функцию этого пространства), то аппроксимация Pf является точной на всем пространстве $\mathbb{S}(X)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}(X)$. Тогда, согласно (18), имеем $f = \sum\limits_{j=-2}^{n-1} c_j\omega_j$, и поэтому сужение f^I представимо в виде $f^I = \sum\limits_{j=\mu-2}^{\nu-1} c_j\omega_j$.

Если метод P^I воспроизводит функцию f^I, то, в силу представления (17), имеем

$$f^I = P^I f^I = \sum_{i=\mu-2}^{\nu-1} b_i\,\omega_i.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=\mu-2}^{\nu-1} c_i\,\omega_i = \sum\limits_{i=\mu-2}^{\nu-1} b_i\,\omega_i$. Откуда, ввиду линейной независимости функций $\{\omega_i\}$ на отрезке I, следует равенство $c_i = b_i$ для всех $i \in J_{\mu-2,\nu-1}$. Устанавливая данное утверждение последовательно для каждого значения индекса $j \in J_{-2,n-1}$, получаем, что $Pf = f$, и рассматриваемая аппроксимация действительно обладает свойство точности на пространстве $\mathbb{S}(X)$. □

§4. Трехточечные аппроксимационные функционалы

Рассмотрим отрезок $I = [x_{j+1}, x_{j+2}] \subset [a,b]$. Нам требуется построить метод локальный аппроксимации P^I, обладающий точностью на функциях $f \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \,|\, i = 0,1,2\}$. Например, в качестве P^I можно использовать интерполяцию в трех произвольных точках отрезка I – узлах $x_{j+1}, x_{j+3/2} := x_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x_{j+1})$, где $\theta \in (0,1)$, и x_{j+2}.

Представим (17) в виде

$$P^I f(t) := \alpha\,\omega_{j-1}(t) + \beta\,\omega_j(t) + \gamma\,\omega_{j+1}(t), \quad t \in I, \tag{19}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^1$.

Тогда для нахождения коэффициентов в представлении (19) требуется найти решение системы линейных алгебраических уравнений, каждое из которых соответствует равенству $P^I f$ и f в узлах x_{j+1}, $x_{j+3/2}$ и x_{j+2}:

$$\begin{cases} \alpha\,\omega_{j-1}(x_{j+1}) + \beta\,\omega_j(x_{j+1}) + \gamma\,\omega_{j+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \\ \alpha\,\omega_{j-1}(x_{j+3/2}) + \beta\,\omega_j(x_{j+3/2}) + \gamma\,\omega_{j+1}(x_{j+3/2}) = f(x_{j+3/2}), \\ \alpha\,\omega_{j-1}(x_{j+2}) + \beta\,\omega_j(x_{j+2}) + \gamma\,\omega_{j+1}(x_{j+2}) = f(x_{j+2}). \end{cases} \tag{20}$$

В соответствии с общей схемой построения аппроксимации (18), значением аппроксимационного функционала c_j является коэффициент β в представлении (19).

Из расположения носителя функции $\omega_j(t)$ получаем равенство $\omega_{j-1}(x_{j+2}) = \omega_{j+1}(x_{j+1}) = 0$. Тогда, выражая коэффициенты α и γ из первого и третьего уравнений системы (20) и подставляя их во второе, имеем

$$\beta = \frac{f(x_{j+3/2}) - f(x_{j+1})\,\frac{\omega_{j-1}(x_{j+3/2})}{\omega_{j-1}(x_{j+1})} - f(x_{j+2})\,\frac{\omega_{j+1}(x_{j+3/2})}{\omega_{j+1}(x_{j+2})}}{\omega_j(x_{j+3/2}) - \omega_j(x_{j+1})\,\frac{\omega_{j-1}(x_{j+3/2})}{\omega_{j-1}(x_{j+1})} - \omega_j(x_{j+2})\,\frac{\omega_{j+1}(x_{j+3/2})}{\omega_{j+1}(x_{j+2})}}. \tag{21}$$

Заметим, что на каждом сеточном интервале (14)–(16) функция $\omega_j(t)$ представлена в виде дробей, знаменатель которых от t не зависит. Поэтому знаменатели в представлении функции $\omega_{j-1}(t)$ в узлах x_{j+1} и $x_{j+3/2}$, а также функции $\omega_{j+1}(t)$ в узлах $x_{j+3/2}$ и x_{j+2} совпадают. Соответствующие числители, в зависимости от требуемого интервала, обозначим через $\omega_j^l(t)$ для формулы (14), $\omega_j^c(t)$ для (15) и $\omega_j^r(t)$ для (16). Заменяя отношения дробей, встречающихся в выражении (21), на отношения их числителей, и домножая числитель и знаменатель правой части выражения (21) на множитель $\omega_{j-1}^r(x_{j+1})\,\omega_{j+1}^l(x_{j+2})$, получаем

$$\beta = \Delta^{-1}\left(\lambda^{\langle 1\rangle} f(x_{j+1}) - \lambda^{\langle 3/2\rangle} f(x_{j+3/2}) + \lambda^{\langle 2\rangle} f(x_{j+2})\right),$$

где использованы следующие обозначения:

$$\lambda^{\langle 1\rangle} := \omega_{j-1}^r(x_{j+3/2})\,\omega_{j+1}^l(x_{j+2}),$$

$$\lambda^{\langle 3/2\rangle} := \omega_{j-1}^r(x_{j+1})\,\omega_{j+1}^l(x_{j+2}),$$

$$\lambda^{\langle 2\rangle} := \omega_{j-1}^r(x_{j+1})\,\omega_{j+1}^l(x_{j+3/2}),$$

$$\Delta := \lambda^{\langle 1\rangle}\,\omega_j(x_{j+1}) - \lambda^{\langle 3/2\rangle}\,\omega_j(x_{j+3/2}) + \lambda^{\langle 2\rangle}\,\omega_j(x_{j+2}).$$

Осталось вычислить значения $\lambda^{\langle 1\rangle}$, $\lambda^{\langle 3/2\rangle}$, $\lambda^{\langle 2\rangle}$ и Δ в явном виде. Для этого воспользуемся соотношениями (14)–(16). Получим следующие значения:

$$\lambda^{\langle 1\rangle} = -\begin{vmatrix} \rho'_{j+1} & \rho_{j+2}-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+1} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \rho'_{j+2} & \rho_{j+2}-\rho_{j+3/2} \\ \sigma'_{j+2} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+3/2} \end{vmatrix},$$

$$\lambda^{\langle 3/2\rangle} = -\begin{vmatrix} \rho'_{j+1} & \rho_{j+2}-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+1} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \rho'_{j+2} & \rho_{j+2}-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+2} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+1} \end{vmatrix},$$

$$\lambda^{\langle 2\rangle} = -\begin{vmatrix} \rho'_{j+1} & \rho_{j+3/2}-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+1} & \sigma_{j+3/2}-\sigma_{j+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \rho'_{j+2} & \rho_{j+2}-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+2} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \lambda^{\langle 1\rangle}\,\frac{\begin{vmatrix} \rho'_{j} & \rho_{j+1}-\rho_{j} \\ \sigma'_{j} & \sigma_{j+1}-\sigma_{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_{j} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j} \\ \sigma'_{j} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j} \end{vmatrix}} + \lambda^{\langle 2\rangle}\,\frac{\begin{vmatrix} \rho'_{j+3} & \rho_{j+2}-\rho_{j+3} \\ \sigma'_{j+3} & \sigma_{j+2}-\sigma_{j+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_{j+3} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j+3} \\ \sigma'_{j+3} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j+3} \end{vmatrix}}$$

$$-\lambda^{\langle 3/2\rangle}\,\frac{\begin{vmatrix} \rho'_{j} & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j} & \rho_{j+3/2}-\rho_{j} & 0 \\ \sigma'_{j} & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j} & \sigma_{j+3/2}-\sigma_{j} & 0 \\ 0 & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j+1} & \rho_{j+3/2}-\rho_{j+1} & \rho'_{j+1} \\ 0 & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j+1} & \sigma_{j+3/2}-\sigma_{j+1} & \sigma'_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho'_{j} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j} \\ \sigma'_{j} & S_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \rho'_{j+1} & S_{j+2}(\rho,\sigma,\rho')-\rho_{j+1} \\ \sigma'_{j+1} & S_{j+2}(\rho,\sigma,\sigma')-\sigma_{j+1} \end{vmatrix}}.$$

Заметим, что проведенные рассуждения корректны для узлов $x_{j+1} < x_{j+2}$, $j \in J_{-1,n-2}$. Для концевых кратных узлов сетки (1) коэффициенты c_j для $j=-2$ и $j=n-1$ в разложении (18) вычисляются, благодаря справедливости равенств $g(x_0)=c_{-2}$ и $g(x_n)=c_{n-1}$, для любого сплайна $g \in \mathbb{S}(X)$ по теореме 2. Поэтому можно положить $c_{-2}=f(x_0)$ и $c_{n-1}=f(x_n)$.

Таким образом, аппроксимация (18) функции f может быть записана в виде

$$Pf = \sum_{j=-2}^{n-1} \lambda_j(f)\,\omega_j, \tag{22}$$

где искомый аппроксимационный функционал определяется следующим образом:

$$\lambda_j(f) := \begin{cases} f(x_0), & j=-2, \\ \Delta^{-1}\big(\lambda^{\langle 1\rangle} f(x_{j+1}) - \lambda^{\langle 3/2\rangle} f(x_{j+3/2}) \\ \qquad +\lambda^{\langle 2\rangle} f(x_{j+2})\big), & j=-1,\dots,n-2, \\ f(x_n), & j=n-1. \end{cases} \tag{23}$$

Замечание 2. Общая схема построения приближения позволяет выбирать промежуток I иначе, например, $I=[x_j,x_{j+1}]$. В этом случае локальную аппроксимацию (17) следует строить в виде

$$P^I f(t) := \alpha'\,\omega_{j-2}(t) + \beta'\,\omega_{j-1}(t) + \gamma'\,\omega_j(t), \quad t\in I,$$

где $\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{R}^1$, а значение функционала определять по коэффициенту γ' из системы уравнений, определяющих равенства $P^I f$ и f в узлах x_j, $x_{j+1/2}$, x_{j+1}. Однако наиболее компактное представление функционала получается при рассмотрении отрезка $I=[x_{j+1},x_{j+2}]$.

Замечание 3. Для $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,\, t,\, t^2)^T$ при $\theta = 1/2$ функционал (23) имеет вид

$$\lambda_j(f) = -\frac{1}{2}\left(f(x_{j+1}) - 4f(x_{j+3/2}) + f(x_{j+2})\right), \quad j=-1,\dots,n-2,$$

и совпадает с известным квазиинтерполяционным функционалом для квадратичных B-сплайнов (см., например, [13]).

§5. Усредняющие аппроксимационные функционалы

Здесь, для удобства, необходимые объекты, рассматриваемые на сетке X, будем снабжать верхним индексом X, т.е. будем писать ω_j^X, $S_j^X(\rho,\sigma,\tau)$ и т.п. Тогда, в соответствии с представлением (11), покомпонентная запись аппроксимационных соотношений (3) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=-2}^{n-1} \omega_j^X(t) = 1, \\ \sum\limits_{j=-2}^{n-1} S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\rho')\,\omega_j^X(t) = \rho(t), \\ \sum\limits_{j=-2}^{n-1} S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\sigma')\,\omega_j^X(t) = \sigma(t). \end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим вспомогательную сетку Y, состоящую из узлов

$$y_j := \begin{cases} x_0, \quad j=-2, \\ x_{j+1} + \theta(x_{j+2} - x_{j+1}), \;\; \theta \in [0,1], \;\; j = -1, \dots, n-2, \\ x_n, \quad j = n-1. \end{cases} \tag{25}$$

Будем строить аппроксимацию Pf исходной функции f в виде

$$Pf = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j(f)\, \omega_j^X,$$

где аппроксимационный функционал $\mu_j(f)$ определим следующим образом:

$$\mu_j(f) := \begin{cases} f(y_{-2}), \quad j=-2, \\ a_j f(y_{j-1}) + b_j f(y_j) + c_j f(y_{j+1}), \quad j = -1, \dots, n-2, \\ f(y_{n-1}), \quad j = n-1. \end{cases} \tag{26}$$

Как и прежде, необходимо, чтобы аппроксимация Pf обладала свойством точности на функциях $f \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \,|\, i = 0,1,2\}$. На этот раз добьемся выполнения указанного свойства за счет подходящего выбора коэффициентов a_j, b_j, c_j функционала (26). Выписывая условие точности в явном виде, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=-2}^{n-1} (a_j + b_j + c_j)\, \omega_j^X(t) = 1, \\ \sum\limits_{j=-2}^{n-1} (a_j \rho(y_{j-1}) + b_j \rho(y_j) + c_j \rho(y_{j+1}))\, \omega_j^X(t) = \rho(t), \\ \sum\limits_{j=-2}^{n-1} (a_j \sigma(y_{j-1}) + b_j \sigma(y_j) + c_j \sigma(y_{j+1}))\, \omega_j^X(t) = \sigma(t). \end{cases} \tag{27}$$

Приравнивая левые части соответствующих уравнений в системах (24) и (27), получаем систему уравнений для коэффициентов a_j, b_j, c_j:

$$\begin{cases} a_j + b_j + c_j = 1, \\ a_j \rho(y_{j-1}) + b_j \rho(y_j) + c_j \rho(y_{j+1}) = S_{j+1}^X(\rho,\, \sigma,\, \rho'), \\ a_j \sigma(y_{j-1}) + b_j \sigma(y_j) + c_j \sigma(y_{j+1}) = S_{j+1}^X(\rho,\, \sigma,\, \sigma'). \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a_j = 1 - b_j - c_j.$$

$$b_j = \frac{(\rho(y_{j+1}) - \rho(y_{j-1}))(S_{j+1}^X(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma(y_{j-1})) - (S_{j+1}^X(\rho,\sigma,\rho') - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1}) - \sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1}) - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j) - \sigma(y_{j-1})) - (\rho(y_j) - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1}) - \sigma(y_{j-1}))},$$

$$c_j = \frac{(S^X_{j+1}(\rho,\sigma,\rho') - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j) - \sigma(y_{j-1})) - (\rho(y_j) - \rho(y_{j-1}))(S^X_{j+1}(\rho,\sigma,\sigma') - \sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1}) - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j) - \sigma(y_{j-1})) - (\rho(y_j) - \rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1}) - \sigma(y_{j-1}))}.$$

Замечание 4. Для вычисления значения $\mu_{-2}(f)$ требуется определить дополнительный узел y_{-3}. Однако этого можно не делать, так как по теореме 2 любой сплайн пространства $\mathbb{S}(X)$ интерполирует первый и последний коэффициенты разложения на концах отрезка $[a,b]$. Поэтому можно положить $\mu_{-2}(f) := f(y_{-2})$. Аналогично, $\mu_{n-1}(f) := f(y_{n-1})$.

Замечание 5. Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1,t,t^2)^T$ при $\theta = 1/2$ функционал (26) на равномерной сетке имеет вид

$$\mu_j(f) = -\frac{1}{8}\left(f(y_{j-1}) - 10f(y_j) + f(y_{j+1})\right)$$

и совпадает с известным квазиинтерполяционным функционалом для квадратичных B-сплайнов, вид которого приведен, например, в работе [12].

Рассмотрим сетку Z, состоящую из узлов

$$z_j := \begin{cases} x_0, & j = -1, 0, 1, \\ x_{j-2} + \theta(x_{j-1} - x_{j-2}), \ \ \theta \in [0,1], & j = 2, \dots, n+1, \\ x_n, & j = n+2, n+3, n+4. \end{cases} \tag{28}$$

На сетке (28), используя формулы (14)–(16), построим сплайн-функции, снабжая по необходимости объекты, рассматриваемые на сетке Z, верхним индексом Z, например, ω_j^Z, $S_j^Z(\rho,\sigma,\tau)$ и т.п.

Аппроксимацию Pf исходной функции f будем строить в виде

$$Pf = \sum_{j=-1}^{n+1} \nu_j(f)\,\omega_j^Z,$$

где функционал $\nu_j(f)$ определим следующим образом:

$$\nu_j(f) := \begin{cases} f(x_0), & j = -1, \\ a_j' f(x_{j-1}) + b_j' f(x_j) + c_j' f(x_{j+1}), & j = 0, \dots, n, \\ f(x_n), & j = n+1. \end{cases} \tag{29}$$

Требование точности аппроксимации Pf на функциях $f \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \mid i = 0, 1, 2\}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=-1}^{n+1} (a'_j + b'_j + c'_j)\, \omega_j^Z(t) = 1, \\ \sum\limits_{j=-1}^{n+1} (a'_j \rho(x_{j-1}) + b'_j \rho(x_j) + c'_j \rho(x_{j+1}))\, \omega_j^Z(t) = \rho(t), \\ \sum\limits_{j=-1}^{n+1} (a'_j \sigma(x_{j-1}) + b'_j \sigma(x_j) + c'_j \sigma(x_{j+1}))\, \omega_j^Z(t) = \sigma(t). \end{cases} \tag{30}$$

Тогда на сетке Z можно записать тождества, аналогичные (24):

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=-1}^{n+1} \omega_j^Z(t) = 1, \\ \sum\limits_{j=-1}^{n+1} S_{j+1}^Z(\rho,\, \sigma,\, \rho')\, \omega_j^Z(t) = \rho(t), \\ \sum\limits_{j=-1}^{n+1} S_{j+1}^Z(\rho,\, \sigma,\, \sigma')\, \omega_j^Z(t) = \sigma(t). \end{cases} \tag{31}$$

Приравнивая коэффициенты при сплайн-функциях в левых частях соответствующих уравнений в (31) и (30), вновь получаем систему уравнений, из которой определяются коэффициенты a'_j, b'_j, c'_j. Решение системы позволяет выписать явный вид искомого функционала:

$$a'_j = 1 - b'_j - c'_j,$$

$$b'_j = \frac{(\rho(x_{j+1}) - \rho(x_{j-1}))(S_{j+1}^Z(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma(x_{j-1})) - (S_{j+1}^Z(\rho, \sigma, \rho') - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_{j+1}) - \sigma(x_{j-1}))}{(\rho(x_{j+1}) - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_j) - \sigma(x_{j-1})) - (\rho(x_j) - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_{j+1}) - \sigma(x_{j-1}))},$$

$$c'_j = \frac{(S_{j+1}^Z(\rho, \sigma, \rho') - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_j) - \sigma(x_{j-1})) - (\rho(x_j) - \rho(x_{j-1}))(S_{j+1}^Z(\rho, \sigma, \sigma') - \sigma(x_{j-1}))}{(\rho(x_{j+1}) - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_j) - \sigma(x_{j-1})) - (\rho(x_j) - \rho(x_{j-1}))(\sigma(x_{j+1}) - \sigma(x_{j-1}))}.$$

Замечание 6. Для вычисления значения $\nu_{-1}(f)$ имеем следующую цепочку равенств: $\nu_{-1}(f) = a'_{-1} f(x_{-2}) + b'_{-1} f(x_{-1}) + c'_{-1} f(x_0) = (a'_{-1} + b'_{-1} + c'_{-1}) f(x_0) = f(x_0)$. Аналогично, $\nu_{n+1}(f) = f(x_n)$.

Замечание 7. Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, t, t^2)^T$ при $\theta = 1/2$ на равномерной сетке функционал (29) имеет вид

$$\nu_j(f) = -\frac{1}{8}\left(f(x_{j-1}) - 10 f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$$

и совпадает с известным квазиинтерполяционным усредняющим функционалом для квадратичных B-сплайнов (подробнее см. [10]).

§6. Биортогональные функционалы типа де Бура–Фикса

Рассмотрим еще один вид линейных функционалов $\xi_j^{\langle r\rangle}$, $j = -2, \ldots, n-1$, $r = 0, 1, 2$, заданных формулами:

$$\begin{aligned}
\xi_j^{\langle 0\rangle}(f) := f(x_j) &+ \Big((\rho_{j+1}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma_{j+1})(\rho''_j\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma''_j) \\
&+ (\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho''_j\sigma_j - \rho_j\sigma''_j) + (\rho_{j+2}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma_{j+2}) \\
&\times (\rho'_{j+1}\sigma''_j - \rho''_j\sigma'_{j+1})\Big)\frac{f'(x_j)}{(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho'_j\sigma''_j - \rho''_j\sigma'_j)} \\
&+ \Big((\rho_{j+1}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma_{j+1})(\rho'_{j+2}\sigma'_j - \rho'_j\sigma'_{j+2}) \\
&+ (\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho_j\sigma'_j - \rho'_j\sigma_j) + (\rho_{j+2}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma_{j+2}) \\
&\times (\rho'_j\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma'_j)\Big) \\
&\times \frac{f''(x_j)}{(\rho'_{j+1}\sigma'_{j+2} - \rho'_{j+2}\sigma'_{j+1})(\rho'_j\sigma''_j - \rho''_j\sigma'_j)}, \ f \in C^2[a,b],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_j^{\langle 1\rangle}(f) := f(x_{j+1}) &+ \frac{(\sigma_{j+2} - \sigma_{j+1})\rho'_{j+2} - (\rho_{j+2} - \rho_{j+1})\sigma'_{j+2}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}} \\
&\times f'(x_{j+1}), \quad f \in C^1[a,b],
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\xi_j^{\langle 2\rangle}(f) := f(x_{j+2}) &+ \frac{(\sigma_{j+2} - \sigma_{j+1})\rho'_{j+1} - (\rho_{j+2} - \rho_{j+1})\sigma'_{j+1}}{\rho'_{j+2}\sigma'_{j+1} - \rho'_{j+1}\sigma'_{j+2}} \\
&\times f'(x_{j+2}), \quad f \in C^1[a,b].
\end{aligned} \tag{33}$$

Известно [33], что аппроксимация Pf исходной функции f

$$Pf = \sum_{j=-2}^{n-1} \xi_j^{\langle r\rangle}(f)\,\omega_j$$

обладает свойством точности на функциях $f \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \mid i = 0,1,2\}$, т.е. $Pf \equiv f$ для упомятунтых функций. Более того, при каждом фиксированном $r = 0,1,2$ функционалы $\xi_j^{\langle r\rangle}$ биортогональны функциям $\omega_{j'}$, т.е. выполняется равенство $\xi_j^{\langle r\rangle}(\omega_{j'}) = \delta_{j,j'}$, где $\delta_{j,j'}$ – символ Кронекера.

Эти функционалы интересны тем, что на любом сплайне $g \in \mathbb{S}(X)$, ввиду свойства биортогональности, дают значение коэффициента c_j

при функции ω_j в соответствующем разложении (18):

$$\xi_j^{\langle r\rangle}(g) = \xi_j^{\langle r\rangle}\left(\sum_{j'=-2}^{n-1} c_{j'}\,\omega_{j'}\right) = c_j.$$

Замечание 8. Функционалы $\xi_j^{\langle r\rangle}$ для полиномиальной порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, t^2)^T$ совпадают с функционалами де Бура–Фикса [32]:

$$\begin{aligned}\xi_j^{\langle 0\rangle}(f) &= f(x_j) + \left(\frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2} - x_j\right) f'(x_j)\\ &\quad + \frac{1}{2}(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j) f''(x_j),\\ \xi_j^{\langle 1\rangle}(f) &= f(x_{j+1}) + \frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1}) f'(x_{j+1}),\\ \xi_j^{\langle 2\rangle}(f) &= f(x_{j+2}) - \frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1}) f'(x_{j+2}).\end{aligned}$$

§7. Численные эксперименты

В данном разделе исследуется погрешность приближения дуги окружности при помощи B-сплайнов, а также минимальных сплайнов с различными порождающими вектор-функциями при использовании различных аппроксимационных функционалов.

В качестве модельной функции для проведения численных экспериментов рассмотрим дугу окружности $u(t) = \sqrt{1-t^2}$, которую будем приближать на равномерной сетке, построенной на отрезке $[-0.5, 0.5]$, а ошибку приближения будем вычислять на сетке в десять раз более мелкой, чем исходная. В качестве критерия точности построенной аппроксимации будем использовать оценку максимума абсолютного значения отклонения полученного приближения, обозначаемого через u^h, от значений исходной функции u, вычисленных в узлах мелкой сетки, т.е.

$$E = \max_{t\in[-0.5,0.5]} |u^h(t) - u(t)|.$$

В таблице 1 приведены результаты аппроксимации рассматриваемой дуги окружности на основе приближения B-сплайнами. Приближения были построены для различного количества узлов расчетной сетки при различных выборах аппроксимационных функционалов.

Здесь и далее обозначение λ_j используется для трехточечного функционала (23), μ_j и ν_j – для усредняющих функционалов (26) и (29) соответственно (при этом в качестве точек вспомогательной сетки были выбраны середины отрезков исходной), $\xi_j^{\langle 1 \rangle}$ – для функционала типа де Бура–Фикса (32).

Таблица 1. Ошибка приближения B-сплайнами в зависимости от количества узлов сетки n.

Функционал	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
λ_j	2.8×10^{-5}	3.4×10^{-6}	1.0×10^{-6}
μ_j	3.6×10^{-5}	5.3×10^{-6}	1.7×10^{-6}
$\xi_j^{\langle 1 \rangle}$	1.2×10^{-4}	1.6×10^{-5}	5.0×10^{-6}

Рассмотрим теперь приближение минимальными сплайнами. В таблицах 2, 3 и 4 приведены ошибки полученных приближений при использовании различных порождающих вектор-функций для усредняющих функционалов (26), (29) и функционала типа де Бура–Фикса (32) соответственно. Как и прежде, в качестве точек вспомогательной сетки были выбраны середины отрезков исходной. Результаты эксперимента показывают, что применение минимальных сплайнов позволяет строить более точные приближения дуги окружности при использовании предложенных аппроксимационных функционалов.

Таблица 2. Ошибка приближения для усредняющего функционала (26) в зависимости от количества узлов сетки n.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
$(1,\, t,\, t^2)^T$	3.6×10^{-5}	5.3×10^{-6}	1.7×10^{-6}
$(1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$	2.8×10^{-5}	4.2×10^{-6}	1.3×10^{-6}
$(1, \sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})^T$	7.5×10^{-6}	1.1×10^{-6}	3.3×10^{-7}

Замечание 9. Квадратичные минимальные сплайны, порожденные вектор-функцией $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$, называются *гиперболическими*. Их свойства, а также результаты их применения для приближения цепной линии и других экспоненциальных кривых см. в работе [34].

Таблица 3. Ошибка приближения для усредняющего функционала (29) в зависимости от количества узлов сетки n.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
$(1,\, t,\, t^2)^T$	2.7×10^{-5}	3.4×10^{-6}	1.1×10^{-6}
$(1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$	9.4×10^{-6}	1.5×10^{-6}	1.3×10^{-7}
$(1, \sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})^T$	5.1×10^{-6}	6.8×10^{-7}	2.2×10^{-7}

Таблица 4. Ошибка приближения для функционала типа де Бура–Фикса (32) в зависимости от количества узлов сетки n.

$\boldsymbol{\varphi}(t)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$
$(1,\, t,\, t^2)^T$	1.2×10^{-4}	1.6×10^{-5}	5.0×10^{-6}
$(1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch}, t)^T$	9.2×10^{-5}	1.3×10^{-5}	4.0×10^{-6}
$(1, \sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})^T$	2.3×10^{-5}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-7}

Список литературы

1. Ю. С. Волков, Ю. Н. Субботин, *50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции.* — Тр. ИММ УрО РАН **20**, No. 1 (2014), 52–67.
2. Ю. С. Волков, В. Т. Шевалдин, *Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену.* — Тр. ИММ УрО РАН **18**, No. 4 (2012), 145–152.
3. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике.* — М., 1976.
4. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* — М., 1980.
5. L. L. Schumaker, *Spline functions: basic theory.* — John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.
6. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994.
7. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines.* — Springer-Verlag, New York (revised edition), 2001.
8. Б. И. Квасов, *Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами.* — М., Физматлит, 2006.
9. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и их приложения.* — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010.
10. А. И. Гребенников, *Метод сплайнов и решение некорректных задач в теории приближений.* — М., Изд-во Моск. ун-та, 1983.

11. T. Lyche, L. L. Shumaker, *Quasi-interpolants based on trigonometric splines.* — J. Approx. Theor. **95** (1998), 280–309.
12. P. Sablonniere, *Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains of* $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. — Rend. Sem. Mat. **61**, No. 3 (2003), 229–246.
13. T. Lyche, K. Mörken, *Spline methods.* Draft Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo, 2005.
14. P. Constantini, C. Manni, F. Pelosi, M. Lucia Sampoli, *Quasi-interpolation in isogeometric analysis based on generalized B-splines.* — Computer Aided Geom. Design **27**, No. 8 (2010), 655–668.
15. А. А. Макаров, *Биортогональные системы функционалов и матрицы декомпозиции для минимальных сплайнов.* — Укр. мат. вісн. **9**, No. 2 (2012), 219–236.
16. Y. Jiang, Y. Xu, *B-spline Quasi-interpolation on Sparse Grids.* — J. Complexity **27**, No. 5 (2014), 466–488.
17. W. Gao, Z. Wu, *A quasi-interpolation scheme for periodic data based on multiquadric trigonometric B-splines.* — J. Comput. Appl. Math. **271** (2014), 20–30.
18. M. Li, L. Chen, Q. Ma, *A meshfree quasi-interpolation method for solving burgers' equation.* — Comput. Meth. Eng. Sci. **2014**, No. 3 (2014), 1–8.
19. R.- G. Yu, R.- H. Wang, C.- G. Zhu, *A numerical method for solving KdV equation with multilevel B-spline quasi-interpolation.* — Appl. Anal. **92**, No. 8 (2013), 1682–1690.
20. C. Dagnino, S. Remogna, P. Sablonniere, *On the solution of Fredholm integral equations based on spline quasi-interpolating projectors* — BIT **54**, No. 4 (2014), 979–1008.
21. M. Derakhshan, M. Zarebnia, *On the numerical treatment and analysis of two-dimensional Fredholm integral equations using quasi-interpolant.* — Comput. Appl. Math. **39**, No. 106 (2020).
22. P. Sablonniere, D. Shibih, T. Mohamed, *Numerical integration based on bivariate quadratic spline quasi-interpolants on Powell–Sabin partitions.* — BIT **53(1), 145** (2013), 175–192.
23. L. Lu, *On polynomial approximation of circular arcs and helices.* — Comput. Math. Appl. **63** (2012), 1192–1196.
24. G. Jaklič, *Uniform approximation of a circle by a parametric polynomial curve.* — Computer Aided Geom. Design **41** (2016), 36–46.
25. A. Rababah, *The best uniform cubic approximation of circular arcs with high accuracy.* — Commun. Math. Appl. **7**, No. 1 (2016), 37–46.
26. C. Apprich, A. Dietrich, K. Höllig, E. Nava-Yazdani, *Cubic spline approximation of a circle with maximal smoothness and accuracy.* — Computer Aided Geom. Design **56** (2017), 1–3.
27. A. A. Makarov, *An example of circular arc approximation by quadratic minimal splines.* — Poincare J. Anal. Appl. **2018**, No. 2 (2018), 103–107.
28. Ю. К. Демьянович, *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения.* — Докл. РАН **401**, No. 4 (2005), 1–4.
29. Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров, *Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, **4(62)**, No. 1 (2017), 9–16.

30. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions.* — Lect. Notes Comput. Sci. **10187** (2017), 448–455.
31. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
32. А. А. Макаров, *О двойственных функционалах к минимальным сплайнам.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 198–218.
33. E. K. Kulikov, A. A. Makarov, *On de Boor–Fix type functionals for minimal splines.* — Topics Class. Modern Anal. (Applied and Numerical Harmonic Analysis) (2019), 211–225.
34. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *Об аппроксимации гиперболическими сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 179–194.
35. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О приближенном решении одной сингулярно возмущенной краевой задачи.* — Дифф. ур. проц. упр. No. 1 (2020), 91–102.
36. E. Kulikov, A. Makarov, *On biorthogonal approximation of solutions of some boundary value problems on Shishkin mesh.* — AIP Conference Proceedings **2302**, 110005 (2020).
37. Е. К. Куликов, А. А. Макаров, *О квадратичных минимальных сплайнах с кратными узлами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 220–230.

Kulikov E. K., Makarov A. A. Construction of approximation functionals for minimal splines.

The paper presents formulas for constructing quadratic minimal splines, which explicitly depend on components of the generating vector function. Formulas for various approximation functionals for minimal splines used as coefficients in local approximation schemes are obtained. Examples of special cases of approximation constructions, which have a quasi-interpolation character, are provided. Results of numerical experiments on approximation of a circular arc by minimal splines are considered.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская набережная 7/9, 199034 С.-Петербург, Россия

E-mail: egor.k.kulikov@gmail.com

E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 14 октября 2021 г.