Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Н. А. Колегов, О. В. Маркова

ДЛИНА МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ИНЦИДЕНТНОСТИ НАД МАЛЕНЬКИМИ КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

§1. Введение

Вопросы, связанные с изучением систем порождающих матричных алгебр, имеют богатую историю, а исследования в этом направлении продолжаются и в настоящее время. Одним из наиболее ранних результатов в данной области является теорема Бернсайда (самое простое известное доказательство можно найти в работе Ломоносова и Розенталя [9]). Согласно этой теореме, непустое множество матриц порождает полную матричную алгебру над алгебраически замкнутым полем тогда и только тогда, когда у матриц нет общих нетривиальных инвариантных подпространств. Теорема Бернсайда – это редкий пример того, когда удалось описать все системы порождающих некоторой матричной алгебры. Другой подобный результат был получен уже значительно позже в работе Лонгстаффа и Розенталя [12], написанной на стыке теории матриц и алгебр инцидентности.

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как длина (см. определение 2.13). Отметим, что эта величина является нетривиальной для вычисления. Так, до сих пор не решена проблема вычисления длины полной алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$, которая была поставлена А. Пазом [20] ещё в 1984 году. Известны оценки длины $M_n(\mathbb{F})$, полученные самим Пазом [20], а также Паппаченой [19] и Шитовым [23]. Множество существенных результатов получено для длин собственных подалгебр и для длины полной матричной алгебры при дополнительных ограничениях на порождающие множества, см., например, работы [2, 3, 7, 10, 11, 13, 18] и их библиографию.

В настоящей работе мы будем рассматривать алгебры инцидентности. Впервые они были введены в работе [22] и с тех пор всесторонне

Ключевые слова: алгебры инцидентности, порождающие алгебр, функция длины алгебр, конечные частично упорядоченные множества.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

изучаются. Классическая монография на эту тему – книга [24]. Исследования алгебр инцидентности и их обобщений продолжаются по самым разным направлениям, см., например, работы [1, 4, 5]. Однако мы будем рассматривать только конечномерные алгебры инцидентности над полями. В этом случае их естественно считать матричными. Поэтому мы будем использовать термин *матричные алгебры инцидентности*.

Наша цель состоит в изучении длины матричных алгебр инцидентности. Впервые эта задача была рассмотрена вторым автором в работе [15]. В частности, получены результаты для конкретных алгебр над полем из двух элементов. Данное исследование мощностей и длин порождающих систем матричных алгебр инцидентности было продолжено авторами в работе [8]. Выявлена существенная зависимость длины матричной алгебры инцидентности от мощности поля коэффициентов. Так, в случае, когда мощность поля не меньше порядка матриц n, любая матричная алгебра инцидентности имеет длину $n-1$ (см. [8, теорема 3.2]). Таким образом, для больших полей задача вычисления длины матричных алгебр инцидентности полностью решена. В случае же конечного поля мощности $q < n$ значение $n - 1$ также является верхней границей длины, в то время как нижняя граница задаётся логарифмической функцией от n (см. теорему 2.23). Отметим, что при фиксированном n имеется лишь конечное число потенциально возможных значений длины алгебры инцидентности и конечное множество алгебр. Поэтому в рамках общей задачи вычисления длин матричных алгебр инцидентности над маленькими полями естественным образом встают следующие вопросы:

- вопрос о реализуемости значений из отрезка между указанными границами в качестве длин;
- вопрос полного описания длин всех матричных алгебр инцидентности данного порядка над данным полем.

Наша работа построена следующим образом. В §2 вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно строения матричных алгебр инцидентности и длин алгебр. В частности, в п.2.3 собраны известные результаты о длине матричных алгебр инцидентности. В §3 вводится понятие диагонального числа алгебры инцидентности и в следствии 3.3 приводится верхняя оценка на величину этого числа. В §4 рассмотрен вопрос вычисления длин матричных алгебр инцидентности в случае индекса нильпотентности радикала 2. Основным результатом является теорема 4.1, позволяющая оценить сверху длины таких алгебр. Несколько её следствий касаются прямых сумм алгебр, а также диагонального числа алгебр инцидентности. Также вычисляются оценки длин прямых сумм диагональной алгебры и треугольных 2×2 алгебр. В §5 решена задача полного описания длин всех матричных алгебр инцидентности порядков $2, 3, 4$ над полем из двух элементов.

§2. Основные определения и вспомогательные результаты

2.1. Алгебры инцидентности. Через $M_n(\mathbb{F})$ будем обозначать алгебру всех матриц размера $n \times n \quad (n \geqslant 2)$ над полем $\mathbb{F}$, через $T_n(\mathbb{F})$ и $D_n(\mathbb{F})$ – её подалгебры соответственно верхнетреугольных и диагональных матриц. *Матричной единицей* $E_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$ будем называть матрицу, у которой на позиции (i, j) стоит единица, а на остальных местах нули. Если нужно будет подчеркнуть, что матричная единица имеет размер $n \times n$, то мы будем писать $E_{ij}^{(n)}$. Также E_n, или просто E, будет обозначать единичную матрицу в $M_n(\mathbb{F})$. Для матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ через $(B)_{ij}$ или b_{ij} будем обозначать её элемент, стоящий на позиции (i, j).

Пусть $(\mathcal{N}, \preceq)$ – конечное частично упорядоченное множество. Элементы $\mathcal{N}$ можно занумеровать, поэтому в дальнейшем, если не указано иного, полагаем $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, где $n \geqslant 2$. Тогда определим *матричную алгебру инцидентности* над полем $\mathbb{F}$ следующим образом:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : (i \npreceq j) \to (a_{ij} = 0)\} \subseteq M_n(\mathbb{F}).$$

Другими словами, $\mathcal{A}$ является линейной оболочкой над полем $\mathbb{F}$ множества матричных единиц $\{E_{ij}\}_{i \preceq j}$. Тот факт, что $\mathcal{A}$ замкнута относительно матричного умножения, следует из транзитивности отношения порядка $\preceq$. Непосредственно из определения матричной алгебры инцидентности получаем следующий факт.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – произвольная подалгебра. Тогда $\mathcal{A}$ является матричной алгеброй инцидентности для множества $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ с некоторым отношением частичного порядка $\preceq$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{A}$ как линейное пространство имеет базис, целиком состоящий из матричных единиц, причем:*

(1) *все диагональные матричные единицы E_{ii}, $i \in \mathcal{N}$, лежат в этом базисе;*
(2) *никакие две симметричные матричные единицы E_{ij} и E_{ji} для различных $i, j \in \mathcal{N}$ одновременно не лежат в этом базисе.*

Отсюда сразу получаем, что $D_n(\mathbb{F})$ и $T_n(\mathbb{F})$ — матричные алгебры инцидентности.

Определение 2.2. Следуя [22], где была введена ζ-функция, будем использовать ζ-*матрицу*, или *матрицу-шаблон*,

$$\zeta = \sum_{i \preceq j} E_{ij}, \quad (\zeta)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \preceq j; \\ 0, & \text{если } i \npreceq j. \end{cases}$$

Скажем, что частичный порядок $\preceq$ *согласован с естественным порядком*, если для всех $i, j \in \mathcal{N}$ верна импликация $(i \preceq j) \to (i \leqslant j)$. Заметим, что в этом случае соответствующая матричная алгебра инцидентности будет подалгеброй в алгебре верхнетреугольных матриц. Более того, верен следующий факт.

Теорема 2.3 ([24, лемма 1.2.5, предложение 1.2.7])**.** *Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности. Тогда существует такая алгебра инцидентности $\mathcal{B} \subseteq T_n(\mathbb{F})$, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, причём $\mathcal{B} = P\mathcal{A}P^{-1}$, где P – перестановочная матрица.*

Поскольку исследуемые нами характеристики матричных алгебр инцидентности сохраняются при изоморфизме, всюду в дальнейшем мы **будем предполагать, что все рассматриваемые матричные алгебры инцидентности лежат в** $T_n(\mathbb{F})$.

Для непустого подмножества $\Phi \subseteq M_n(\mathbb{F})$ определим

$$\Omega(\Phi) = \{(i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \exists A \in \Phi : \ a_{ij} \neq 0\}.$$

Если $\Phi = \{A\}$, то для краткости будем писать $\Omega(A)$ вместо $\Omega(\{A\})$.

Определение 2.4. Пусть $i, j \in \mathcal{N}$. Скажем, что j *покрывает* i в смысле порядка $\preceq$ на $\mathcal{N}$, если $i \prec j$ и не существует такого $k \in \mathcal{N}$, что $i \prec k \prec j$. Другими словами, отрезок $[i, j]$ совпадает с множеством $\{i, j\}$. Введённое отношение будем обозначать через $i \prec\!: j$.

Обозначение 2.5. Для произвольного подмножества $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ введем проекции на первую и вторую координаты:

$$\mathrm{Pr}_1(U) = \{i \in \mathcal{N} \mid \exists j \in \mathcal{N}: \ (i,j) \in U\},$$
$$\mathrm{Pr}_2(U) = \{j \in \mathcal{N} \mid \exists i \in \mathcal{N}: \ (i,j) \in U\}.$$

Для алгебры инцидентности $\mathcal{A}$ обозначим её радикал Джекобсона через $J(\mathcal{A})$.

Предложение 2.6. *Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — матричная алгебра инцидентности, то $J(\mathcal{A})$ совпадает с линейным пространством, натянутым на множество матричных единиц $\{E_{ij} \mid i \prec j\}$.*

Доказательство. Утверждение следует из основных свойств радикала Джекобсона (см., например, [21, §4.3, предложение]). □

Предыдущее предложение позволяет тривиальным образом построить разложение Веддербёрна–Мальцева ([21, §11.6]) для матричных алгебр инцидентности. Действительно, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$, то

$$\mathcal{A} = D_n(\mathbb{F}) + J(\mathcal{A}), \tag{2.1}$$

где $D_n(\mathbb{F}) \cong \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$, $D_n(\mathbb{F}) \cap J(\mathcal{A}) = \{O\}$.

Пусть $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A}))$ – индекс нильпотентности радикала. Тогда имеет место следующий факт.

Предложение 2.7 ([8, предложение 4.11])**.** *Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности. Обозначим через d высоту частично упорядоченного множества $(\mathcal{N}, \preceq)$, т.е. максимальную мощность цепи. Тогда $d = \mathrm{ind}(J(\mathcal{A}))$.*

Нас в дальнейшем будет интересовать случай, когда $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$.

Предложение 2.8. *Для матричной алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$;
(2) *отношения $\prec$, $\prec$: совпадают*;
(3) $\mathrm{Pr}_1(\prec) \cap \mathrm{Pr}_2(\prec) = \varnothing$.

Доказательство. Все утверждения следуют из предложения 2.7. □

2.2. Порождающие множества и длина. Напомним основные определения, связанные с функцией длины. Термины и результаты теории колец, использованные в статье, можно найти, например, в [21]. Все рассматриваемые в работе алгебры – **ассоциативные конечномерные алгебры с единицей над полями**. Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как *длина*. Определим её, следуя [19].

Пусть $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ – непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из Θ назовем словами. Пусть Θ^* обозначает множество всех слов в алфавите Θ. Обозначим через F_Θ свободный моноид над алфавитом Θ, т.е. Θ^* с операцией конкатенации.

Определение 2.9. *Длина* слова $\theta_{i_1} \dots \theta_{i_t}$, где $\theta_{i_j} \in \Theta$, равна t. Пустое слово считается словом от элементов Θ длины 0. Пусть Θ^i обозначает множество всех слов в алфавите Θ длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и её непустое конечное подмножество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Тогда имеется естественный гомоморфизм свободного моноида $F_{\mathcal{S}}$ в мультипликативный моноид алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому произведения элементов из множества $\mathcal{S}$ мы тоже будем называть словами. Значит, $\mathcal{S}^i$ можно естественным образом понимать как подмножество алгебры $\mathcal{A}$. В частности, $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$.

Определение 2.10. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle \subseteq \mathcal{A}$, где $\langle \cdot \rangle$ обозначает линейную оболочку над полем $\mathbb{F}$. При этом $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle \cong \mathbb{F}$. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ совпадает с минимальной по включению подалгеброй $\mathcal{A}$, содержащей множество $\mathcal{S} \cup \{1_{\mathcal{A}}\}$. Будем говорить, что $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ – алгебра, порождённая множеством $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, то скажем, что $\mathcal{S}$ *порождает алгебру* $\mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{S}$ называют *порождающей системой*, или *системой порождающих*, алгебры $\mathcal{A}$.

Определение 2.11. Слово $v \in \mathcal{S}^j$ длины j называется *сократимым над* $\mathcal{S}$, если найдётся такой номер $i < j$, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$. Другими словами, v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины. Если слово v не является сократимым, то оно называется *несократимым над* $\mathcal{S}$.

По определению пространств $\mathcal{L}_k$, получаем, что для $0 \leqslant i \leqslant j$ выполнено $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_j(\mathcal{S})$. Более того, из конечномерности $\mathcal{A}$ следует, что найдётся такой номер h, для которого $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. При этом

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})\rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S})\rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}).$$

Тогда, рассуждая по индукции, получим, что $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.12. Если $\mathcal{S}$ – порождающая система алгебры $\mathcal{A}$, то определим *длину* $\mathcal{S}$ как

$$l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}.$$

Определение 2.13. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\},$$

где максимум берётся по всем конечным порождающим системам алгебры $\mathcal{A}$.

Также для дальнейшего нам необходимо прояснить, как ведет себя функция длины при действии антиизоморфизмов. Напомним, что отображение $\mathbb{F}$-алгебр $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется *антигомоморфизмом*, если ψ линейно и для всех $x, y \in \mathcal{A}$ выполнено $\psi(xy) = \psi(y)\psi(x)$. Если при этом ψ — изоморфизм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ как линейных пространств, то ψ называют *антиизоморфизмом.*

Предложение 2.14. *Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ над полем $\mathbb{F}$. Пусть $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – сюръективный антигомоморфизм. Тогда $l(\mathcal{B}) \leqslant l(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}^{op}$ алгебру противоположную к $\mathcal{B}$ (см. [21, §10.1]). Пусть также $i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{op}$ – естественный антиизоморфизм. Тогда композиция $i \circ \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{op}$ – сюръективный гомоморфизм алгебр. Поэтому $l(\mathcal{B}^{op}) \leqslant l(\mathcal{A})$ согласно [17, теорема 2]. Заметим, что $l(\mathcal{B}^{op}) = l(\mathcal{B})$. Действительно, для любого $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ и всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено $i(\mathcal{L}_k(\mathcal{S})) = \mathcal{L}_k(i(\mathcal{S}))$, что следует из определения пространств $\mathcal{L}_k$. □

Следствие 2.15. *Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ над полем $\mathbb{F}$. Пусть $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – антиизоморфизм. Тогда $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{B})$.*

2.3. Общие свойства и оценки длин матричных алгебр инцидентности. Приведём некоторые результаты о длине из работ [8, 15, 16], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 2.16. Назовем подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ *блочно-треугольной*, если любая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & ... & A_{1,k} \\ \hline 0 & A_{2,2} & ... & A_{2,k} \\ \hline & & ..... & \\ \hline 0 & 0 & ... & A_{k,k} \end{array}\right),$$

где каждый из блоков $A_{i,j}$ пробегает некоторое непустое подмножество $M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$, причём $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Лемма 2.17 ([14, следствие 3])**.** *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра блочно-треугольных матриц, $E \in \mathcal{A}$. Пусть l_i — длина алгебры $\{A_{i,i} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Тогда для $l(\mathcal{A})$ выполнены следующие неравенства:*

$$\max\{l_1, \ldots, l_k\} \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l_j + k - 1.$$

Приведем формулы для длин некоторых конкретных алгебр инцидентности из работы [15].

Теорема 2.18 ([15, теорема 4.1])**.** *Для любого поля $\mathbb{F}$ выполнено $l(T_n(\mathbb{F})) = n - 1$.*

Теорема 2.19 ([15, теорема 5.5])**.** *Для любого поля $\mathbb{F}$ выполнено $l(T_n(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}) = n$.*

Теорема 2.20 ([15, теорема 5.6])**.** *Для любого поля $\mathbb{F}$ выполнено $l(T_2(\mathbb{F}) \oplus T_2(\mathbb{F})) = 3$.*

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Через $[x]$, как обычно, будем обозначать целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x; через $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число z такое, что $z \geqslant x$. Через $\{x\}$ будем обозначать дробную часть числа x, т.е. $\{x\} = x - [x]$.

Приведем формулу для длины алгебры диагональных матриц из работы [16].

Теорема 2.21 ([16, теорема 5.4])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле.*

1. *Если $\mathbb{F}$ бесконечно, то $l(D_n(\mathbb{F})) = n - 1$.*
2. *Если $|\mathbb{F}| = q < \infty$, то*

$$l(D_n(\mathbb{F})) = \begin{cases} n - 1 & \text{при } q \geqslant n; \\ (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1 & \text{при } q < n. \end{cases}$$

Если $\mathbb{F}$ является полем из двух элементов, то формула из пункта 2 упрощается до $l(D_n(\mathbb{F}_2)) = [\log_2 n]$. Этот факт проверяется прямым вычислением.

Отметим, что функция длины из пункта 2 теоремы 2.21 является монотонно неубывающей по аргументу n. Это было впервые доказано в [16, теорема 3.2]. Другое доказательство этого факта можно найти в [6, подраздел 2.2]. Кроме того, очевидно, что величина $l(D_n(\mathbb{F}))$ уходит на бесконечность, если n неограниченно возрастает, а мощность поля $\mathbb{F}$ фиксирована.

Теорема 2.22 ([16]). *Рассмотрим функцию $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, определяемую формулой $g(n) = l(D_n(\mathbb{F}))$, где мощность поля $|\mathbb{F}|$ фиксирована. Тогда*

(1) *g не убывает;*
(2) *$g(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$.*

Приведём теперь основную оценку для длин матричных алгебр инцидентности.

Теорема 2.23 ([15, лемма 4.2, следствие 4.6]). *Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то $l(\mathcal{A}) = n - 1$. Если же $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ — конечное поле мощности q, то*

$$l(D_n(\mathbb{F}_q)) \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant n - 1.$$

В частности, $l(\mathcal{A}) = n - 1$ для $q \geqslant n$.

Таким образом, если $|\mathbb{F}| \geqslant n$, то длина любой алгебры инцидентности $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ равна $n-1$. Поэтому при исследовании длины достаточно рассматривать только конечные поля $\mathbb{F}_q$ мощности q такие, что $q < n$.

Если алгебра инцидентности “почти диагональная”, т.е. имеет размерность $n+1$, тогда ее длину можно вычислить точно.

Лемма 2.24 ([8, лемма 4.8]). *Пусть $n \geqslant 3$, $\mathbb{F}$ – поле мощности $q \leqslant n-1$ и $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности размерности $n+1$. Тогда $l(\mathcal{A}) = \max\{2, (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1\}$.*

Следующая теорема описывает все порождающие системы матричных алгебр инцидентности. Этот результат крайне полезен при исследовании длин этих алгебр.

Теорема 2.25 ([12, основная теорема]). *Пусть поле $\mathbb{F}$ произвольно, $n \geqslant 2$ и пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности. Рассмотрим непустое подмножество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

(1) *для любых $i \neq j$ от 1 до n найдётся матрица $A \in \mathcal{S}$ такая, что $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$;*

(2) *для любых $i \prec j$ от 1 до n, таких что j покрывает i, найдётся матрица $B \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, для которой выполнены условия $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$.*

Оказывается, что функция длины монотонна на алгебрах инцидентности с условием на радикал Джекобсона.

Предложение 2.26 ([6, раздел 2]). *Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – матричные алгебры инцидентности такие, что $\operatorname{ind}(J(\mathcal{A})) = \operatorname{ind}(J(\mathcal{B})) = 2$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant l(\mathcal{B})$.*

Также нам понадобятся следующие три технических результата из работ [6, 8].

Лемма 2.27 ([6, раздел 3]). *Пусть дана матричная алгебра инцидентности $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$ и её произвольная порождающая система $\mathcal{S} = \{A_i = D_i + B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{A}$, $D_i \in D_n(\mathbb{F})$, $B_i \in J(\mathcal{A})$ для $i = 1, \ldots, m$ (см. равенство (2.1) в п.2.1). Рассмотрим пару (U, u), состоящую из непустого подмножества $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и выделенной точки $u \in U$. Тогда найдется многочлен $\hat{f}$ от m некоммутирующих переменных с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$, для которого выполнены следующие два условия*:

(1) $\deg \hat{f} \leqslant l(D_{|U|}(\mathbb{F}))$;

(2) $\hat{f}(A_1, \ldots, A_m) = E_{uu} + D + B$, *где* $D \in D_n(\mathbb{F})$, $B \in J(\mathcal{A})$, *а также* $(D)_{ii} = 0$ *для всех* $i \in U$.

Теорема 2.28 ([6, раздел 2]). *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности, $n \geqslant 2$, $\mathcal{S} = \{A_i = D_i + B_i\}_{i=1}^m$ – произвольная порождающая система $\mathcal{A}$, где $D_i \in D_n(\mathbb{F})$, $B_i \in J(\mathcal{A})$ для $i = 1, \ldots, m$ (см. равенство (2.1) в п.2.1). Определим следующие величины: $l_J(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) \supseteq J(\mathcal{A})\}$, $l_J(\mathcal{A}) = \max\{l_J(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$, а также $l_D(\mathcal{S}) = l(\{D_1, \ldots . D_m\})$. Тогда*

$$l(\mathcal{S}) = \max\{l_J(\mathcal{S}), l_D(\mathcal{S})\}, \ l(\mathcal{A}) = \max\{l_J(\mathcal{A}), l(D_n(\mathbb{F}))\}.$$

Предложение 2.29 ([8, предложение 4.9]). *Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}) \subseteq T_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – поле мощности $q \leqslant n-1$. Рассмотрим систему порождающих Φ для $\mathcal{B}$ и произвольную матрицу $B \in \langle \Phi \rangle$. Обозначим через $R(B)$ определяемые матрицей B пары индексов (i,j) такие, что $i \prec j$, j покрывает i, и выполнены условия $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$. Если $R(B) \neq \varnothing$, то существует матрица $Q \in \mathcal{L}_q(\{B\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi)$, для которой $(Q)_{ll} = 0$ для всех $l = 1, \ldots, n$ и $(Q)_{ij} \neq 0$ для всех пар $(i,j) \in R(B)$.*

§3. Диагональное число алгебры инцидентности

В этом разделе мы вводим понятие диагонального числа алгебры инцидентности и даём верхнюю оценку на величину этой константы в следствии 3.3. Однако сначала нам понадобится следующий результат. Оказывается, что если взять прямую сумму алгебры инцидентности с алгеброй диагональных матриц достаточно большого размера, то длина полученной алгебры будет такой же как у её проекции на диагональ.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности. Тогда существует такое $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всех $k \geqslant K$ выполнено $l(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbb{F}$ бесконечно. Тогда, по теореме 2.23, $l(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = n + k - 1 = l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$ для всех $k \geqslant 0$, и поэтому можно взять $K = 0$. Пусть теперь $|\mathbb{F}| = q < \infty$. Если $\mathcal{A} = D_n(\mathbb{F})$, то $K = 0$ тривиальным образом. Поэтому всюду далее будем считать, что $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$. Отсюда, в частности, следует, что $n \geqslant 2$ и $\operatorname{ind}(J(\mathcal{A})) \geqslant 2$. Введём константу $M = q \cdot l_J(\mathcal{A}) \cdot (\operatorname{ind}(J(\mathcal{A})) - 1)$, где величина $l_J(\mathcal{A})$ определена, как в теореме 2.28. Рассмотрим множество

$$\Lambda = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid l(D_{n+k}(\mathbb{F})) \geqslant M\} \cap [q - n + 1, +\infty). \tag{3.1}$$

Тогда, в силу теоремы 2.22, найдётся такое целое $K \geqslant 0$, что $\Lambda = \mathbb{Z} \cap [K, +\infty)$. Покажем, что данное K является искомым. Зафиксируем произвольное $k \in \Lambda$. Докажем, что $l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leqslant l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$.

[*Шаг* 1.] Выберем порождающую систему $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$ таким образом, чтобы выполнялось $l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = l_J(\mathcal{S})$. Тогда

$$l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) \supset J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F}))\}. \tag{3.2}$$

Так как $\mathcal{S}$ порождает $\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$, то проекции матриц из $\mathcal{S}$ на первое прямое слагаемое порождают $\mathcal{A}$. Кроме того, согласно предложению 2.6, выполнено $J(\mathcal{A}) = \langle \{E_{ij}^{(n)} \mid i \prec j\} \rangle$. В частности, $J(\mathcal{A}) \supseteq \{E_{ij}^{(n)} \mid i \prec: j\}$. Тогда по определению величины $l_J(\mathcal{A})$ заключаем, что

$$\mathcal{L}_{l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S}) \supset \{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)} \mid i \prec: j\}$$

для некоторых матриц $D^{(i,j)} \in D_k(\mathbb{F})$.

[*Шаг* 2.] По определению множества Λ (см. равенство (3.1)), выполнено $k \geqslant q-n+1$, откуда $q \leqslant n+k-1$. Значит, мы можем применить предложение 2.29 к алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$. В качестве множества Φ возьмём, например, базис пространства $\mathcal{L}_{l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S})$. Ясно, что Φ порождает $\mathcal{B}$, так как $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}_{l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S}) = \langle \Phi \rangle$. Матрицу B из предложения 2.29 будем поочерёдно полагать равной матрицам $E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}$. Тогда предложение 2.29 гарантирует нам выполнение включений $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_q(\{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}\})$ для всех пар $i \prec: j$. Однако

$$\mathcal{L}_q(\{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi) = \mathcal{L}_q(\mathcal{S}^{l_J(\mathcal{A})}) = \mathcal{L}_{q \cdot l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S}).$$

Таким образом, для всех пар $i \prec: j$ выполнено $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S})$.

[*Шаг* 3.] Зафиксируем теперь произвольную пару $i \prec j$. Тогда из множества $\{1, \ldots, n\}$ можно выбрать такую последовательность чисел $i_1, i_2, \ldots, i_d$, что $i = i_1 \prec: i_2 \prec: \ldots \prec: i_d = j$. Значит, $E_{ij}^{(n)} = E_{i_1 i_d}^{(n)} = E_{i_1 i_2}^{(n)} E_{i_2 i_3}^{(n)} \cdot \ldots \cdot E_{i_{d-1} i_d}^{(n)}$. Согласно предыдущему шагу, для всех $t = 1, 2, \ldots, d-1$ матрица $E_{i_t i_{t+1}}^{(n)} \oplus O_k$ лежит в $\mathcal{L}_{q \cdot l_J(\mathcal{A})}(\mathcal{S})$. Отсюда получаем, что $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot l_J(\mathcal{A}) \cdot (d-1)}(\mathcal{S})$.

[*Шаг* 4.] Заметим что, по построению, d — мощность некоторой $\preceq$-цепи. Значит, $d \leqslant \operatorname{ind}(J(\mathcal{A}))$ согласно предложению 2.7. Поэтому для всех $i \prec j$ выполнено $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot l_J(\mathcal{A}) \cdot (\operatorname{ind}(J(\mathcal{A}))-1)}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_M(\mathcal{S})$. Применяя предложение 2.6, получим, что $J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \{E_{ij}^{(n+k)} \mid i \prec j\} = \{E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \mid i \prec j\}$, причём порядок $\preceq$, как и раньше, соответствует алгебре инцидентности $\mathcal{A}$. Значит, $\mathcal{L}_M(S) \supset J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F}))$. Тогда из равенства (3.2) следует, что $l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leqslant M$. Однако, в соответствии с равенством (3.1), $l(D_{n+k}(\mathbb{F})) \geqslant M$. В итоге получаем

$l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leqslant l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$, что и требовалось.

Итак, мы показали, что $l_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leqslant l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$. Тогда из теоремы 2.28 следует, что $l(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$. Отсюда, в силу произвольности выбора целого $k \geqslant K$, получаем требуемое. $\square$

В терминах частично упорядоченного множества $(\mathcal{N}, \preceq)$ теорема 3.1 означает следующее. Назовем точку $i \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ изолированной, если она сравнима только сама с собой. Тогда получается, что если в $(\mathcal{N}, \preceq)$ "слишком много" изолированных точек, то функция длины начинает вести себя так, как будто абсолютно все точки $(\mathcal{N}, \preceq)$ изолированы, и $(\mathcal{N}, \preceq)$ становится неотличимым от тривиального частично упорядоченного множества $(\mathcal{N}, =)$ с точки зрения длин соответствующих алгебр инцидентности.

Таким образом, теорема 3.1 позволяет нам определить следующую константу. Она является минимумом всех таких чисел K, которые были определены в теореме.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ – произвольная алгебра инцидентности. Определим её *диагональное число*

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda(\mathcal{A}) &= \lambda(\preceq, \mathbb{F})\\ &= \min\{K \in \mathbb{N} \cup \{0\} | \forall k \geqslant K: \ l(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = l(D_{n+k}(\mathbb{F}))\}.\end{aligned}$$

Другими словами, диагональное число показывает, как много изолированных точек нужно добавить к $(\mathcal{N}, \preceq)$, чтобы функция длины перестала отличать его от тривиального частично упорядоченного множества.

В следующем следствии даны некоторые оценки на величину λ.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности, отличная от алгебры диагональных матриц.*

1. *Если $\mathbb{F}$ бесконечно, то $\lambda(\preceq, \mathbb{F}) = 0$.*
2. *Пусть $\mathbb{F}$ конечно, мощности q, тогда*

$$\begin{aligned}\lambda(\preceq, \mathbb{F}) &\leqslant \left\lceil q^{1+\frac{q}{q-1}\cdot l_J(\mathcal{A})\cdot(\operatorname{ind}(J(\mathcal{A}))-1)} \right\rceil - n\\ &\leqslant \left\lceil q^{1+\frac{q}{q-1}\cdot l(\mathcal{A})\cdot(\operatorname{ind}(J(\mathcal{A}))-1)} \right\rceil - n \leqslant \left\lceil q^{1+\frac{q(n-1)^2}{q-1}} \right\rceil - n,\end{aligned}$$

где величина $l_J(\mathcal{A})$ определяется, как в теореме 2.28.

Доказательство. Случай бесконечного поля сразу следует из теоремы 2.23. Получаем, что $l(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = n + k - 1 = l(D_{n+k}(\mathbb{F}))$ для всех $k \geqslant 0$, и поэтому можно взять $\lambda(\preceq, \mathbb{F}) = 0$. Докажем пункт 2 следствия. Обозначим $M = q \cdot l_J(\mathcal{A}) \cdot (\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) - 1)$, $N = \left\lceil q^{1+\frac{M}{q-1}} \right\rceil - n$. При этом $M \geqslant 2$, так как $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$. Покажем, что $\lambda \leqslant N$. Обратимся к доказательству теоремы 3.1. Из него следует, что достаточно проверить включение $N \in \Lambda$, где множество Λ определено в равенстве (3.1). Указанное включение можно доказать следующим образом. Сначала заметим, что $N \in [q - n + 1, +\infty)$, или, что эквивалентно, $q^{1+\frac{M}{q-1}} - n > q - n$. Тогда остается проверить, что $l(D_{n+N}(\mathbb{F})) \geqslant M$. Поскольку $N + n \geqslant q^{1+\frac{M}{q-1}} > q$, то из теоремы 2.21 следует, что

$$\begin{aligned} l(D_{N+n}(\mathbb{F})) &= (q-1)[\log_q(N+n)] + [q^{\{\log_q(N+n)\}}] - 1 \\ &\geqslant (q-1)[\log_q(N+n)] + 1 - 1 \geqslant \\ &\geqslant (q-1)\left[\log_q\left(q^{1+\frac{M}{q-1}}\right)\right] \\ &= (q-1)\left[1 + \frac{M}{q-1}\right] \geqslant (q-1) \cdot \frac{M}{q-1} = M. \end{aligned}$$

Это и требовалось. Другие два неравенства из пункта 2 следуют из соотношений $l_J(\mathcal{A}) \leqslant l(\mathcal{A})$, $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 1$ и $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) \leqslant n$. В свою очередь, три эти неравенства вытекают соответственно из теорем 2.28, 2.23 и 2.7. □

§4. Случай индекса нильпотентности радикала 2

В этом разделе мы рассмотрим вопрос вычисления длины матричных алгебр инцидентности в том случае, когда $\mathrm{ind}(J) = 2$. Основным результатом является теорема 4.1, позволяющая оценить сверху длину таких алгебр. Кроме того, будут рассмотрены несколько её следствий, касающиеся прямых сумм алгебр, а также диагональной константы алгебр инцидентности.

4.1. Основная теорема: оценка длины сверху. Докажем теорему о верхней оценке.

Теорема 4.1. *Пусть поле $\mathbb{F}$ конечно и имеет мощность q. Рассмотрим матричную алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}) \subseteq T_n(\mathbb{F})$. Предположим, что $q \leqslant n - 1$, $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$. Обозначим $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$,*

$r_i = r_i(\mathcal{A}) = |\mathrm{Pr_i}\,(\prec)\,|$, $i = 1, 2$, *а также*

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa_1(\mathcal{A})\\ &= \max\{t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists j, i_1, \ldots, i_t \in \mathcal{N} :\ i_1 \prec j,\ \ldots,\ i_t \prec j\},\\ \kappa_2 &= \kappa_2(\mathcal{A})\\ &= \max\{s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists i, j_1, \ldots, j_s \in \mathcal{N} :\ i \prec j_1,\ \ldots,\ i \prec j_s\}.\end{aligned}$$

Тогда $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$ *и*

$$\begin{aligned}&l(\mathcal{A}) \leqslant \max\{\min\{l(D_{r_1}(\mathbb{F})) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})),\\ &l(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + l(D_{r_2}(\mathbb{F}))\} + q,\ l(D_n(\mathbb{F}))\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Соотношения $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$ следуют из того, что $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$, поскольку $\mathrm{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$. Теперь докажем оценку сверху для $l(\mathcal{A})$. В силу теоремы 2.28, достаточно показать, что

$$l_J(\mathcal{A}) \leqslant \min\{l(D_{r_1}(\mathbb{F})) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})),\ l(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + l(D_{r_2}(\mathbb{F}))\} + q.$$

Обозначим $\gamma_1 = l(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + l(D_{r_2}(\mathbb{F})) + q$, $\gamma_2 = l(D_{r_1}(\mathbb{F})) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})) + q$. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, порождающее $\mathcal{A}$. Требуется доказать, что $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{\gamma_1}(\mathcal{S})$ и $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{\gamma_2}(\mathcal{S})$. Зафиксируем любую пару $\xi \prec \eta$. Покажем, что $E_{\xi\eta} \in \mathcal{L}_{\gamma_1}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}_{\gamma_2}(\mathcal{S})$.

[*Шаг* 1.] Пусть $\mathcal{S} = \{A_k = D_k + B_k\}_{k=1}^m$, где $D_k \in D_n(\mathbb{F})$, $B_k \in J(\mathcal{A})$. Применяя лемму 2.27 к парам $(\xi, \mathrm{Pr}_1\,(\prec))$, $(\eta, \mathrm{Pr}_2\,(\prec))$, найдем многочлены от m некоммутирующих переменных $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ такие, что $\hat{f}_1(A_1, \ldots, A_m) = E_{\xi\xi} + D_\xi + B_\xi$, $\hat{f}_2(A_1, \ldots, A_m) = E_{\eta\eta} + D_\eta + B_\eta$, где $B_\xi, B_\eta \in J(\mathcal{A})$, а также $(D_\xi)_{ii} = 0$ и $(D_\eta)_{jj} = 0$ для всех $i \in \mathrm{Pr}_1\,(\prec)$, $j \in \mathrm{Pr}_2\,(\prec)$. Кроме того, $\deg \hat{f}_i \leqslant l(D_{r_i}(\mathbb{F}))$, $i = 1, 2$.

[*Шаг* 2.] Введем множества $\mathcal{R}_\xi = \{j \in \mathcal{N} \mid \xi \prec j\}$, $\mathcal{R}_\eta = \{i \in \mathcal{N} \mid i \prec \eta\}$. Тогда $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathrm{Pr}_2\,(\prec)$, $\mathcal{R}_\eta \subseteq \mathrm{Pr}_1\,(\prec)$ и, кроме того, $\xi \in \mathcal{R}_\eta$, $\eta \in \mathcal{R}_\xi$. Применим лемму 2.27 к парам $(\mathcal{R}_\eta, \xi)$ и $(\mathcal{R}_\xi, \eta)$. Тогда получим многочлены от m некоммутирующих переменных $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$ такие, что $\hat{g}_1(A_1, \ldots, A_m) = E_{\xi\xi} + \widetilde{D}_\xi + \widetilde{B}_\xi$ и $\hat{g}_2(A_1, \ldots, A_m) = E_{\eta\eta} + \widetilde{D}_\eta + \widetilde{B}_\eta$, где $\widetilde{B}_\xi, \widetilde{B}_\eta \in J(\mathcal{A})$, причем $(\widetilde{D}_\xi)_{ii} = 0$ и $(\widetilde{D}_\eta)_{jj} = 0$ для всех $i \in \mathcal{R}_\eta$, $j \in \mathcal{R}_\xi$. Кроме того, в силу неравенств $|\mathcal{R}_\eta| \leqslant \kappa_1$, $|\mathcal{R}_\xi| \leqslant \kappa_2$, пункта 1 леммы 2.27 и пункта 1 теоремы 2.22, получим

$$\deg \hat{g}_1 \leqslant l(D_{|\mathcal{R}_\eta|}(\mathbb{F})) \leqslant l(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})),\ \deg \hat{g}_2 \leqslant l(D_{|\mathcal{R}_\xi|}(\mathbb{F})) \leqslant l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})).$$

[*Шаг* 3.] Согласно теореме 2.25, найдется матрица $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ такая, что $(A)_{\xi\eta} \neq 0$. Учитывая, что отношения $\prec$, $\prec$: совпадают (предложение 2.8), применим предложение 2.29. Найдём многочлен $h \in \mathbb{F}[x]$, удовлетворяющий условиям $\deg h \leqslant q$, $h(A) \in J(\mathcal{A})$, а также $(h(A))_{\xi\eta} \neq 0$.

[*Шаг* 4.] Докажем, что

$$E_{\xi\eta} = \hat{f}_1(A_1, \ldots, A_m)h(A)\hat{g}_2(A_1, \ldots, A_m),$$
$$E_{\xi\eta} = \hat{g}_1(A_1, \ldots, A_m)h(A)\hat{f}_2(A_1, \ldots, A_m).$$

Проверим первое равенство, второе доказывается аналогично. Поскольку $h(A) \in J(\mathcal{A})$ и $\operatorname{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$, получим, что

$$\hat{f}_1(A_1, \ldots, A_m)h(A)\hat{g}_2(A_1, \ldots, A_m) = (E_{\xi\xi} + D_\xi)h(A)(E_{\eta\eta} + \widetilde{D}_\eta).$$

Кроме того, для всех $G \in J(\mathcal{A})$ выполнено равенство $D_\xi G = O$, так как $\operatorname{Pr}_2(\Omega(D_\xi)) \cap \operatorname{Pr}_1(\prec) = \varnothing$. Поэтому наше равенство преобразуется к виду $E_{\xi\xi}h(A)(E_{\eta\eta} + \widetilde{D}_\eta) = E_{\xi\eta} + E_{\xi\xi}h(A)\widetilde{D}_\eta$, где второе слагаемое равно нулю, поскольку $\operatorname{Pr}_2(\Omega(E_{\xi\xi}h(A))) \subseteq \mathcal{R}_\xi$, $\operatorname{Pr}_1\left(\Omega(\widetilde{D}_\eta)\right) \cap \mathcal{R}_\xi = \varnothing$.

[*Шаг* 5.] Учитывая, что $\deg \hat{f}_1 + \deg h + \deg \hat{g}_2 \leqslant \gamma_2$ и $\deg \hat{g}_1 + \deg h + \deg \hat{f}_2 \leqslant \gamma_1$, получим $E_{\xi\eta} \in \mathcal{L}_{\gamma_1}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}_{\gamma_2}(\mathcal{S})$, что и требовалось. □

Следующие примеры показывают, что оценка из предыдущей теоремы достигается в некоторых частных случаях.

Пример 4.2. *Рассмотрим алгебру* $\mathcal{A} = T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2) \oplus D_m(\mathbb{F}_2)$, $m \geqslant 0$, $n = m+2$. *Тогда* $l(\mathcal{A}) = \max\{3, l(D_n(\mathbb{F}_2))\}$ *согласно* [15, теорема 6.5]. *При этом* $r_1 = r_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $l(D_{r_1}(\mathbb{F}_2)) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_2)) + q = 1 + 0 + 2 = 3$.

Пример 4.3. *Рассмотрим матричную алгебру инцидентности* $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F}_2)$, $\dim \mathcal{A} = n + 1$. *Тогда, по лемме* 2.24, $l(\mathcal{A}) = \max\{2, l(D_n(\mathbb{F}_2))\}$. *При этом* $r_1 = r_2 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $l(D_{r_1}(\mathbb{F}_2)) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_2)) + q = 0 + 0 + 2 = 2$.

Теорема 4.1 позволяет для длин алгебр инцидентности получить оценку следующего вида.

Пример 4.4. *Над полем* $\mathbb{F}_q$ *из* q *элементов рассмотрим алгебру*

$$\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q & M_{1\times a}(\mathbb{F}_q) \\ O & D_a(\mathbb{F}_q) \end{pmatrix}.$$

Согласно общему результату о длине алгебры вида $\widehat{\mathbf{S}}_{a,b}(\mathbb{F})$ (*см.* [6, раздел 4]), *получим* $l(\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)) = l(D_a(\mathbb{F}_q)) + 1$. *Теорема* 4.1 *позволяет оценить длину алгебры*

$$D_k(\mathbb{F}_q) \otimes \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) \cong \underbrace{\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)}_{k \text{ раз}}$$

при условии, что $q < k(a+1)$. *В этом случае, получим*

$$l(D_a(\mathbb{F}_q)) + l(D_k(\mathbb{F}_q)) + 1 \leqslant l(D_k(\mathbb{F}_q) \otimes \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)) \leqslant l(D_a(\mathbb{F}_q)) + l(D_k(\mathbb{F}_q)) + q.$$

Действительно, верхняя оценка следует из теоремы 4.1, *так как* $r_1 = k$, $\kappa_2 = a$. *Нижняя оценка следует из общего результата о длине тензорного произведения алгебр* [16, лемма 5.1].

4.2. Следствия из оценки сверху. В качестве следствия из теоремы 4.1 можно получить асимптотическую оценку на длину прямых сумм алгебр инцидентности.

Следствие 4.5. *Пусть дана последовательность матричных алгебр инцидентности* $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\mathcal{A}_n \subseteq T_{k_n}(\mathbb{F}_q)$ *и* $\operatorname{ind}(J(\mathcal{A}_n)) = 2$. *Предположим, что найдется такая константа* $M \geqslant 2$, *что* $k_n \leqslant M$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$l(\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_n) \sim l(D_{\sum_{m=1}^{n} k_m}(\mathbb{F}_q)) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$. Для алгебр $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$ введём параметры $r_1, r_2, \kappa_1, \kappa_2$, как в теореме 4.1. Выберем натуральное число N достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $\sum\limits_{m=1}^{N} k_m > q$. Применим теорему 4.1 к алгебрам $\mathcal{B}_n$ для всех $n \geqslant N$. Обозначим $g(s) = l(D_s(\mathbb{F}_q))$. Тогда

$$g\left(\sum_{m=1}^{n} k_m\right) \leqslant l(\mathcal{B}_n) \leqslant \max\left\{g(r_1(\mathcal{B}_n)) + g(\kappa_2(\mathcal{B}_n)) + q,\ g\left(\sum_{m=1}^{n} k_m\right)\right\},$$

где нижняя оценка следует из теоремы 2.23. Заметим, что $r_1(\mathcal{B}_n) = \sum\limits_{m=1}^{n} r_1(\mathcal{A}_m) \leqslant \sum\limits_{m=1}^{n} k_m$, а также

$$\kappa_2(\mathcal{B}_n) = \max_{m=1,\ldots,n} \kappa_2(\mathcal{A}_m) \leqslant \max_{m=1,\ldots,n} k_m \leqslant M.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что M – натуральное число. Тогда, в силу пункта 1 теоремы 2.22,

$$g\left(\sum_{m=1}^{n} k_m\right) \leqslant l(\mathcal{B}_n) \leqslant g\left(\sum_{m=1}^{n} k_m\right) + g(M) + q.$$

Отсюда, принимая во внимание пункт 2 теоремы 2.22, получим, что

$$l(\mathcal{B}_n) \sim g\left(\sum_{m=1}^{n} k_m\right) = l(D_{\sum\limits_{m=1}^{n} k_m}(\mathbb{F}_q)) \text{ при } n \to \infty. \qquad \square$$

Другое следствие теоремы 4.1 даёт оценку диагональной константы матричной алгебры инцидентности в том случае, когда индекс нильпотентности радикала Джекобсона равен 2.

Следствие 4.6. *Рассмотрим алгебру инцидентности* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ *над полем* $\mathbb{F}$ *конечной мощности* q. *Предположим, что* $q \leqslant n-1$, $\operatorname{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$. *Определим величины* r_1, r_2, κ_1, κ_2, *как в теореме* 4.1. *Тогда диагональное число алгебры* $\mathcal{A}$ (*см. определение* 3.2) *удовлетворяет оценке*

$$\lambda(\preceq, \mathbb{F}) \leqslant \min\{r_1 \cdot \kappa_2,\ r_2 \cdot \kappa_1\} \cdot \left\lceil q^{4-\frac{1}{q-1}} \right\rceil - n.$$

Доказательство. Пусть $r_1 \cdot \kappa_2 \leqslant r_2 \cdot \kappa_1$. Случай с противоположным неравенством доказывается аналогично. Возьмём произвольное натуральное $N \geqslant r_1 \cdot \kappa_2 \cdot \left\lceil q^{4-\frac{1}{q-1}} \right\rceil - n$. Достаточно показать, что $l(\mathcal{A} \oplus D_N(\mathbb{F}_q)) = l(D_{n+N}(\mathbb{F}_q))$. Из неравенства для N следует, что

$$(q-1)(\log_q(n+N)-1) \geqslant (q-1)(\log_q r_1 + \log_q \kappa_2) + 2(q-2) + q.$$

При этом из теоремы 2.21 следуют неравенства

$$l(D_{n+N}(\mathbb{F}_q)) \geqslant (q-1)(\log_q(n+N)-1),$$
$$l(D_{r_1}(\mathbb{F}_q)) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_q)) + q \leqslant (q-1)(\log_q r_1 + \log_q \kappa_2) + 2(q-2) + q.$$

Отсюда мы получим, что $l(D_{n+N}(\mathbb{F}_q)) \geqslant l(D_{r_1}(\mathbb{F}_q)) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_q)) + q$. Тогда

$$l(D_{n+N}(\mathbb{F}_q)) \geqslant \min\{l(D_{r_1}(\mathbb{F}_q)) + l(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_q)),\ l(D_{\kappa_1}(\mathbb{F}_q)) + l(D_{r_2}(\mathbb{F}_q))\} + q.$$

Значит, в силу теоремы 4.1, выполнено $l(\mathcal{A} \oplus D_N(\mathbb{F}_q)) \leqslant l(D_{n+N}(\mathbb{F}_q))$. Обратное неравенство следует из теоремы 2.23. $\square$

4.3. Прямые суммы треугольных алгебр порядка 2. В данном разделе мы получим оценки длин алгебр инцидентности следующего вида.

Обозначение 4.7.

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q) = \underbrace{T_2(\mathbb{F}_q) \oplus \cdots \oplus T_2(\mathbb{F}_q)}_{\alpha \text{ раз}} \oplus D_\beta(\mathbb{F}_q), \quad \alpha \geqslant 1, \quad \beta \geqslant 0.$$

Замечание 4.8. Рассмотрим параметры κ_1, κ_2, определенные в теореме 4.1. Тогда $\kappa_1(\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q)) = \kappa_2(\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q)) = 1$ для $\alpha \geqslant 1$. Более того, можно показать, что если для некоторой алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_q)$ выполнено $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, то она изоморфна алгебре вида $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q)$ для некоторых значений параметров α, β. Действительно, заметим, что в этом случае строгое отношение порядка $\prec$ имеет вид $\{(i_k, j_k)\}_{k=1}^{\alpha}$, где все числа $i_1, \ldots, i_\alpha, j_1, \ldots, j_\alpha$ различны. Тогда рассмотрим перестановку множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ следующего вида. Пусть $\beta = n - 2\alpha$, $\{m_1, \ldots, m_\beta\} = \mathcal{N} \setminus \{i_1, \ldots, i_\alpha, j_1, \ldots, j_\alpha\}$. Положим

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2\alpha-1 & 2\alpha & 2\alpha+1 & \ldots & 2\alpha+\beta \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \ldots & i_\alpha & j_\alpha & m_1 & \ldots & m_\beta \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{A} = P^{-1}\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q)P$, где P – матрица перестановки σ, т.е. $(P)_{ij} = 1$, если $j = \sigma(i)$ и $(P)_{ij} = 0$ в противном случае.

Следующее следствие теоремы 4.1 задаёт ограничения на возможные значения длин алгебр вида $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q)$.

Следствие 4.9. *Рассмотрим матричную алгебру инцидентности* $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q) \subseteq T_n(\mathbb{F}_q)$, $n = 2\alpha + \beta$, *где* $q \leqslant n - 1$. *Тогда*

$$l(D_n(\mathbb{F}_q)) \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant l(D_\alpha(\mathbb{F}_q)) + q \leqslant l(D_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{F}_q)) + q.$$

Доказательство. Оценка снизу следует из теоремы 2.23. Докажем оценки сверху. Для алгебры $\mathcal{A}$ рассмотрим величины κ_1, κ_2, r_1, r_2, определенные в теореме 4.1. Тогда $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Кроме того, так как $\mathrm{Pr}_1(\prec) \cap \mathrm{Pr}_2(\prec) = \varnothing$ в силу предложения 2.8, то $\min\{r_1, r_2\} \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Однако $r_i = \alpha$, $i = 1, 2$. Поэтому оценки длины сверху следуют из теорем 2.22 и 4.1. □

Теперь наша цель – оценить, сколько возможных значений длины допускают оценки из предыдущего следствия. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.10. *В предыдущем следствии разность между верхней и нижней оценками* $\Delta l = l(D_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{F}_q)) + q - l(D_n(\mathbb{F}_q))$ *может быть вычислена для всех* $n \geqslant 2$ *следующим образом. Сначала введём величины*

$$r = \left[\log_q \left[\frac{n}{2}\right]\right], \quad k = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{q^r}\right] = \left[q^{\left\{\log_q \left[\frac{n}{2}\right]\right\}}\right],$$

а также $r_0 = \left[\frac{n}{2}\right] - kq^r$*, откуда, в частности, следует, что* $k \in \{1, \ldots, q-1\}$*,* $r_0 \in \{0, \ldots, q^r - 1\}$*. Выберем* $c \in \{0,1\}$ *так, чтобы* $c \equiv n \pmod 2$*. Тогда число* Δl *определяется согласно таблице*

	$2k \leqslant q-2$	$2k = q-1$	$2k \geqslant q$
$2r_0 + c \leqslant q^r - 1$	$q-k$	$q-k$	k
$2r_0 + c \geqslant q^r$	$q-k-1$	k	k

Доказательство. Обозначим $g(s) = l(D_s(\mathbb{F}_q))$. Тогда $\Delta l = g(\left[\frac{n}{2}\right]) + q - g(n)$. Заметим, что согласно теореме 2.21 имеем $g(\left[\frac{n}{2}\right]) = (q-1)r + k - 1$. Чтобы вычислить Δl, необходимо выразить величину $g(n)$ через q, k, r. Заметим, что $n = 2\left[\frac{n}{2}\right] + c = 2kq^r + 2r_0 + c$. Рассмотрим три случая, которые соответствуют трём столбцам таблицы.

[*Случай* 1.] Пусть $2k \leqslant q-2$. Если $2r_0 + c \leqslant q^r - 1$, то $\left[\log_q n\right] = r$ и $\left[q^{\left\{\log_q n\right\}}\right] = \left[\frac{n}{q^r}\right] = 2k$. По теореме 2.21 получим $g(n) = (q-1)r + 2k - 1$. В итоге,

$$\Delta l = (q-1)r + k - 1 + q - ((q-1)r + 2k - 1) = q - k.$$

Пусть теперь $2r_0 + c \geqslant q^r$. Тогда $n = (2k+1)q^r + 2r_0 + c - q^r$. При этом

$$2r_0 + c - q^r \leqslant 2q^r - 2 + 1 - q^r = q^r - 1.$$

Значит, $\left[\log_q n\right] = r$ и $\left[q^{\left\{\log_q n\right\}}\right] = \left[\frac{n}{q^r}\right] = 2k+1$. По теореме 2.21 получим $g(n) = (q-1)r + 2k$. Тогда $\Delta l = (q-1)r + k - 1 + q - ((q-1)r + 2k) = q - k - 1$.

[*Случай* 2.] Пусть $2k = q-1$. Если $2r_0 + c \leqslant q^r - 1$, то $\Delta l = q - k$ аналогично предыдущему случаю. Пусть $2r_0 + c \geqslant q^r$. Тогда $n = (2k+1)q^r + 2r_0 + c - q^r$. Поскольку $2k = q-1$, то получим $n = q^{r+1} + 2r_0 + c - q^r$. Аналогично предыдущему случаю, $2r_0 + c - q^r \leqslant q^r - 1 < q^{r+1} - 1$. Значит, $\left[\log_q n\right] = r + 1$ и $\left[q^{\left\{\log_q n\right\}}\right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}}\right] = 1$. Тогда из теоремы 2.21 следует, что $g(n) = (q-1)(r+1)$. Отсюда получим, что

$\Delta l = (q-1)r + k - 1 + q - (q-1)(r+1) = k$.

[*Случай* 3.] Пусть $2k \geqslant q$. Тогда $n = q^{r+1}+(2k-q)q^r+2r_0+c$. Обозначим $\widehat{r} = (2k-q)q^r+2r_0+c$. Тогда $\widehat{r} \geqslant 0$, так как $2k \geqslant q$. В силу того, что $k \leqslant q-1$, $r_0 \leqslant q^r-1$, а также $c \in \{0,1\}$, получим $\widehat{r} \leqslant (q-2)q^r+2q^r-2+1 \leqslant q^{r+1}-1$. Значит, $n = q^{r+1}+\widehat{r}$, где $\widehat{r} \in \{0,\dots,q^{r+1}-1\}$. Отсюда $\left[\log_q n\right] = r+1$, $\left[q^{\left\{\log_q n\right\}}\right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}}\right] = 1$. Теперь применим теорему 2.21 и получим $g(n) = (q-1)(r+1)$. В итоге, $\Delta l = (q-1)r+k-1+q-(q-1)(r+1) = k$. $\square$

В доказательстве следующего следствия мы увидим, что равенство $\Delta l = 0$ невозможно. Однако над полями из двух и трех элементов в ряде случаев $\Delta l = 1$, т.е. длина может принимать не более двух значений.

Следствие 4.11. *Рассмотрим матричную алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q) \subseteq T_n(\mathbb{F}_q)$, $n = 2\alpha+\beta$, где $q \leqslant n-1$. Предположим, что выполнено одно из двух условий:*

(1) $q = 2$;
(2) $q = 3$, *однако при этом* $n = 2m + c$, *где* $c \in \{0,1\}$, $m = 3^r + r_0$ *для некоторого* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *а также* $r_0 \in \left[\frac{3^r-c}{2}, 3^r-1\right] \cap \mathbb{Z}$.

Тогда либо $l(\mathcal{A}) = D_n(\mathbb{F}_q)$, либо $l(\mathcal{A}) = D_n(\mathbb{F}_q)+1$.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из таблицы, представленной в лемме 4.10. Действительно, если $q = 2$, то случаи $2k \leqslant q-2$ и $2k = q-1$ невозможны. Значит, $\Delta l = k = 1$. Пусть теперь $q \geqslant 3$. Тогда из таблицы следует, что неравенство $\Delta l \geqslant 2$ выполнено всегда, за исключением случая, когда $2k = q-1$ и $2r_0+c \geqslant q^r$. В этих ограничениях $\Delta l = k$. Значит, $\Delta l = 1$ тогда и только тогда, когда $q = 3$ и $r_0 \geqslant \frac{3^r-c}{2}$. Таким образом, мы доказали даже больше, чем утверждается в следствии 4.11. Получается, что равенство $\Delta l = 1$ эквивалентно выполнению одного из условий 1 или 2. Причём случай $\Delta l = 0$ невозможен. $\square$

Таким образом, мы получили обобщение известного результата (см. [15, теорема 6.5]) о длине алгебр вида $T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2) \oplus D_m(\mathbb{F}_2)$, $m \geqslant 0$.

§5. Матричные алгебры инцидентности малых порядков над полем из двух элементов

В данном параграфе вычислены длины всех матричных алгебр инцидентности порядков $2, 3, 4$ над полем из двух элементов.

5.1. Матричные алгебры инцидентности порядков 2 и 3.

Предложение 5.1. *В $T_2(\mathbb{F}_2)$ содержится ровно 2 матричных алгебры инцидентности: $D_2(\mathbb{F}_2)$ и $T_2(\mathbb{F}_2)$, и обе имеют длину 1.*

Доказательство. Утверждение следует из равенств $\dim D_2(\mathbb{F}_2) = 2$, $\dim T_2(\mathbb{F}_2) = 3$ и теоремы 2.23. $\square$

Теорема 5.2. *Длина любой не диагональной матричной алгебры инцидентности в $M_3(\mathbb{F}_2)$ равна 2, в то время как $l(D_3(\mathbb{F}_2)) = 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{A} \subseteq T_3(\mathbb{F}_2)$ – матричная алгебра инцидентности с матрицей-шаблоном ζ. Рассмотрим все возможные варианты для матрицы ζ.

(1) Если $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $\mathcal{A} = D_3(\mathbb{F}_2)$ и $l(\mathcal{A}) = 1$ по теореме 2.21.

Во всех оставшихся случаях, $\dim \mathcal{A} > \dim D_3(\mathbb{F}_2)$ и $\mathcal{A}$ не является диагональной.

(2) Если $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $\mathcal{A} \cong T_2(\mathbb{F}_2) \oplus \mathbb{F}_2$ и $l(\mathcal{A}) = 2$ по теореме 2.19.

(3) Если $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то, по лемме 2.24, имеем

$$l(\mathcal{A}) = \max\{2, [\log_2 3]\} = 2.$$

(4) Пусть $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. По теореме 2.23, $l(\mathcal{A}) \leqslant 2$, поэтому достаточно предъявить систему порождающих длины 2. Возьмём $\mathcal{S} = \{E_{11} + E_{12}, E_{13}, E_{22}\}$. Имеем $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4 < \dim \mathcal{A}$, но $(E_{11} + E_{12})E_{22} = E_{12}$, поэтому $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 2$.

(5) Если $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $l(\mathcal{A}) = 2$ аналогично пункту (4).

(6) Если $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $\mathcal{A} = T_3(\mathbb{F}_2)$ и $l(\mathcal{A}) = 2$ по теореме 2.18. □

5.2. Матричные алгебры инцидентности порядка 4.

Лемма 5.3. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq T_4(\mathbb{F}_2)$ – матричная алгебра инцидентности с матрицей-шаблоном* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Тогда $l(\mathcal{A}) = 2$.*

Доказательство. I. Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Покажем, что $l(\mathcal{S}) \leqslant 2$. Отсюда будет следовать верхняя оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant 2$.

Заметим, что из [18, предложения 3.1, 3.2] следует, что любой базис пространства $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$ той же длины, что и $\mathcal{S}$, поэтому можно рассматривать его вместо $\mathcal{S}$. Тогда, согласно п.2 теоремы 2.25, можно считать, что $\mathcal{S}$ содержит матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ не является однопорождённой и имеет размерность 6, поэтому $3 \leqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 6$. Рассмотрим разные варианты размерностей отдельно.

(1) Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 5$, то $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6 = \dim \mathcal{A}$, так что $l(\mathcal{S}) \leqslant 2$.

(2) Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 4$. В обозначениях теоремы 2.28 имеем $l_D(\mathcal{S}) \leqslant l(D_4(\mathbb{F}_2)) = 2$, поэтому для доказательства утверждения достаточно проверить, что $l_J(\mathcal{S}) \leqslant 2$. Имеем $J(\mathcal{A}) = \langle E_{13}, E_{23} \rangle$. Таким образом, нам нужно убедиться, что $E_{13}, E_{23} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$. Рассмотрим все возможные случаи значений элемента a матрицы A.

(a) Пусть $a = 1$. Имеем $A^2 - A = E_{13} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, $AB + BA = aE_{23} + dE_{13} = dE_{13} + E_{23}$, откуда $E_{23} = AB + BA - dE_{13} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$.

(b) Пусть $a = 0$. Имеем $AB + BA = dE_{13}$. Из расположения единиц и нулей в матрицах A и B следует, что $\dim\langle E, A, B\rangle \in \{2, 3\}$.

Пусть $\dim\langle E, A, B\rangle = 3$. Если $d = 0$, то диагональные части матриц A и B линейно зависимы, причём их первые три координаты нулевые, что, в силу условия на размерность $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 4$, означает, что диагональные части матриц из $\mathcal{S}$ не порождают $D_4(\mathbb{F}_2)$. Поэтому $d = 1$, $AB + BA = E_{13} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ и $B^2 - B = E_{23} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$.

Пусть $\dim\langle E, A, B\rangle = 2$. Поскольку $\dim\langle E, A\rangle = \dim\langle E, B\rangle = 2$ и $(A + B)_{33} = (A)_{33} = (B)_{33} = 0$, то в данном случае из линейной зависимости следует, что выполнено равенство $A + B = 0$. Откуда $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Покажем, что в данном случае равенство $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$ не реализуется. Предположим противное. Тогда с одной стороны пару E, A можно дополнить матрицей $C \in \mathcal{S}$ до базиса $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, и при этом $\{A, C\}$ порождают алгебру $\mathcal{A}$. С другой стороны, в этом случае для любой матрицы C диагональная часть AC пропорциональна диагональной части A (с коэффициентом c_{44}), т.е. такие матрицы не порождают $D_4(\mathbb{F}_2)$. Противоречие.

Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4$. Согласно [18, предложение 3.4], можно без ограничения общности считать, что $\mathcal{S} = \{A, C, D\}$. Заменяя при необходимости C на $C - c_{11}E$, D на $D - d_{11}E$ без изменения длины, получаем, что $c_{11} = d_{11} = 0$. Поскольку алгебра $D_3(\mathbb{F}_2)$ не является однопорождённой, то векторы (c_{22}, c_{33}) и (d_{22}, d_{33}) линейно независимы, и, заменяя этот базис на стандартный, в пространстве $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ получим, что достаточно рассмотреть случай $(c_{22}, c_{33}) = (1, 0)$ и $(d_{22}, d_{33}) = (0, 1)$. В данных ограничениях имеем: $AC - CA = E_{23}$, $AD - DA = E_{13} + E_{23}$, поэтому $E_{13}, E_{23} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$.

II. Нижняя оценка $l(\mathcal{A}) \geqslant 2$ следует из теоремы 2.23.

□

Теорема 5.4. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq T_4(\mathbb{F}_2)$ – матричная алгебра инцидентности с матрицей-шаблоном ζ. Справедливы следующие утвеждения:*

(1) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(2) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(3) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(4) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(5) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(6) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(7) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(8) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(9) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(10) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(11) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(12) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(13) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 2$;

(14) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(15) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(16) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(17) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(18) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(19) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(20) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(21) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(22) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(23) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(24) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *или* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(25) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$;

(26) *если* $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *то* $l(\mathcal{A}) = 3$.

Доказательство. Заметим, что оценки длины из теоремы 2.23 дают $2 = [\log_2 4] \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant 4 - 1 = 3$. Поэтому для доказательства равенства $l(\mathcal{A}) = 2$ достаточно получить верхнюю оценку $l(\mathcal{A}) \leqslant 2$, а для случая $l(\mathcal{A}) = 3$ – предъявить систему порождающих длины 3.

Отметим также, что в каждом пункте, где приведены две ζ-матрицы, имеет место антиизоморфизм соответствующих алгебр инцидентности. Он задается посредством симметрии относительно побочной диагонали. Покажем, что такое отображение действительно является антиизоморфизмом. Рассмотрим отображение $\sigma : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, определяемое правилом

$$\sigma(X) = PX^T P,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & O & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & O & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

– антидиагональная (или перъединичная) матрица. Учитывая, что транспонирование является антиавтоморфизмом алгебры $M_n(\mathbb{F})$ и, кроме того, $P^{-1} = P$, получаем, что и σ – антиавтоморфизм $M_n(\mathbb{F})$. Заметим, что σ задает симметрию относительно побочной диагонали. Таким образом, согласно следствию 2.15, в тех пунктах, где приведены две ζ-матрицы, достаточно рассмотреть только одну из них, например, первую.

Теперь перейдем к рассмотрению пунктов $1 - 26$, принимая во внимание сказанное выше.

(1) $\mathcal{A} = D_4(\mathbb{F}_2)$ и $l(\mathcal{A}) = 2$ по теореме 2.21.

(2–5) По лемме 2.24 имеем $l(\mathcal{A}) = \max\{2, [\log_2 4]\} = 2$.

(8) Заметим, что $\mathcal{A} \cong T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2)$, поэтому $l(\mathcal{A}) = 3$ по теореме 2.20.

(13) Алгебра $\mathcal{A}$ является блочно-треугольной алгеброй с блоками $\mathcal{A}_1 = D_1(\mathbb{F}_2)$ и $\mathcal{A}_2 = D_3(\mathbb{F}_2)$, откуда, по лемме 2.17, получаем, что $l(\mathcal{A}) \leqslant l(D_1(\mathbb{F}_2)) + l(D_3(\mathbb{F}_2)) + 1 = 2$.

(6),(7),(9) Указанные алгебры являются подалгебрами алгебры из п.13, причём, по построению, они все имеют индекс нильпотентности радикала Джекобсона 2. Таким образом, в данном случае оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant 2$ следует из предложения 2.26 (мы воспользовались свойством монотонности длины на классе алгебр с данным индексом нильпотентности).

(10) Рассмотрим пару матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, в которой

$$A = \mathrm{diag}\{1,0,0,1\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A^2 = A, B^2 = B$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5$. При этом

$$ABA = \mathrm{diag}\{0,0,0,1\} \notin \mathcal{L}_2(\mathcal{S}),$$

поэтому $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 3$.

(11) Доказано в лемме 5.3.

(12) Для доказательства повторим рассуждения п. 10 для матриц

$$A = \mathrm{diag}\{1,0,1,0\}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(14) Заметим, что $\mathcal{A} \cong T_3(\mathbb{F}_2) \oplus \mathbb{F}_2$, поэтому $l(\mathcal{A}) = 3$ по теореме 2.19.

(15) Рассмотрим пару матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, в которой

$$A = \mathrm{diag}\{1,0,0,1\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A^2 = A$,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6 < 7 = \dim \mathcal{A}$. При этом $ABA = \mathrm{diag}\{0,0,0,1\} \notin \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, поэтому $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 3$.

(16) Для доказательства повторим рассуждения п.15 для матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, где $A = \operatorname{diag}\{1,0,1,0\}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, заменив произведение ABA на BAB.

(17) Аналогично п. 16 для матриц $A = \operatorname{diag}\{1,1,0,0\}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(18) Аналогично п. 16 для матриц $A = \operatorname{diag}\{1,1,0,0\}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(19) Рассмотрим пару матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A^2 = \operatorname{diag}\{1,0,0,1\}$, $B^2 = B$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6 < 7 = \dim \mathcal{A}$. При этом $ABA = \operatorname{diag}\{0,0,0,1\} \notin \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, поэтому $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 3$.

(20) Рассмотрим пару матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, в которой

$$A = \operatorname{diag}\{1,0,0,1\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A^2 = A$,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6 < 8 = \dim \mathcal{A}$. При этом матрицы $ABA = \mathrm{diag}\{0,0,0,1\}$, $B^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы по модулю $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, поэтому $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 3$.

(21) Аналогично п. 20 для матриц $A = \mathrm{diag}\{1,0,1,0\}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(22) Аналогично п. 20 для матриц $A = \mathrm{diag}\{1,0,0,1\}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(23) Следует из общего результата о длине алгебр вида $\widehat{\mathbf{S}}_{a,b}(\mathbb{F})$, см. [6, раздел 4].

Для полноты изложения предъявим систему образующих данной алгебры длины 3. Рассмотрим пару матриц $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $A^2 = \mathrm{diag}\{1,0,1,0\}$, $B^2 = B$,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6 < 8 = \dim \mathcal{A}$. При этом матрицы $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $ABA = \operatorname{diag}\{1, 0, 0, 0\}$ линейно независимы по модулю $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, поэтому $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) = 3$.

(24) Непосредственно проверяется (например, с помощью теоремы 2.25) что пара $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

порождает алгебру $\mathcal{A}$. При этом для произвольной пары $\mathcal{S}$ количество слов в $\mathcal{S}^2$ равно 7. Значит, $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \leqslant 7 \leqslant \dim \mathcal{A} = 9$ и $l(\mathcal{S}) > 2$. Поэтому $l(\mathcal{S}) = 3$.

(25) Аналогично п.24 для пары $\mathcal{S} = \{A, B\} \subset \mathcal{A}$, в которой

$$A = \operatorname{diag}\{1, 0, 0, 1\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(26) $\mathcal{A} = T_4(\mathbb{F}_2)$ и $l(\mathcal{A}) = 3$ по теореме 2.18.

$\square$

Замечание 5.5. Как видно из предыдущей теоремы, значение индекса нильпотентности радикала Джекобсона не определяет длину матричной алгебры инцидентности даже для алгебр фиксированной размерности над заданным полем.

Авторы выражают благодарность А. Э. Гутерману за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Список литературы

1. R. Brusamarello, E. Z. Fornaroli, E. A. Santulo Jr. *Classification of involutions on finitary incidence algebras.* — Int. J. Algebra Comput. **24**, No. 8 (2014), 1085–1098.
2. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices.* — Linear Algebra Appl. **498** (2016), 450–470.
3. A. E. Guterman, T. J. Laffey, O. V. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018), 234–250.

4. I. Kaygorodov, M. Khrypchenko, F. Wei, *Higher derivations of finitary incidence algebras.* — Algebr. Represent. Theory **22** (2019), 1331–1341.
5. N. A. Kolegov, *On real algebras generated by positive and nonnegative matrices.* — Linear Algebra Appl. **611** (2021), 46–65.
6. N. A. Kolegov, *On the lengths of matrix incidence algebras with radicals of square zero*, Preprint.
7. Н. А. Колегов, О. В. Маркова, *Коммутативность матриц с точностью до матричного множителя.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 151–168.
8. Н. А. Колегов, О. В. Маркова, *Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 120–144.
9. V. Lomonosov, P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **383** (2004), 45–47.
10. W. E. Longstaff, *On minimal sets of* $(0,1)$*-matrices whose pairwise products form a basis for* $M_n(\mathbb{F})$. — Bull. Austral. Math. Soc. **98**, No. 3 (2018), 402–413.
11. W. E. Longstaff, *Irreducible families of complex matrices containing a rank-one matrix.* — Bull. Austral. Math. Soc. **102**, No. 2 (2020), 226–236.
12. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *Generators of matrix incidence algebras.* — Austral. J. Combin. **22** (2000), 117–121.
13. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *On the lengths of irreducible pairs of complex matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **139**, No. 11 (2011), 3769–3777.
14. О. В. Маркова, *О длине алгебры верхнетреугольных матриц.* — УМН **60**, No. 5 (2005), 177–178.
15. О. В. Маркова, *Вычисление длин матричных подалгебр специального вида.* — Фунд. прикл. матем. **13**, No. 4 (2007), 165–197.
16. О. В. Маркова, *Верхняя оценка длины коммутативных алгебр.* — Мат. сб. **200**, No. 12 (2009), 41–62.
17. О. В. Маркова, *О некоторых свойствах функции длины.* — Матем. заметки **87**, No. 1 (2010), 83–91.
18. О. В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. матем. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
19. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra, **197** (1997), 535–545.
20. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
21. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, 1986.
22. G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory,* I. *Theory of Möbius functions.* — Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung **2** (1964), 340–368.
23. Ya. Shitov, *An improved bound for the lengths of matrix algebras.* — Algebra Number Theory **13**, No. 6 (2019), 1501–1507.
24. E. Spiegel, C. J. O'Donnel, *Incidence Algebras*, Marcel Dekker, 1997.

Kolegov N. A., Markova O. V. The lengths of matrix incidence algebras over small finite fields.

The paper considers the problem of computing the lengths of matrix incidence algebras over a field whose cardinality is strictly less than the matrix size n. For $n = 3, 4$, the lengths of all such algebras are determined over the field of two elements. In the case where the ground field and the number n are arbitrary but the Jacobson radical of the algebra has nilpotency index 2, an upper bound for the length is provided. In addition, the incidence algebras isomorphic to a direct sum of triangular matrix algebras of order 2 and an algebra of diagonal matrices are considered. It is shown that the lengths of these algebras over the field of two elements can equal only two different numbers, which can be determined explicitly. Moreover, the diagonal number of a matrix incidence algebra is introduced and bounded above.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: na.kolegov@ya.ru

Поступило 30 сентября 2021 г.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Россия,
Московский физико-технический институт
(гос. университет), 141701,
Московская область, г. Долгопрудный, Россия,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: ov_markova@mail.ru