Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Л. Ю. Колотилина

ДАЛЬНЕЙШИЕ БЛОЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЦ НЕКРАСОВА

§1. Введение и предварительные сведения

Важный класс матриц Некрасова был введен в рассмотрение в работе [8], а его невырожденность была установлена в работе [1]. Более того, см. [17], любая матрица Некрасова $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, т.е. ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, определяемая соотношением

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей.

В терминах стандартного треугольного расщепления матрицы $A = D-L-U$, как хорошо известно и нетрудно понять, матрица A является матрицей Некрасова тогда и только тогда, когда ее диагональная чать D невырождена и выполнено условие Робера [17]

$$|D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e < |D|e. \tag{1.1}$$

Ясно, что неравенство (1.1) равносильно тому, что Z-матрица

$$|D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)] \tag{1.2}$$

имеет строгое диагональное преобладание, т.е. она является SDD матрицей.

Матрицы Некрасова и их различные обобщения исследовались в многочисленных публикациях, см., например, работы [2–6, 10–14, 19] и их библиографию. В частности, блочные обобщения, основанные на блочных матрицах сравнения, были предложены и исследованы в работах [4, 11].

Ключевые слова: матрицы Некрасова, GN матрицы, $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицы, BJN матрицы, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, $\mathcal{M}$-матрицы, SDD матрицы, верхние оценки обратных матриц.

В статье [7] был предложен другой подход к определению обобщенных матриц Некрасова, основанный непосредственно на блочном разбиении матриц, и был введен класс GN матриц (см. определение 2.1 ниже).

В данной работе мы вводим в рассмотрение еще два класса блочных обобщенных матриц Некрасова, которые содержат как класс обычных матриц Некрасова, так и класс GN матриц.

В работе используются следующие обозначения.

• $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$, где $n \geqslant 1$ – целое число.

• Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

– абсолютные строчные суммы элементов A;

• $\operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ – диагональная часть матрицы A.

• $\operatorname{Diag}(A) = \operatorname{Diag}(A_{11}, \ldots, A_{mm})$ – блочно диагональная часть разбитой на блоки матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{m}$.

• Через I_n (или I) обозначается единичная матрица порядка n.

• $e = [1, \ldots, 1]^T$ – единичный вектор.

• Матричные неравенства понимаются покомпонентно.

• Для блочной $m \times m$ матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{m} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, через $A = D_A - L_A - U_A$ (или просто $A = D - L - U$) мы обозначаем стандартное расщепление матрицы A на ее блочную (или точечную при $m = n$) диагональную часть ($D_A = \operatorname{Diag}(A)$), блочную (точечную) строго нижнюю треугольную часть ($-L_A$) и блочную (точечную) строго верхнюю треугольную часть ($-U_A$).

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть π – некоторое разбиение

$$\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} M_i, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

множества индексов $\langle n \rangle$ на m непустых непересекающихся подмножеств M_i. Положим

$$A_{ij} = (a_{kl})_{\substack{k \in M_i \\ l \in M_j}}, \quad i, j = 1, \cdots, m.$$

Тогда $A = (A_{ij})$ – это блочное разбиение матрицы A, *индуцированное* разбиением π множества $\langle n \rangle$.

В данной работе, в контексте обобщенных матриц Некрасова, нас будут интересовать разбиения π на множества специального вида

$$M_i = \left\{ \sum_{k<i} n_k + 1, \ldots, \sum_{k \leqslant i} n_k \right\}, \ 1 \leqslant n_i \leqslant n, \ i = 1, \ldots, m, \ n = \sum_{i=1}^{m} n_i, \quad (1.3)$$

которые состоят из последовательных целых чисел. В дальнейшем разбиения вида (1.3) мы будем называть *последовательными*.

Пусть $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$, $m \geqslant 1$, и $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m'} M'_i$, $m' \geqslant 1$, – два разбиения множества $\langle n \rangle$ на непустые непересекающиеся подмножества. Будем говорить, что разбиение $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$ является *более грубым*, чем $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m'} M'_i$, а $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m'} M'_i$ является *более мелким*, чем $\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$, при условии, что каждое из множеств M_i, $i = 1, \ldots, m$, является объединением некоторых подмножеств M'_j, $1 \leqslant j \leqslant m'$. Ясно, что точечное разбиение π_p, для которого $m = n$, является самым мелким, а наиболее грубое разбиение π_c – это тривиальное разбиение, соответствующее случаю $m = 1$.

Статья построена следующим образом. В §2 вводятся в рассмотрение два новых класса обобщенных матриц Некрасова, а именно, классы $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц, каждый из которых содержит класс GN матриц, введенных ранее в работе [7]. Также в §2 представлены базовые свойства GN, $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц. В §3 мы доказываем, что классы GN, $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц являются замкнутыми относительно ведущих главных блочных подматриц и соответствующих им дополнений по Шуру. В §4 устанавливается монотонность классов $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц относительно блочных разбиений. §5 посвящен верхним оценкам для нормы l_∞ обратных к обобщенным матрицам Некрасова. В заключительном §6 рассматривается специальный случай блочных 2×2 обобщенных матриц Некрасова, и общие оценки, установленные в §5, адаптируются к данному случаю.

§2. Определения и основные свойства

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение два новых блочных обобщения обычных матриц Некрасова, а именно, так называемые $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матрицы. Как будет показано ниже, классы $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц оба содержат класс обобщенных матриц Некрасова GN, введенный в работе [7]. Также мы рассматриваем базовые свойства новых матричных классов и сопоставляем их со свойствами класса GN матриц.

Для начала напомним определение GN матриц, данное в работе [7], слегка модифицируя его так, чтобы соответствующее разбиение множества индексов было указано явно.

Определение 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть блочное разбиение $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, индуцировано некоторым последовательным разбиением π множества индексов $\langle n\rangle$. Пусть $A = D - L - U$ – ассоциированное стандартное блочно треугольное расщепление матрицы A. Будем говорить, что A является GN(π) матрицей, если обе матрицы D и*

$$\begin{aligned} N_A(\pi) &:= \mathcal{M}(D)(\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) \\ &= (I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}\mathcal{M}(A) \\ &= \mathcal{M}(D) - (I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}|U| \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеют строгое диагональное преобладание.

Если разбиение π в определении 2.1 ясно из контекста или его специфический вид не играет роли, то мы пишем N_A вместо $N_A(\pi)$ и говорим, что A является GN матрицей.

Класс всех $n \times n$ матриц, которые являются GN(π) матрицами для некоторого последовательного разбиения π, будет обозначаться через $\{\mathrm{GN}(\pi)\}$, и мы полагаем:

$$\{\mathrm{GN}\} = \bigcup_{n\geqslant 2}\{\mathrm{GN}_n\} \quad \text{и} \quad \{\mathrm{GN}_n\} = \bigcup_{\pi}\{\mathrm{GN}(\pi)\}, \tag{2.2}$$

где объединение берется по всем последовательным разбиениям π множества $\langle n\rangle$.

Заметим, что в случае самого мелкого точечного разбиения π_p, в котором $m = n$ и $D = \mathrm{diag}\,(A)$, матрица A является GN(π_p) матрицей тогда и только тогда, когда она является матрицей Некрасова. С другой стороны, в случае самого грубого разбиения $\pi = \pi_c$, когда $m = 1$ и $D = A$, A является GN(π_c) матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание.

В работе [7] были установлены следующие свойства GN матриц.

• Для любого последовательного разбиения π множества $\langle n\rangle$ имеет место равенство $N_A(\pi) = N_{\mathcal{M}(A)}(\pi)$, при этом A является GN(π)

матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей.

• Любая SDD матрица является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей для любого последовательного разбиения π множества $\langle n \rangle$.

• Все GN матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами.

Следующее определение дает альтернативное блочное обобщение матриц Некрасова.

Определение 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть блочное разбиение $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, индуцировано некоторым последовательным разбиением π множества индексов $\langle n \rangle$. Пусть $A = D - L - U$ – это ассоциированное стандартное блочно треугольное расщепление A. Будем говорить, что A является $\tilde{G}N(\pi)$ матрицей, если ее блочная диагональ D является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей и матрица*

$$\begin{aligned}\tilde{N}_A(\pi) &:= \mathcal{M}(D)^{-1} N_A(\pi) \\ &= (\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1} \mathcal{M}(A) \\ &= I_n - (\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1} |U| \end{aligned} \tag{2.3}$$

имеет строгое диагональное преобладание.

Если разбиение π в определении 2.2 ясно из контекста или его специфический вид не имеет значения, то мы будем писать $\tilde{N}_A$ вместо $\tilde{N}_A(\pi)$ и будем говорить, что A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицей.

Класс всех $n \times n$ матриц, которые являются $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицами для некоторого последовательного разбиения π, будет обозначаться через $\{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)\}$, и, аналогично (2.2), мы полагаем:

$$\{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}\} = \bigcup_{n \geqslant 2} \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}_n\} \quad \text{и} \quad \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}_n\} = \bigcup_{\pi} \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)\}, \tag{2.4}$$

где объединение берется по всем последовательным разбиениям π множества $\langle n \rangle$.

Рассмотрим некоторые элементарные свойства $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матриц.

В силу определения 2.2, $\tilde{N}_A(\pi) = \tilde{N}_{\mathcal{M}(A)}(\pi)$, т.е. A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей.

Заметим, что поскольку для $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицы A ее блочно диагональная часть D является $\mathcal{H}$-матрицей, то $\mathcal{M}(D)$ является $\mathcal{M}$-матрицей, откуда следует, что матрица $\mathcal{M}(D)^{-1}$ неотрицательна, и, кроме того, $\tilde{N}_A(\pi)$ является SDD Z-матрицей. Следовательно, $\tilde{N}_A(\pi)$ является SDD $\mathcal{M}$-матрицей.

Докажем, что $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицы образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является $\tilde{G}N(\pi)$ матрицей для некоторого последовательного разбиения π множества $\langle n\rangle$. Тогда $\mathcal{M}(A)$ является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица.*

Доказательство. Поскольку, по условию, матрицы $\mathcal{M}(D)$, где $D = \operatorname{Diag}(A)$, и $\tilde{N}_A(\pi)$ являются невырожденными $\mathcal{M}$-матрицами, то они обратимы, а их обратные неотрицательны. Теперь из (2.3) следует, что матрица $\mathcal{M}(A)$ невырождена, а ее обратная

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = \tilde{N}_A(\pi)^{-1}[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}$$

неотрицательна. Этим доказано, что $\mathcal{M}(A)$ – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица. $\square$

Покажем, что для любого последовательного разбиения π множества $\langle n\rangle$ имеет место включение

$$\{\mathrm{GN}(\pi)\} \subseteq \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)\}. \tag{2.5}$$

Действительно, если A является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей, то $N_A(\pi)e > 0$ и $\mathcal{M}(D)^{-1} \geqslant 0$, откуда следует, что $\tilde{N}_A(\pi)e = \mathcal{M}(D)^{-1}N_A(\pi)e > 0$, т.е. $\tilde{N}_A(\pi)$ имеет строгое диагональное преобладание, что и означает, что A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей.

Рассмотрим еще одно блочное обобщение матриц Некрасова.

Определение 2.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть блочное разбиение $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, индуцировано некоторым последовательным разбиением π множества индексов $\langle n\rangle$. Будем говорить, что A является $BJN(\pi)$ (Block Jacobi Nekrasov) матрицей, если ее блочно диагональная часть $D = \operatorname{Diag}(A)$ невырождена, а отмасштабированная по блочному Якоби матрица $D^{-1}A$ является $GN(\pi)$ матрицей.*

Замечание 2.1. Ясно, что

$$N_{D^{-1}A}(\pi) = \tilde{N}_{D^{-1}A}(\pi).$$

Следовательно, в определении 2.3 можно было бы потребовать, чтобы $D^{-1}A$ была $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей.

Различие между классами $\mathrm{GN}(\pi)$, $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{BJN}(\pi)$ матриц наглядно проявляется, в частности, в следующих необходимых условиях. Ясно, что первые блочные строки матриц $\mathcal{M}(A)$ и $N_A(\pi)$ совпадают. Следовательно, для того, чтобы A была $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей, необходимо, чтобы ее первая блочная строка состояла из строк, имеющих строгое диагональное преобладание. Поскольку $\tilde{N}_A(\pi) = \mathcal{M}(D)^{-1}N_A(\pi)$, то для того, чтобы A была $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей, необходимо, чтобы первая блочная строка отмасштабированной по блочному Якоби матрицы $\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)$ состояла из строк со строгим диагональным преобладание. Наконец, для того, чтобы A являлась $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрицей, необходимо, чтобы первая блочная строка отмасштабированной по блочному Якоби матрицы $D^{-1}A$ состояла из строк, имеющих строгое диагональное преобладание.

Ниже нам потребуется следующий хорошо известный результат.

Лемма 2.1 ([16])**.** *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. Тогда*
$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1}.$$

Используя лемму 2.1, для $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрицы $A = D - L - U$ мы выводим:
$$\begin{aligned} N_{D^{-1}A}(\pi) &= I_n - [I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}U| \\ &\geqslant I_n - [I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}|U| \\ &= N_{\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)}(\pi) = I_n - [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}|U| \\ &= [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}\mathcal{M}(A) = \tilde{N}_A(\pi). \end{aligned}$$

Таким образом,
$$N_{D^{-1}A}(\pi) \geqslant N_{\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)}(\pi) = \tilde{N}_A(\pi) = \tilde{N}_{\mathcal{M}(A)}(\pi). \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что если A – $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрица, т.е. $\tilde{N}_A(\pi)e > 0$, то A заведомо является и $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрицей. Совместно с (2.5) это дает:
$$\{\mathrm{GN}(\pi)\} \subseteq \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)\} \subseteq \{\mathrm{BJN}(\pi)\}. \tag{2.7}$$

С другой стороны, из (2.6) мы получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть блочное разбиение $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, индуцировано некоторым последовательным разбиением π множества индексов $\langle n\rangle$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *A является $\tilde{G}N(\pi)$ матрицей;*
(ii) *$\mathcal{M}(A)$ является $\tilde{G}N(\pi)$ матрицей;*
(iii) *$\mathcal{M}(A)$ является $BJN(\pi)$ матрицей.*

Следует отметить, что $\mathcal{M}$-матрица является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей тогда и только тогда, когда она является $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрицей, и, вообще говоря, может так случиться, что A есть $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрица, но $\mathcal{M}(A)$ таковой не является.

В точечном случае, где $\pi = \pi_p$, мы имеем $\mathcal{M}(D) = |D|$ и $\tilde{N}_A(\pi_p) = N_{D^{-1}A}(\pi_p) = |D|^{-1}N_A(\pi_p)$. Значит, в этом случае, $\mathrm{GN}(\pi_p)$, $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_p)$ и $\mathrm{BJN}(\pi_p)$ матрицы – это обычные матрицы Некрасова.

С другой стороны, в случае тривиального блочного разбиения π_c мы имеем: $D_A = A$, $N_A(\pi_c) = \mathcal{M}(A)$, $\tilde{N}_A(\pi_c) = I = N_{D_A^{-1}A}(\pi_c)$. Таким образом, в этом случае,

- A является $\mathrm{GN}(\pi_c)$ матрицей тогда и только тогда, когда она является SDD матрицей;
- A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_c)$ матрицей тогда и только тогда, когда она является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей;
- A является $\mathrm{BJN}(\pi_c)$ матрицей тогда и только тогда, когда она невырождена.

Как было установлено в работе [7], если $A = D - L - U$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей, то отмасштабированная по блочному Якоби матрица $D^{-1}A$ также является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей; кроме того, класс $\{\mathrm{GN}(\pi)\}$ замкнут относительно точечного диагонального масштабирования. Представим эти результаты в виде следующего предложения.

Предложение 2.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, – $GN(\pi)$ матрица относительно некоторого последовательного разбиения π множества индексов $\langle n\rangle$, пусть $D = \mathrm{Diag}\,(A)$, а $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – невырожденная диагональная матрица. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *$D^{-1}A$ является $GN(\pi)$ матрицей;*
(ii) *ΔA является $GN(\pi)$ матрицей, причем $N_{\Delta A}(\pi) = |\Delta| N_A(\pi)$;*
(iii) *$N_A(\pi) = N_{\mathcal{M}(A)}(\pi)$.*

Следующее предложение показывает, что более широкий класс $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матриц также обладает свойствами инвариантности $\mathrm{GN}(\pi)$ матриц, представленными в предложении 2.1.

Предложение 2.2. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, *–* $\tilde{G}N(\pi)$ *матрица относительно некоторого последовательного разбиения* π *множества* $\langle n\rangle$, $D = \mathrm{Diag}\,(A)$, *а* $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *– невырожденная (точечная) диагональная матрица. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $D^{-1}A$ *является* $\tilde{G}N(\pi)$ *матрицей*;

(ii) ΔA *является* $\tilde{G}N(\pi)$ *матрицей, причем* $\tilde{N}_{\Delta A}(\pi) = \tilde{N}_A(\pi)$;

(iii) $\tilde{N}_A(\pi) = \tilde{N}_{\mathcal{M}(A)}(\pi) = \tilde{N}_{\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)}(\pi)$.

Доказательство. Пусть $A = D - L - U$ – блочно треугольное расщепление матрицы A.

(i) Имеем:

$$D^{-1}A = I_n - D^{-1}L - D^{-1}U$$

и

$$\tilde{N}_{D^{-1}A}(\pi) = I_n - [I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}U|.$$

Поскольку, по лемме 2.1,

$$|D^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(D)^{-1},$$

то мы имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{D^{-1}A}(\pi) &\geqslant I_n - [I_n - |D^{-1}||L|]^{-1}|D^{-1}||U| \\ &\geqslant I_n - [I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}|U| \\ &= I_n - [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}|U| = \tilde{N}_A(\pi). \end{aligned} \tag{2.8}$$

В силу того, что A – $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрица, матрица $\tilde{N}_A(\pi)$ имеет строгое диагональное преобладание по определению $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матриц, так что $\tilde{N}_A(\pi)e > 0$. Теперь из (2.8) следует, что

$$\tilde{N}_{D_A^{-1}A}(\pi)e > 0,$$

т.е. $\tilde{N}_{D^{-1}A}(\pi) = N_{D^{-1}A}(\pi)$ также является SDD матрицей, а значит $D^{-1}A$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей.

(ii) Поскольку $\mathcal{M}(\Delta A) = |\Delta|\mathcal{M}(A)$, $\mathcal{M}(\Delta D) = |\Delta|\mathcal{M}(D)$ и $|\Delta L| = |\Delta|\,|L|$, то

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{\Delta A}(\pi) &= [\mathcal{M}(\Delta D) - |\Delta L|]^{-1}\mathcal{M}(\Delta A)\\ &= [|\Delta|\mathcal{M}(D) - |\Delta||L|]^{-1}|\Delta|\mathcal{M}(A)\\ &= [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}\mathcal{M}(A) = \tilde{N}_A(\pi).\end{aligned}$$

Значит, $\tilde{N}_{\Delta A}(\pi) = \tilde{N}_A(\pi)$, а ΔA и A являются $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицами одновременно.

(iii) По определению, мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{N}_A(\pi) = \tilde{N}_{\mathcal{M}(A)}(\pi) &= [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}\mathcal{M}(A)\\ &= [I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)\\ &= [I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}[I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L| - \mathcal{M}(D)^{-1}|U|]\\ &= \tilde{N}_{\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{M}(A)}(\pi).\end{aligned}$$

□

Что же касается класса $\mathrm{BJN}(\pi)$ матриц, то, оказывается, он является инвариантным относительно левого умножения на произвольные невырожденные блочно диагональные матрицы.

Предложение 2.3. *Пусть матрица* $A=(A_{ij})_{i,j=1}^m\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, *разбита на блоки в соответствии с некоторым последовательным разбиением* π *множества* $\langle n\rangle$ *и пусть*

$$\Delta = \mathrm{Diag}\,(\Delta_1,\ldots,\Delta_m) \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

– невырожденная блочно диагональная матрица относительно разбиения π. *Тогда матрица* A *является* $BJN(\pi)$ *матрицей в том и только том случае, когда* ΔA *является* $BJN(\pi)$ *матрицей.*

Доказательство. Пусть $D_A = \mathrm{Diag}\,(A)$ и $D_{\Delta A} = \mathrm{Diag}\,(\Delta A)$. Поскольку, очевидно,

$$D_{\Delta A}^{-1}\Delta A = (\Delta D_A)^{-1}\Delta A = D_A^{-1}A,$$

то мы заключаем, что $D_A^{-1}A$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей тогда и только тогда, когда $D_{\Delta A}^{-1}\Delta A$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей, т.е. A – $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрица тогда и только тогда, когда ΔA – $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрица. □

Приводимое ниже следствие предложения 2.3 вполне очевидно.

Следствие 2.1. *Пусть матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, *разбита на блоки в соответствии с некоторым последовательным разбиением* π *множества* $\langle n\rangle$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) A *является* $BJN(\pi)$ *матрицей*;

(ii) *существует невырожденная блочно диагональная матрица* $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\Delta_1, \dots, \Delta_m) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *такая, что* ΔA *является* $BJN(\pi)$ *матрицей*;

(iii) ΔA *является* $BJN(\pi)$ *матрицей для всякой невырожденной блочно диагональной матрицы* $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\Delta_1, \dots, \Delta_m) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *разбитой на блоки соответствующим образом.*

В завершение этого параграфа мы приведем некоторые свойства монотонности классов $\{\mathrm{GN}(\pi)\}$, $\{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)\}$ и $\{\mathrm{BJN}(\pi)\}$.

Предложение 2.4. *Пусть матрицы* $B_1 = (B_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $B_2 = (B_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, *разбиты на блоки в соответствии с некоторым последовательным разбиением* π *множества* $\langle n\rangle$ *и пусть* $B_k = D_k - L_k - U_k$, $k = 1, 2$, *– соответствующие блочно треугольные расщепления.*

Справедливы следующие утверждения.

(i) *Если* B_2 *–* $GN(\pi)$ *матрица и* $\mathcal{M}(B_1) \geqslant \mathcal{M}(B_2)$, *то и* B_1 *–* $GN(\pi)$ *матрица, причем* $N_{B_1}(\pi) \geqslant N_{B_2}(\pi)$.

(ii) *Если* B_2 *–* $\tilde{G}N(\pi)$ *матрица и* $\mathcal{M}(B_1) \geqslant \mathcal{M}(B_2)$, *то и* B_1 *–* $\tilde{G}N(\pi)$ *матрица, причем* $\tilde{N}_{B_1}(\pi) \geqslant \tilde{N}_{B_2}(\pi)$.

(iii) *Если* B_2 *–* $BJN(\pi)$ *матрица и* $M(D_1^{-1}B_1) \geqslant \mathcal{M}(D_2^{-1}B_2)$, *то и* B_1 *–* $BJN(\pi)$ *матрица, причем*

$$N_{D_1^{-1}B_1}(\pi) = \tilde{N}_{D_1^{-1}B_1}(\pi) \geqslant N_{D_2^{-1}B_2}(\pi) = \tilde{N}_{D_2^{-1}B_2}(\pi).$$

Доказательство. (i) Из условия $\mathcal{M}(B_1) \geqslant \mathcal{M}(B_2)$ следует, что $\mathcal{M}(D_1) \geqslant \mathcal{M}(D_2)$, $|L_1| \leqslant |L_2|$, $|U_1| \leqslant |U_2|$, и мы выводим:

$$\begin{aligned} N_{B_1}(\pi) &= \mathcal{M}(D_1) - [I_n - |L_1|\mathcal{M}(D_1)^{-1}]^{-1}|U_1| \\ &\geqslant \mathcal{M}(D_2) - [I_n - |L_2|\mathcal{M}(D_2)^{-1}]^{-1}|U_2| = N_{B_2}(\pi). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Поскольку $B_2 - \mathrm{GN}(\pi)$ матрица, то $N_{B_2}(\pi)e > 0$, и из (2.9) следует, что и тем более $N_{B_1}(\pi)e > 0$. Значит, B_1 также является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей.

(ii) Используя неравенство $\mathcal{M}(B_1) \geqslant \mathcal{M}(B_2)$, мы выводим:

$$\tilde{N}_{B_1}(\pi) = I_n - [\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}|U_1| \geqslant I_n - [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}|U_2| = \tilde{N}_{B_2}(\pi).$$

Таким образом, из $\tilde{N}_{B_2}(\pi)e > 0$ вытекает, что $\tilde{N}_{B_1}(\pi)e > 0$, и B_1 является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ матрицей.

(iii) Поскольку $B_2 \in \{\mathrm{BJN}(\pi)\}$, то $D_2^{-1}B_2$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей. Тогда, в силу (i), из $M(D_1^{-1}B_1) \geqslant \mathcal{M}(D_2^{-1}B_2)$ следует, что и $D_1^{-1}B_1$ является $\mathrm{GN}(\pi)$ матрицей, т.е. B_1 является $\mathrm{BJN}(\pi)$ матрицей, причем $N_{D_1^{-1}B_1}(\pi) \geqslant N_{D_2^{-1}B_2}(\pi)$, что и завершает доказательство. □

§3. Ведущие блочные подматрицы и дополнения по Шуру

В работе [7] был установлен следующий простой результат относительно GN матриц.

Предложение 3.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является GN матрицей. Тогда любая ее ведущая главная блочная подматрица $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$ блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$, также является GN матрицей.*

Ниже мы показываем, что аналогичные утверждения также справедливы как для $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$, так и для BJN матриц.

Предложение 3.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является $\tilde{G}N$ матрицей. Тогда каждая ее ведущая главная блочная подматрица $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$ блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$, также является $\tilde{G}N$ матрицей.*

Доказательство. Пусть $A = D - L - U$ – стандартное блочно треугольное расщепление матрицы A. Тогда, очевидно, $A^{(k)} = D^{(k)} - L^{(k)} - U^{(k)} = D_{A^{(k)}} - L_{A^{(k)}} - U_{A^{(k)}}$, $\mathcal{M}(A^{(k)}) = \mathcal{M}(A)^{(k)}$ и

$$\tilde{N}_{A^{(k)}} = [\mathcal{M}(D_{A^{(k)}}) - |L_{A^{(k)}}|]^{-1}\,\mathcal{M}(A^{(k)}) = \tilde{N}_A^{(k)},$$

так что $\tilde{N}_{A^{(k)}}$ – ведущая главная подматрица SDD матрицы $\tilde{N}_A$. Следовательно, $\tilde{N}_{A^{(k)}}$ также является SDD матрицей, а $A^{(k)}$ – $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрица. □

Предложение 3.3. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является BJN матрицей. Тогда каждая ее ведущая главная блочная подматрица $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$ блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$, также является BJN матрицей.*

Доказательство. Действительно, поскольку A является BJN матрицей, то $D_A^{-1}A$ является GN матрицей, где $D_A = \mathrm{Diag}\,(A)$. Следовательно, по предложению 3.1, при любом k, $1 \leqslant k < m$, подматрица

$$(D_A^{-1}A)^{(k)} = (D_A^{-1})^{(k)}A^{(k)} = D_{A^{(k)}}^{-1}A^{(k)},$$

где $D_{A^{(k)}} = \mathrm{Diag}\,(A^{(k)})$, также является GN матрицей. Но это как раз и означает, что $A^{(k)}$ есть BJN матрица. □

Как было установлено в работе [7], класс GN матриц $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ замкнут относительно дополнений по Шуру, получаемых в результате исключения ведущих главных блочных подматриц $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$, $k = 1, \dots, m-1$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 ([7]). *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является GN матрицей. Представим A в блочной 2×2 форме*

$$A = \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{bmatrix},$$

где $A^{(11)} = A^{(k)}$ – ведущая главная блочная подматрица матрицы A блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$. Тогда дополнение по Шуру

$$S_2(A) = A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1}A^{(12)}$$

также является GN матрицей.

Эта теорема обобщает на случай GN матриц соответствующий результат о замкнутости класса матриц Некрасова относительно дополнений по Шуру, полученный в работе [15].

Ниже мы установим аналоги теоремы 3.1 для $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц.

Напомним, что в соответствии с предложениями 3.2 и 3.3, если $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ – $\tilde{\mathrm{G}}$N матрица, то и $A^{(k)}$ – также $\tilde{\mathrm{G}}$N матрица, а если $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ – BJN матрица, то и $A^{(k)}$ также является BJN матрицей. В обоих случаях, ведущие главные подматрицы вида $A^{(k)}$ являются невырожденными, так что соответствующие дополнения по Шуру определены корректно.

Ниже при доказательстве теорем 3.2 и 3.3 нам потребуются следующие простые леммы.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad и \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

– две матрицы порядка $n \geqslant 2$, согласованным образом разбитые на блоки, и предположим, что подматрицы A_{11} и B_{11} являются невырожденными. Тогда

$$S_2(BA) = B_{22}S_2(A). \tag{3.1}$$

Доказательство. Очевидно,

$$BA = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} & B_{11}A_{12} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_2(BA) &= B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} - (B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21})(B_{11}A_{11})^{-1}B_{11}A_{12} \\ &= B_{22}A_{22} - B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = B_{22}S_2(A). \end{aligned}$$

□

Следующий результат хорошо известен, и мы напоминаем его без доказательства.

Лемма 3.2. *Пусть*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2,$$

является SDD матрицей. Тогда ее дополнение по Шуру $S_2(A) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ также является SDD матрицей.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является $\tilde{G}N$ матрицей. Представим A в блочной 2×2 форме*

$$A = \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

где $A^{(11)} = A^{(k)}$ – ведущая главная блочная подматрица A блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$. Тогда дополнение по Шуру

$$S_2(A) = A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1}A^{(12)}$$

является $\tilde{G}N$ матрицей.

Доказательство. Пусть $A = D - L - U$ – это стандартное блочно треугольное расщепление матрицы A.

Сперва мы докажем теорему в том случае, когда $A = \mathcal{M}(A)$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. $D = \mathcal{M}(D)$, а матрицы L и U неотрицательны.

В соответствии с блочным разбиением (3.2) матрицы A представим матрицы D и L в виде

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ A^{(21)} & L_2 \end{bmatrix},$$

где $A^{(11)} = D_1 - L_1 - U_1$ и $A^{(22)} = D_2 - L_2 - U_2$ – стандартные блочно треугольные расщепления блоков $A^{(11)}$ и $A^{(22)}$.

Заметим, что

$$(D - L)^{-1} = \begin{bmatrix} (D_1 - L_1)^{-1} & 0 \\ * & (D_2 - L_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

– нижняя блочно треугольная матрица. Следовательно, применяя лемму 3.1 к матрице

$$\tilde{N}_A = (D - L)^{-1}\mathcal{M}(A),$$

мы заключаем, что

$$S_2(\tilde{N}_A) = (D_2 - L_2)^{-1} S_2(A). \tag{3.3}$$

Поскольку $\tilde{N}_A$ является $\mathcal{M}$-матрицей, ее дополнение по Шуру $S_2(\tilde{N}_A)$ также является $\mathcal{M}$-матрицей, и, по лемме 3.2, из $\tilde{N}_A e > 0$ следует, что

$$S_2(\tilde{N}_A)e > 0, \tag{3.4}$$

т.е. $S_2(\tilde{N}_A)$ имеет строгое диагональное преобладание. Заметим, что из очевидного неравенства $S_2(A) \leqslant A^{(22)}$ следует, что

$$D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)} \leqslant D_2 - L_2, \tag{3.5}$$

где $S_2(A) = D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)} - U_{S_2(A)}$ – блочно треугольное расщепление $S_2(A)$. Из (3.5) вытекает, что

$$(D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)})^{-1}(D_2 - L_2) \geqslant I. \tag{3.6}$$

Используя (3.3), (3.6) и (3.4), мы выводим:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{S_2(A)}e &= (D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)})^{-1} S_2(A)e \\ &= [(D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)})^{-1}(D_2 - L_2)]\,[(D_2 - L_2)^{-1} S_2(A)]e \\ &= [(D_{S_2(A)} - L_{S_2(A)})^{-1}(D_2 - L_2)] S_2(\tilde{N}_A)e \geqslant S_2(\tilde{N}_A)e > 0. \end{aligned}$$

Этим доказано, что в случае $\tilde{\mathrm{G}}$N $\mathcal{M}$-матрицы A дополнение по Шуру $S_2(A)$ является $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей.

Рассмотрим теперь случай произвольной $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицы A. В этом случае, матрица сравнения

$$\mathcal{M}(A) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{M}(A^{(11)}) & -|A^{(12)}| \\ -|A^{(21)}| & \mathcal{M}(A^{(22)}) \end{array} \right]$$

также является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицей, и, как уже было установлено,

$$S_2(\mathcal{M}(A)) \in \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}\}. \tag{3.7}$$

По теореме 2.1, A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица, так что и $A^{(11)}$ – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. Следовательно, по лемме 2.1, $|(A^{(11)})^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A^{(11)})^{-1}$, и мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(S_2(A)) &= \mathcal{M}(A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1}A^{(12)}) \\ &\geqslant \mathcal{M}(A^{(22)}) - |A^{(21)}||(A^{(11)})^{-1}||A^{(12)}| \\ &\geqslant \mathcal{M}(A^{(22)}) - |A^{(21)}|\mathcal{M}(A^{(11)})^{-1}|A^{(12)}| = S_2(\mathcal{M}(A)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

По предложению 2.4 (ii), из (3.7) и (3.8) следует, что $\mathcal{M}(S_2(A))$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицей, т.е. $S_2(A)$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицей.

Теорема доказана. □

В завершение этого параграфа мы установим аналог теорем 3.1 и 3.2 для BJN матриц.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 2$, является BJN матрицей. Представим A в блочной 2×2 форме*

$$A = \left[\begin{array}{cc} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{array} \right],$$

где $A^{(11)} = A^{(k)}$ – ведущая главная блочная подматрица A блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$. Тогда дополнение по Шуру

$$S_2(A) = A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1}A^{(12)}$$

также является BJN матрицей.

Доказательство. Пусть $D = \mathrm{Diag}\,(A)$ – блочно диагональная часть BJN матрицы A. Тогда, по определению 2.3, матрица $D^{-1}A$ является GN матрицей. Запишем $D = \mathrm{Diag}\,(D^{(1)}, D^{(2)})$, где $D^{(1)} = \mathrm{Diag}\,(A^{(11)})$ и $D^{(2)} = \mathrm{Diag}\,(A^{(22)})$. По теореме 3.1 и лемме 3.1, дополнение по Шуру $S_2(D^{-1}A) = (D^{(2)})^{-1}S_2(A)$ является GN матрицей. Поскольку, ввиду

(2.5), любая GN матрица является также и BJN матрицей, мы заключаем, что $(D^{(2)})^{-1}S_2(A)$ – BJN матрица. Но, в силу предложения 2.3, отсюда следует, что и $S_2(A)$ также является BJN матрицей. □

§4. Монотонность относительно блочного разбиения

мы устанавливаем важное свойство монотонности классов $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{BJN}(\pi)$ относительно разбиений. Точнее говоря, мы доказываем, что если последовательное разбиение π_1 множества индексов является более мелким, чем некоторое другое последовательное разбиение π_2, а матрица A является либо $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)$, либо $\mathrm{BJN}(\pi_1)$ матрицей, то она соответственно является и либо $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)$, либо $\mathrm{BJN}(\pi_2)$. Заметим, что, вообще говоря, классы $\mathrm{GN}(\pi)$ матриц не обладают этим свойством, поскольку, как было отмечено в §2, в случае самого мелкого разбиения π_p $(m = n)$, A является $\mathrm{GN}(\pi_p)$ матрицей тогда и только тогда, когда она является матрицей Некрасова, тогда как для самого грубого разбиения π_c (m=1) A является $\mathrm{GN}(\pi_c)$ матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание, так что, вообще говоря, $\mathrm{GN}(\pi_p) \not\subseteq \mathrm{GN}(\pi_c)$.

Теорема 4.1. *Пусть π_1 и π_2 – два последовательные разбиения множества $\langle n\rangle$ и пусть разбиение π_1 является более мелким, чем π_2. Тогда*

$$\{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)\} \subseteq \{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)\}.$$

Доказательство. Пусть A – $\tilde{G}N(\pi_1)$ матрица и пусть $A = D_1 - L_1 - U_1$ и $A = D_2 - L_2 - U_2$ – это стандартные блочно треугольные расщепления A, отвечающие соответственно разбиениям π_1 и π_2. Поскольку, по теореме 2.1, A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, то как $\mathcal{M}(D_1)$, так и $\mathcal{M}(D_2)$ обе являются невырожденными $\mathcal{M}$-матрицами, так что их обратные неотрицательны. Поскольку разбиение π_2 является более грубым, чем π_1, то

$$\mathcal{M}(D_2) - |L_2| = \mathcal{M}(D_1) - |L_1| - P, \tag{4.1}$$

где P – некоторая строго верхняя треугольная неотрицательная матрица. Из (4.1) следует, что

$$Q := [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|] = I_n + [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}P \geqslant I_n. \tag{4.2}$$

Поскольку A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)$ матрицей, то $\tilde{N}_A(\pi_1)e > 0$, а тогда, ввиду (4.2), мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{N}_A(\pi_2)e &= [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}\mathcal{M}(A)e \\ &= Q[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}\mathcal{M}(A)e \\ &= Q\tilde{N}_A(\pi_1)e \geqslant \tilde{N}_A(\pi_1)e > 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, $\tilde{N}_A(\pi_2)e > 0$, так что A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)$ матрицей. Теорема доказана. □

Поскольку в случае точечного разбиение π_p класс $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_p)$ совпадает с классом обычных матриц Некрасова, то приводимое ниже следствие немедленно вытекает из теоремы 4.1 и гарантирует, что для любого последовательного разбиения π множества индексов класс $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi)$ содержит класс $\{\mathrm{N}\}$ матриц Некрасова того же порядка.

Следствие 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда A является $\tilde{G}N(\pi)$ матрицей для любого последовательного разбиения π множества индексов $\langle n\rangle$.*

Установим аналог теоремы 4.1 для BJN матриц.

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *имеет место включение*

$$\{\mathrm{BJN}(\pi_1)\} \subseteq \{\mathrm{BJN}(\pi_2)\}.$$

Доказательство. Пусть $A \in \{\mathrm{BJN}(\pi_1)\}$ и пусть D_1 – блочно диагональная часть A, соответствующая разбиению π_1. Тогда, по определению, $D_1^{-1}A$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)$ матрицей. В силу теоремы 4.1, отсюда вытекает, что $D_1^{-1}A$ также является и $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)$ матрицей. Следовательно, ввиду (2.5), $D_1^{-1}A$ тем более является и $\mathrm{BJN}(\pi_2)$ матрицей. Теперь, учитывая тот факт, что разбиение π_1 является более мелким, чем π_2, и применяя предложение 2.3, мы заключаем, что A также является $\mathrm{BJN}(\pi_2)$ матрицей. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. Из теоремы 4.2, в частности, следует, что для $\mathrm{BJN}(\pi_1)$ матрицы A ее блочно диагональная часть D_2, соответствующая некоторому последовательному разбиению π_2, более грубому, чем π_1, должна быть невырожденной наряду с D_1. Этот факт нетрудно установить и независимо. Действительно, если $A = (A_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{m_1}$ является $\mathrm{BJN}(\pi_1)$ матрицей, то, по определению, ее блочно диагональная часть $D_1 =$

$\mathrm{Diag}\,(A_{11}^{(1)},\dots,A_{m_1m_1}^{(1)})$ невырождена, а $D_1^{-1}A$ – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. Отсюда следует, что для любого последовательного разбиения π_2, более грубого, чем π_1, и соответствующего блочного разбиения $A=(A_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{m_2}$, блочно диагональная часть $D_1^{-1}\,\mathrm{Diag}\,(A_{11}^{(2)},\dots,A_{m_2m_2}^{(2)})$ матрицы $D_1^{-1}A$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей как блочно диагональная часть невырожденной $\mathcal{H}$-матрицы. Тем самым доказано, что матрица $D_2=\mathrm{Diag}\,(A_{11}^{(2)},\dots,A_{m_2m_2}^{(2)})$ невырождена.

§5. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе мы представим верхние оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для GN, $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц A и покажем, что в применении к GN и $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицам оценки для $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц оказываются более точными, чем соответственно оценки для GN и $\tilde{\mathrm{G}}$N матриц. Также мы докажем, что оценки нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц являются монотонными относительно блочного разбиения.

Как и в работе [7], мы будем использовать следующий общий результат.

Теорема 5.1 ([6])**.** *Пусть $A,G\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, и пусть произведение GA является SDD матрицей. Тогда обе матрицы A и G невырожденные, и имеет место оценка*

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{|G|e\}_i}{\{\mathcal{M}(GA)e\}_i}. \tag{5.1}$$

Для GN матриц, используя лемму 2.1 и теорему 5.1, можно легко получить следующую верхнюю оценку.

Теорема 5.2 ([7])**.** *Пусть $A=(A_{ij})_{i,j=1}^m=D-L-U\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant m\leqslant n$, является GN матрицей. Обозначим $\mathcal{L}(A)=I_n-|L|\mathcal{M}(D)^{-1}$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{N_Ae\}_i}. \tag{5.2}$$

Заметим, что для того, чтобы применить оценку (5.2), необходимо решить две линейные системы с блочно унитреугольной матрицей $\mathcal{L}(A)=I_n-|L|\mathcal{M}(D)^{-1}$.

Аналогично, для $\tilde{\mathrm{G}}$N матриц мы получаем следующую верхнюю оценку.

Теорема 5.3. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m = D - L - U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *является* $\tilde{\mathrm{G}}$N *матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A e\}_i}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Поскольку A является $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей, то

$$\tilde{N}_A = [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}|U| = \mathcal{M}(\tilde{N}_A)$$

является SDD $\mathcal{M}$-матрицей, а матрица $[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}$ неотрицательна. Тогда, по теореме 5.1, мы имеем

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A e\}_i}.$$

Неравенство

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty$$

следует из леммы 2.1, поскольку $\tilde{\mathrm{G}}$N матрица A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей по теореме 2.1. □

Ясно, что для того, чтобы воспользоваться оценкой (5.3), необходимо решить две линейные системы с блочно треугольной матрицей $\mathcal{M}(D) - |L|$.

Как легко видеть, в случае обычных матриц Некрасова, т.е. при $m = n$, обе оценки (5.2) и (5.3) сводятся к оценке, установленной в статье [2].

Поскольку GN матрица A заведомо является и $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей, то норму $\|A^{-1}\|_\infty$ можно оценить с помощью любой из оценок (5.2) и (5.3). Ниже мы покажем, то оценка (5.3) не только применима к более широкому матричному классу, но и в применении к GN матрицам она является более точной, чем оценка (5.2).

Теорема 5.4. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m = D - L - U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *является GN матрицей и положим* $\mathcal{L}(A) = I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A e\}_i} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{N_A e\}_i}. \end{aligned}\tag{5.4}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 5.3, нам остается установить лишь последнее неравенство в (5.4). Обозначим

$$\alpha := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{N_A e\}_i}.$$

Тогда будем иметь

$$\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i \leqslant \alpha\{N_A e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

или, в векторных обозначениях,

$$\mathcal{L}(A)^{-1}e \leqslant \alpha N_A e. \tag{5.5}$$

Поскольку $\mathcal{M}(D)^{-1} \geqslant 0$, из (5.5) следует, что

$$\mathcal{M}(D)^{-1}\mathcal{L}(A)^{-1}e = [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e \leqslant \alpha\tilde{N}_A e,$$

т.е.

$$\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i \leqslant \alpha\{\tilde{N}_A e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тем самым установлено, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A e\}_i} \leqslant \alpha,$$

что и требовалось доказать. □

Если последовательное разбиение π_1 множества индексов $\langle n\rangle$ является более мелким, чем некоторое другое последовательное разбиение π_2 и $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)$ матрицей, то, по теореме 4.1, она также является и $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)$ матрицей. Следовательно, оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ можно получить, как применяя оценку (5.3), соответствующую исходному разбиению π_1, так и применяя ту же оценку, соответствующую любому другому последовательному разбиению, более грубому, чем π_1; вычисление последней будет, разумеется, более дорогим.

Следующая теорема утверждает, что оценку теоремы 5.3 можно улучшить, переходя к более грубому блочному разбиению $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицы. В частности, для обычной матрицы Некрасова A оценку из работы [2] можно уточнить, применяя оценку (5.3), соответствующую любому блочному разбиению A, отличному от точечного. Заметим, что в предельном случае самого грубого разбиения π_c (m=1), правая часть (5.3), очевидно, дает точное значение $\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty$, тогда как оценка (5.2) в этом случае принимает вид

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{\{\mathcal{M}(A)e\}_i} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},$$

т.е. она совпадает с классической оценкой [9, 18] нормы обратной для SDD матрицы.

Теорема 5.5. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $A = D_1 - L_1 - U_1$ и $A = D_2 - L_2 - U_2$ – это два стандартные блочно треугольные расщепления матрицы A, соответствующие двум последовательным разбиениям π_1 и π_2 множества $\langle n\rangle$. Если A является $\tilde{G}N(\pi_1)$ матрицей и разбиение π_2 является более грубым, чем π_1, то*

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A(\pi_2)e\}_i} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A(\pi_1)e\}_i}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что, в соответствии с теоремой 4.1, A является $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_2)$ матрицей. Следовательно, ввиду теоремы 5.3, нам остается установить лишь последнее неравенство в (5.6). Положим

$$\alpha := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A(\pi_1)e\}_i}.$$

Тогда

$$\{[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}e\}_i \leqslant \alpha\{\tilde{N}_A(\pi_1)e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

или, в векторных обозначениях,

$$[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}e \leqslant \alpha\tilde{N}_A(\pi_1)e,$$

или

$$\{[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1} - \alpha\tilde{N}_A(\pi_1)\}e \leqslant 0. \tag{5.7}$$

Поскольку π_2 является более грубым, чем π_1, то

$$\mathcal{M}(D_2) - |L_2| = \mathcal{M}(D_1) - |L_1| - P,$$

где P – неотрицательная матрица, а тогда

$$Q := [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|] = I_n + [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}P \geqslant I_n. \tag{5.8}$$

Теперь из (5.7) с учетом (5.8) следует, что

$$Q\{[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1} - \alpha\tilde{N}_A(\pi_1)\}e \leqslant 0,$$

так что

$$[\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}e = Q[\mathcal{M}(D_1) - |L_1|]^{-1}e \leqslant \alpha Q\tilde{N}_A(\pi_1)e = \alpha\tilde{N}_A(\pi_2)e, \tag{5.9}$$

где мы воспользовались очевидными равенствами

$$Q\tilde{N}_A(\pi_1) = [\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}\mathcal{M}(A) = \tilde{N}_A(\pi_2).$$

Теперь для завершения доказательства нам остается лишь заметить, что неравенство (5.9) в точности означает, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D_2) - |L_2|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_A(\pi_2)e\}_i} \leqslant \alpha.$$

□

Для того, чтобы вывести верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ в случае BJN матриц, мы воспользуемся следующим результатом.

Теорема 5.6 ([6]). *Пусть матрицы A, $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, обе невырождены. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}GA)^{-1}\|_\infty, \tag{5.10}$$

где диагональная матрица $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ определяется соотношением

$$\Delta e = |G|e.$$

Искомая оценка для обратной к BJN матрице содержится в следующей теореме.

Теорема 5.7. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m = D - L - U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, является BJN матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D^{-1}A}e\}_i}. \tag{5.11}$$

Доказательство. По теореме 5.6,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}D^{-1}A)^{-1}\|_\infty, \tag{5.12}$$

где диагональная матрица Δ определяется соотношением

$$\Delta e = |D^{-1}|e. \tag{5.13}$$

Поскольку A есть BJN матрица, то отмасштабированная по блочному Якоби матрица $D^{-1}A$ является $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей. Отсюда, ввиду предложения 2.2 (ii), следует, что $\Delta^{-1}D^{-1}A$ также является $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей и, более того,

$$\tilde{N}_{\Delta^{-1}D^{-1}A} = \tilde{N}_{D^{-1}A}. \tag{5.14}$$

Применяя теорему 5.3 к $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрице $\Delta^{-1}D^{-1}A$ и используя соотношения (5.12)–(5.14), мы выводим:

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[\Delta^{-1}-|\Delta^{-1}D^{-1}L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_{\Delta^{-1}D^{-1}A}e\}_i}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[I_n-|D^{-1}L|]^{-1}\Delta e\}_i}{\{\tilde{N}_{\Delta^{-1}D^{-1}A}e\}_i}\\ &=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[I_n-|D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D^{-1}A}e\}_i}.\end{aligned}$$

□

Теперь мы покажем, что в применении к $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицам, которые образуют подкласс класса BJN матриц, оценка теоремы 5.7 оказывается более точной, чем оценка (5.3).

Теорема 5.8. *Пусть* $A=(A_{ij})_{i,j=1}^m=D-L-U\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant m\leqslant n$, *является* $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ *матрицей. Тогда*

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[I_n-|D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D^{-1}A}e\}_i}\\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[\mathcal{M}(D)-|L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_Ae\}_i}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 5.7, нам остается доказать лишь последнее неравенство в (5.15). Положим

$$\alpha:=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[\mathcal{M}(D)-|L|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_Ae\}_i}.$$

Тогда будем иметь

$$[\mathcal{M}(D)-|L|]^{-1}e\leqslant\alpha\tilde{N}_Ae.\tag{5.16}$$

Поскольку D – блочно диагональная часть $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ матрицы A – является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, то, по лемме 2.1,

$$|D^{-1}|\leqslant\mathcal{M}(D)^{-1}.\tag{5.17}$$

Из (5.17) следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{D^{-1}A}&=I_n-[I_n-|D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}U|\\ &\geqslant I_n-[I_n-\mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}|U|=\tilde{N}_A.\end{aligned}\tag{5.18}$$

С другой стороны, ввиду (5.17), мы также имеем

$$[I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e \leqslant [I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|]^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}e$$
$$= [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e. \tag{5.19}$$

Теперь из (5.19), (5.16) и (5.18) мы получаем:

$$[I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e \leqslant [\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e \leqslant \alpha\tilde{N}_A e \leqslant \alpha\tilde{N}_{D^{-1}A}e.$$

Тем самым доказано, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D^{-1}A}e\}_i} \leqslant \alpha,$$

чем и завершается доказательство теоремы. □

В заключение этого параграфа мы установим аналог теоремы 5.5 для BJN матриц, т.е. докажем, что для BJN(π_1) матрицы A оценку теоремы 5.7 можно улучшить, переходя к более грубому последовательному разбиению π_2 множества индексов.

Теорема 5.9. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, и пусть $A = D_1 - L_1 - U_1$ и $A = D_2 - L_2 - U_2$ – два стандартные блочно треугольные расщепления A, соответствующие двум последовательным разбиениям π_1 и π_2 множества $\langle n\rangle$. Если A является BJN(π_1) матрицей и разбиение π_2 является более грубым, чем π_1, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D_2^{-1}L_2|]^{-1}|D_2^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2^{-1}A}(\pi_2)\,e\}_i}$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D_1^{-1}L_1|]^{-1}|D_1^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_1^{-1}A}(\pi_1)\,e\}_i}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Поскольку, по условию, A является BJN(π_1) матрицей, то отмасштабированная по блочному Якоби матрица $D_1^{-1}A$ является $\tilde{\mathrm{G}}$N(π_1) матрицей. Тогда, по предложению 2.2 (ii), матрица $B := \Delta_1^{-1}D_1^{-1}A$, где диагональная матрица Δ_1 определяется соотношением

$$\Delta_1 e = |D_1^{-1}|e, \tag{5.21}$$

также является $\tilde{\mathrm{G}}$N(π_1) матрицей и, более того,

$$\tilde{N}_B(\pi_1) = \tilde{N}_{D_1^{-1}A}(\pi_1). \tag{5.22}$$

Так как разбиение π_2 является более грубым, чем π_1, то, в силу теоремы 4.2, A является BJN(π_2) матрицей. Следовательно, по теореме 5.7, справедлива оценка

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D_2^{-1}L_2|]^{-1}|D_2^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2^{-1}A}(\pi_2)\, e\}_i}. \tag{5.23}$$

Этим доказано левое неравенство в (5.20).

Ниже, через $B = D_1(B) - L_1(B) - U_1(B)$ и $B = D_2(B) - L_2(B) - U_2(B)$ обозначаются блочно треугольные расщепления матрицы B, ассоциированные соответственно с расщеплениями π_1 и π_2.

Используя (5.21) и очевидное равенство $D_2(B) = \Delta_1^{-1}D_1^{-1}D_2$, мы выводим:

$$\begin{aligned} |D_2^{-1}|e &= |D_2^{-1}D_1\Delta_1 \cdot \Delta_1^{-1}D_1^{-1}|e = |D_2(B)^{-1} \cdot \Delta_1^{-1}D_1^{-1}|e \\ &\leqslant |D_2(B)^{-1}|\, |\Delta_1^{-1}D_1^{-1}|e = |D_2(B)^{-1}|e. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Из (5.24) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{1\leqslant i\leqslant n} & \frac{\{[I_n - |D_2^{-1}L_2|]^{-1}|D_2^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2^{-1}A}(\pi_2)\, e\}_i} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D_2^{-1}L_2|]^{-1}|D_2(B)^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2^{-1}A}(\pi_2)\, e\}_i} \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[I_n - |D_2(B)^{-1}L_2(B)|]^{-1}|D_2(B)^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2(B)^{-1}B}(\pi_2)\, e\}_i}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

При выводе (5.25) мы воспользовались очевидными соотношениями

$$D_2(B)^{-1}L_2(B) = D_2^{-1}L_2$$

и

$$D_2(B)^{-1}B = D_2^{-1}A.$$

Поскольку B является $\tilde{\mathrm{G}}$N(π_1) матрицей, то, применяя теорему 5.8, мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \max_{1\leqslant i\leqslant n} & \frac{\{[I_n - |D_2(B)^{-1}L_2(B)|]^{-1}|D_2(B)^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_2(B)^{-1}B}(\pi_2)\, e\}_i} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{[\mathcal{M}(D_2(B)) - |L_2(B)|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_B(\pi_2)\, e\}_i}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

С другой стороны, применяя теорему 5.5 к $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}(\pi_1)$ матрице B и используя (5.21), мы выводим:

$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[\mathcal{M}(D_2(B))-|L_2(B)|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_B(\pi_2)\,e\}_i}&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[\mathcal{M}(D_1(B))-|L_1(B)|]^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_B(\pi_1)\,e\}_i}\\ =\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{(\Delta_1^{-1}[I_n-|D_1^{-1}L_1|])^{-1}e\}_i}{\{\tilde{N}_{\Delta_1^{-1}D_1^{-1}A}(\pi_1)\,e\}_i}&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\{[I_n-|D_1^{-1}L_1|]^{-1}|D_1^{-1}|e\}_i}{\{\tilde{N}_{D_1^{-1}A}(\pi_1)\,e\}_i}.\end{aligned}\tag{5.27}$$

Теперь нужное нам правое неравенство в (5.20) следует из неравенств (5.23), (5.25), (5.26) и (5.27). □

§6. Блочные 2×2 матрицы

В этом параграфе мы иллюстрируем результаты §2 и §5, рассматривая частный случай обобщенных матриц Некрасова. А именно, мы рассматриваем случай блочных 2×2 матриц $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, вида

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & u^T\\ v & A_{22}\end{bmatrix},\quad u^T=[a_{12},\dots,a_{1n}],\quad v=[a_{21},\dots,a_{n1}]^T.\tag{6.1}$$

Как легко проверить, в рассматриваемом случае, в предположении, что все нужные обратные существуют, мы имеем:

$$N_A=\begin{bmatrix}|a_{11}| & -|u|^T\\ 0 & S_2(\mathcal{M}(A))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|a_{11}| & -|u|^T\\ 0 & \mathcal{M}(A_{22})-\frac{|v||u|^T}{|a_{11}|}\end{bmatrix},\tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{N}_A&=\begin{bmatrix}|a_{11}|^{-1} & 0\\ 0 & \mathcal{M}(A_{22})^{-1}\end{bmatrix}N_A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{|a_{11}|}|u|^T\\ 0 & \mathcal{M}(A_{22})^{-1}S_2(\mathcal{M}(A))\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{|a_{11}|}|u|^T\\ 0 & I_{n-1}-\frac{1}{|a_{11}|}\mathcal{M}(A_{22})^{-1}|v||u|^T\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.3}$$

и

$$N_{D^{-1}A}=\tilde{N}_{D^{-1}A}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{|a_{11}|}|u|^T\\ 0 & I_{n-1}-\frac{1}{|a_{11}|}|A_{22}^{-1}v||u|^T\end{bmatrix}.\tag{6.4}$$

Принимая во внимание, что $|u|^Te=r_1(A)$, из соответствующих определений и соотношений (6.2)–(6.4) мы заключаем, что матрица A вида (6.1) является

• GN матрицей тогда и только тогда, когда $a_{11} \neq 0$, $\mathcal{M}(A_{22})$ является SDD $\mathcal{M}$-матрицей и

$$\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\begin{bmatrix} 1 \\ |v| \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ \mathcal{M}(A_{22})e \end{bmatrix}; \tag{6.5}$$

• $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей тогда и только тогда, когда $a_{11} \neq 0$, $\mathcal{M}(A_{22})$ является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей и

$$\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} < e, \tag{6.6}$$

где мы полагаем

$$z = \mathcal{M}(A_{22})^{-1}|v|;$$

• BJN матрицей тогда и только тогда, когда $a_{11} \neq 0$, A_{22} невырождена и

$$\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} < e, \tag{6.7}$$

где мы полагаем

$$t = |A_{22}^{-1}v|.$$

Из приведенных выше необходимых и достаточных условий легко следует, что в случае матриц вида (6.1) любая GN матрица является $\tilde{\mathrm{G}}$N матрицей, а каждая $\tilde{\mathrm{G}}$N матрица является BJN матрицей. Это иллюстрирует общие соотношения включения (2.5) между классами GN, $\tilde{\mathrm{G}}$N и BJN матриц.

Теперь мы адаптируем общие оценки теорем 5.2, 5.3 и 5.7 к матрицам вида (6.1).

Как было установлено в работе [7], из теоремы 5.2 вытекает следующий результат, который представлен ниже в несколько модифицированном виде.

Теорема 6.1 ([7]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – GN матрица вида* (6.1). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{11}| - r_1(A)},\ \max_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{|a_{11}| + |v_i|}{|a_{11}|[\{\mathcal{M}(A_{22})e\}_i - r_1(A)|v_i|]}\right\}, \tag{6.8}$$

где $v_i = a_{i1}$, $i = 2, \ldots, n$.

В случае $\tilde{\mathrm{G}}$N матриц вида (6.1), теорема 5.3 сводится к следующему утверждению.

Теорема 6.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *–* $\tilde{G}N$ *матрица вида* (6.1). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{11}| - r_1(A)},\ \max_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{|a_{11}|w_i + z_i}{|a_{11}| - r_1(A)z_i}\right\}, \tag{6.9}$$

где мы полагаем

$$w = (w_i) = \mathcal{M}(A_{22})^{-1}e, \quad z = (z_i) = \mathcal{M}(A_{22})^{-1}|v|.$$

Доказательство. Из (6.1) следует, что

$$\mathcal{M}(D) - |L| = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 \\ -|v| & \mathcal{M}(A_{22}) \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{aligned}[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1} &= \begin{bmatrix} |a_{11}|^{-1} & 0 \\ |a_{11}|^{-1}\mathcal{M}(A_{22})^{-1}|v| & \mathcal{M}(A_{22})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |a_{11}|^{-1} & 0 \\ |a_{11}|^{-1}z & \mathcal{M}(A_{22})^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\{[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}e\}_i = \begin{cases} |a_{11}|^{-1}, & i = 1, \\ |a_{11}|^{-1}z_i + w_i, & i \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.10}$$

С другой стороны, в силу (6.3) мы имеем

$$\{\tilde{N}_A e\}_i = \begin{cases} |a_{11}|^{-1}[|a_{11}| - r_1(A)], & i = 1, \\ |a_{11}|^{-1}[|a_{11}| - r_1(A)z_i], & i \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.11}$$

Наконец, применяя теорему 5.3 и используя (6.10) и (6.11), мы получаем (6.9). □

Для BJN матриц вида (6.1) теорема 5.7 дает следующий результат.

Теорема 6.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *–* BJN *матрица вида* (6.1). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{11}| - r_1(A)},\ \max_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{t_i + |a_{11}|s_i}{|a_{11}| - r_1(A)t_i}\right\}, \tag{6.12}$$

где

$$t = (t_i) = |A_{22}^{-1}v|, \quad s = (s_i) = |A_{22}^{-1}|e.$$

Доказательство. Из (6.1) следует, что

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}; \quad D^{-1}L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{22}^{-1}v & 0 \end{bmatrix};$$

$$I_n - |D^{-1}L| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -|A_{22}^{-1}v| & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & I_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$[I_n - |D^{-1}L|]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

так что

$$\{[I_n - |D^{-1}L|]^{-1}|D^{-1}|e\}_i = \begin{cases} |a_{11}|^{-1}, & i = 1, \\ |a_{11}|^{-1}t_i + s_i, & i \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.13}$$

С другой стороны, из (6.4) мы получаем:

$$\{\tilde{N}_{D^{-1}A}e\}_i = \begin{cases} |a_{11}|^{-1}[|a_{11}| - r_1(A)], & i = 1, \\ |a_{11}|^{-1}[|a_{11}| - r_1(A)t_i], & i \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.14}$$

Теперь, применяя теорему 5.7 и используя (6.13) и (6.14), мы устанавливаем нужную нам оценку (6.12). □

Как следует из общих теорем 5.4 и 5.8, если A является GN матрицей, то оценка (6.9), вообще говоря, более точна, чем (6.8), а если A является $\tilde{\text{G}}$N матрицей, то оценка (6.12), вообще говоря, более точна, чем (6.9). Однако вычисление оценки (6.8) требует наименьших вычислительных затрат. Действительно, для вычисления более общей оценки (6.9) требуется решить две линейные системы с матрицей коэффициентов $\mathcal{M}(A_{22})$, а для вычисления оценки (6.12) нужно решить систему уравнений с матрицей A_{22} и вычислить вектор $s = |A_{22}^{-1}|e$, для которого можно использовать оценку $s \leqslant \|A_{22}^{-1}\|_\infty e$.

В частности, в случае SDD матриц, мы имеем целый набор верхних оценок для $\|A^{-1}\|_\infty$, которые варьируются от простейшей и наиболее дешевой классической оценки ([9, 18])

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},$$

которая соответствует точечному разбиению, до оценок, соответствующих самому грубому блочному разбиению и применимых к более широким матричным классам, содержащим класс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием.

Список литературы

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латв. матем. ежегодник, Рига, 1966, 385–390.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
5. Л. Ю. Колотилина, *Матрицы некрасовского типа и оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 169–183.
6. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые новые классы невырожденных матриц и верхние оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 184–200.
7. Л. Ю. Колотилина, *Об одном блочном обобщении матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 138–155.
8. Р. Мемке, П. А. Некрасовъ, *Решенiе линейной системы уравненiй посредствомъ последовательныхъ приближенiй.* — Матем. сб. **16** (1892), 437–459.
9. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
10. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
11. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of block matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
12. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
13. L. Cvetković, V. Kostić, M. Nedović, *Generalizations of Nekrasov matrices and applications.* — Open Math. **13** (2015), 96–105.
14. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
15. Kh. D. Ikramov, M. Yu. Ibragimov, *The Nekrasov property is hereditary for Gaussian elimination.* — ZAMM **77** (1997), 394–396.
16. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
17. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
18. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
19. Y. Wang, L. Gao, *An improvement of the infinity norm bound for the inverse of $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrices.* — J. Ineq. Appl. **177** (2019).

Kolotilina L. Yu. Further block generalizations of Nekrasov matrices.

The paper continues the study of block generalizations of Nekrasov matrices and introduces two new classes of the so-called $\tilde{\mathrm{G}}$N and BJN matrices and compares them with the previously introduced class of GN matrices. Different properties of $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$ and BJN matrices are established. In particular, it is proved that the classes $\{\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}\}$ and $\{\mathrm{BJN}\}$ are closed with respect to Schur complements and monotone with respect to block partitioning. Also upper bounds for the norms of inverses $\|A^{-1}\|_\infty$ of GN, $\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{N}$, and BJN matrices A are considered. General results obtained are specialized to the case of block two-by-two matrices with scalar first diagonal block.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 20 октября 2021 г.