Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

1. Конгруэнтное преобразование (или, короче, конгруэнция) $n \times n$-матрицы A понимается в этой статье как преобразование вида

$$A \to Q^T AQ,$$

где Q – невырожденная матрица. Если трансформирующая матрица Q выбирается в каком-либо специальном матричном классе, то термин "конгруэнция" соответствующим образом уточняется. Так, если Q – ортогональная матрица, то мы говорим об ортогональной конгруэнции.

Пусть A – вещественная симметричная матрица. Хорошо известно, что посредством ортогональной конгруэнции (являющейся в этом случае и подобием) A можно привести к диагональному виду

$$Q^T AQ = D. \tag{1}$$

Диагональные элементы d_{ii} суть собственные значения матрицы A, а само равенство (1), или другая его запись

$$A = QDQ^T,$$

называется спектральным разложением этой матрицы.

Гораздо менее известно разложение матрицы A, обсуждаемое ниже. Для его описания нам потребуется напомнить некоторые определения.

Симплектическим пространством будем называть вещественное арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ четной размерности $n = 2m$, в котором скалярное произведение задается правилом

$$\langle x, y\rangle = (Jx, y). \tag{2}$$

Здесь

$$(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Ключевые слова: конгруэнтное преобразование, преобразование подобия, симплектическая матрица, гамильтонова матрица, J-симметричная матрица, неравенство Шура.

есть стандартное скалярное произведение векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, а

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Принятие скалярного произведения (2) выделяет во множестве всех $n \times n$-матриц (рассматриваемых как линейные операторы, действующие в $\mathbf{R}^n$) три класса специальных матриц, а именно: симплектические, гамильтоновы и J-симметричные (или косогамильтоновы) матрицы. Симплектическая матрица S определяется соотношением

$$S^T JS = J. \tag{3}$$

Для гамильтоновой матрицы H определение имеет вид

$$H^T = JHJ,$$

а для косогамильтоновой матрицы K – вид

$$K^T = -JKJ.$$

Эти три матричных класса выполняют в симплектическом пространстве функции соответственно ортогональных, кососимметричных и симметричных операторов. В частности, подобие с симплектической трансформирующей матрицей не выводит из класса гамильтоновых матриц.

2. Пусть теперь A – не просто симметричная, но еще и положительно определенная матрица порядка $n = 2m$. Оказывается, что такую матрицу можно привести к диагональному виду и посредством симплектической конгруэнции:

$$S^T AS = \Lambda. \tag{4}$$

Диагональная матрица Λ есть прямая сумма

$$\Lambda = D_m \oplus D_m, \tag{5}$$

а диагональные элементы $m \times m$-матрицы D_m называют симплектическими собственными значениями матрицы A. Они, вообще говоря, никак не связаны с обычными собственными значениями этой матрицы и разделяют с ними разве что свойство положительности. Однако, как мы скоро увидим, связь с собственными значениями все же имеется, но это собственные значения не самой A, а некоторых сопутствующих ей матриц.

В алгебраической литературе утверждение о существовании разложения (4)–(5) принято называть теоремой Уильямсона и связывать эту теорему со статьей [1].

3. Снимем на время условие положительной определенности матрицы A, сохранив требование четности ее порядка. Разобьем A на четыре блока порядка m:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Блоки A_{11} и A_{22} – симметричные матрицы порядка m, а внедиагональные блоки связаны соотношением

$$A_{21} = A_{12}^T. \tag{6}$$

Сопоставим матрице A матрицу

$$B = JA = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{11} & -A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

В матрице B симметричны внедиагональные блоки B_{12} и B_{21}, а диагональные блоки удовлетворяют соотношению

$$B_{22} = -B_{11}^T$$

(см. (6)). Отсюда следует, что B – гамильтонова матрица. При этом матрицы A и B одновременно вырождены или невырождены.

4. Предположим, что к исходной матрице A применена симплектическая конгруэнция

$$A \to \widetilde{A} = S^T AS. \tag{7}$$

Из определения симплектической матрицы (см. (3)) следует, что

$$S^T = -JS^{-1}J.$$

Подставляя это выражение в (7), имеем

$$\widetilde{A} = -JS^{-1}JAS,$$

или

$$\widetilde{B} \overset{\text{def}}{\equiv} J\widetilde{A} = S^{-1}BS.$$

Таким образом, симплектической конгруэнции матрицы A соответствует симплектическое подобие ассоциированной с ней гамильтоновой матрицы $B = JA$. Это соответствие действует в обе стороны.

5. Восстановим условие положительной определенности матрицы A. Возвращаясь к теореме Уильямсона, рассмотрим симплектическую конгруэнцию (4), преобразующую A к ее диагональной форме (5). Одновременно симплектическое подобие

$$B \to S^{-1}BS$$

переводит гамильтонову матрицу $B = JA$ в матрицу

$$\Gamma = J\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & D_m \\ -D_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадрат всякой гамильтоновой матрицы есть косогамильтонова матрица (подобно тому, как квадрат кососимметричной матрицы есть матрица симметричная). В данном случае, квадратом матрицы Γ является диагональная матрица

$$M \overset{\mathrm{def}}{\equiv} -D_m^2 \oplus -D_m^2.$$

Тем самым мы пришли к следующему результату.

Теорема 1. *Симплектические собственные значения положительно определенной матрицы A – это модули обычных собственных значений ассоциированной с ней гамильтоновой матрицы $B = JA$, или арифметические квадратные корни из собственных значений косогамильтоновой матрицы $-B^2$.*

Теорема 1 показывает, что числа, называемые симплектическими собственными значениями симметричной положительно определенной матрицы A, будучи инвариантами симплектических конгруэнций, а не подобий, все же в известном смысле являются собственными значениями.

То обстоятельство, что собственные значения матриц B^2 и $-B^2$ имеют четную кратность, не должно удивлять нас. В действительности, это общее свойство всех косогамильтоновых матриц. Одно из его объяснений можно найти в [2].

В следующем разделе будет дана любопытная интерпретация матрицы $-B^2$.

6. Рассмотрим вещественное или комплексное арифметическое пространство размерности n (не обязательно четной) и зададим в нем скалярное произведение посредством билинейной формы

$$\phi(x, y) = (Gx, y),$$

где G – невырожденная симметричная или кососимметричная матрица, а (x, y) – стандартное скалярное произведение векторов x и y. Будем трактовать $n \times n$-матрицы как операторы полученного билинейно метрического пространства (другие названия – пространство Понтрягина, пространство Крейна и т.д.). Тогда оператором A^H, сопряженным к A, будет матрица

$$A^H = G^{-1}A^TG.$$

Обобщенные сингулярные числа матрицы A определены в [3] как собственные значения матрицы $A^HA = G^{-1}A^TGA$, или, что то же, как собственные значения матрицы $AA^H = AG^{-1}A^TG$. В общем случае, они являются комплексными числами. Поэтому, чтобы избежать неоднозначности, в определении устранена операция извлечения квадратного корня. Это приводит к различию с классическим определением в случае обычной евклидовой метрики.

Посмотрим, что дает это определение, если $n = 2m$, $G = J$ и A – симметричная матрица. Учитывая, что $J^{-1} = -J$, имеем

$$A^HA = -JAJA = -(JA)^2.$$

Это уже хорошо известная нам матрица $-B^2$.

Если вещественная матрица A положительно определена, то матрица JA, будучи подобна кососимметричной матрице $A^{1/2}JA^{1/2}$, имеет чисто мнимый спектр. Поэтому все собственные значения матрицы $-B^2$ положительны.

7. Имеется интересное соотношение между обычными и симплектическими собственными значениями матрицы A. Напомним сначала неравенство Шура для собственных значений $\lambda_i(G)$ комплексной $n \times n$-матрицы G и нормы Фробениуса этой матрицы:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(G)|^2 \leqslant \|G\|_F^2. \tag{8}$$

Равенство в (8) достигается тогда и только тогда, когда G – нормальная матрица.

Обозначим через σ_1 величину

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|^2.$$

Поскольку A симметрична, имеем

$$\sigma_1 = \|A\|_F^2.$$

Пусть $d_1, \ldots, d_m$ – симплектические собственные значения матрицы A. Тогда, в соответствии с неравенством Шура,

$$\sigma_2 \stackrel{\text{def}}{\equiv} \sum_{i=1}^{m} d_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\|B\|_F^2.$$

Так как

$$\|B\|_F = \|JA\|_F = \|A\|_F,$$

то окончательно получаем неравенство

$$\sigma_2 \leqslant \sigma_1/2.$$

Это соотношение является еще одним свидетельством различия между обычными и симплектическими собственными значениями матрицы A.

8. В этом разделе мы укажем обычный и симплектический спектр для четырех типов симметричных тестовых матриц. Чтобы сократить пространство для демонстрации вычисленных результатов до разумного размера, ограничимся матрицами порядка $n = 10$. Так как, однако, матрица четвертого типа (матрица Гильберта) имеет кластер из очень малых собственных значений, мы выберем для нее еще меньший порядок ($n = 6$). Во всех случаях мы приводим значения величин $\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A)$.

Первый тип. Во всех диагональных позициях матрицы A стоит положительное число a, а во всех внедиагональных позициях – вещественное число b. Спектр этой матрицы таков: 1) простое собственное значение $a+(n-1)b$; 2) собственное значение $a-b$ кратности $n-1$. Тем самым A заведомо положительно определена, если $a > b > 0$. В таблице 1 показаны обычные и симплектические собственные значения матрицы A для значений $a = 3, b = 1$.

Второй тип. Для всех i и j положим $a_{ij} = \min(i, j)$. Известно, что такая матрица A положительно определена при любом n. В таблице 2 показаны ее собственные значения обоих типов для $n = 10$.

Третий тип. A – трехдиагональная матрица с диагональным элементом $a \geqslant 2$ и числом -1 на двух соседних диагоналях. Для $a = 2$ собственные значения этой матрицы хорошо известны и положительны. Если $a > 2$, то спектр сдвигается вправо на $a - 2$. В таблице 3

Таблица 1

Спектр A	Симплектический спектр A
1.999999999999999	4.898979485566354
1.999999999999999	2.000000000000000
2.000000000000000	1.999999999999998
2.000000000000000	1.999999999999999
2.000000000000000	1.999999999999998
2.000000000000000	
2.000000000000000	
2.000000000000001	
2.000000000000002	
11.999999999999996	
$\frac{1}{2}\sigma_1 = 89.999999999999957$	$\sigma_2 = 39.999999999999957$

Таблица 2

Спектр A	Симплектический спектр A
0.255679562796436	14.235382823494252
0.273786761639244	1.361179157923696
0.307978528369902	0.556931735728504
0.366208874615798	0.343985095099001
0.465233087808565	0.269385346087830
0.643104132107792	
1.000000000000000	
1.873023060424911	
5.048917339522305	
44.766068652715035	
$\frac{1}{2}\sigma_1 = 1.017500000000000 \times 10^3$	$\sigma_2 = 2.049999999999998 \times 10^2$

приведены обычные и симплектические собственные значения матрицы A для $a = 2$.

Четвертый тип. В таблице 4 показаны вычисленные значения обычного и симплектического спектра матрицы Гильберта порядка $n = 6$.

Таблица 3

Спектр A	Симплектический спектр A
0.081014052771005	3.760679401824203
0.317492934337638	3.032667469093142
0.690278532109430	1.960573690404372
1.169169973996227	0.887955848518138
1.715370323453429	0.167043928880881
2.284629676546570	
2.830830026003773	
3.309721467890570	
3.682507065662362	
3.918985947228995	
$\frac{1}{2}\sigma_1 = 29$	$\sigma_2 = 27.999999999999993$

Таблица 4

Спектр A	Симплектический спектр A
0.000000108279948	0.406043213979251
0.000012570757123	0.002078619732553
0.000615748354183	0.000002744925919
0.016321521319876	
0.242360870575209	
1.618899858924340	
$\frac{1}{2}\sigma_1 = 1.339921158086743$	$\sigma_2 = 0.164875412286127$

Список литературы

1. J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems.* — Amer. J. Math. **58**, No. 1 (1936), 141–163.
2. Х. Д. Икрамов, Х. Фассбендер, *О произведении двух косогамильтоновых или двух кососимметричных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 45–51.
3. Х. Д. Икрамов, *О сингулярных числах и полярном разложении оператора в билинейно метрическом пространстве.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **28**, No. 1 (1988), 127–129.

Ikramov Kh. D., Nazari A. M. Symplectic eigenvalues and singular values of symmetric matrices.

Williamson's theorem on the symplectic eigenvalues of symmetric positive definite matrices is interpreted in terms of special operators of the real symplectic space and their spectra. A relation connecting the conventional and symplectic eigenvalues of a given matrix is derived.

Московский государственный
университет, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 1 сентября 2021 г.

Университет Эрака
38156-8-8349 Эрак, Иран
E-mail: a-nazari@araku.ac.ir