Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Х. Д. Икрамов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ И ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ И ИХ ИНВАРИАНТЫ

1. Пусть V_n – вещественное или комплексное арифметическое пространство размерности n. Его элементами будем считать столбцы из n чисел. Квадратные матрицы порядка n рассматриваем, если это нужно, как линейные операторы, действующие в V_n.

Зададим в V_n скалярное произведение правилом

$$\langle x, y\rangle = (Mx, y), \quad x, y \in V_n. \tag{1}$$

Здесь (x, y) обозначает либо евклидово скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, т.е.

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \tag{2}$$

либо унитарное скалярное произведение

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}. \tag{3}$$

Что касается метрической матрицы M, то она предполагается, во-первых, инволютивной, т.е.

$$M^2 = I_n, \tag{4}$$

и, во-вторых, по обстоятельствам, симметричной, кососимметричной либо эрмитовой.

Пространство V_n с произведением (1) называют билинейно метрическим пространством или пространством с индефинитной метрикой. (Используются и другие названия, например, пространство Понтрягина.)

Если $n \times n$-матрица A рассматривается как (линейный) оператор в V_n, то можно говорить об операторе, сопряженном к A. Матрицу, представляющую этот оператор, будем обозначать символом A^M. Она определяется равенством

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^M y\rangle, \quad \forall x, y \in V_n.$$

Ключевые слова: пространства с индефинитной метрикой, конгруэнции, гамильтоновы матрицы, косогамильтоновы матрицы, симплектические матрицы.

Отсюда выводим матричные соотношения:

$$A^M = MA^\top M \tag{5}$$

для произведения (2) и

$$A^M = MA^* M \tag{6}$$

для произведения (3).

2. Понятие сопряженного оператора позволяет ввести классы специальных матриц, играющих в пространстве V_n роль симметричных, кососимметричных и ортогональных операторов в случае произведения (2) и роль эрмитовых и унитарных операторов, если речь идет о произведении (3). Эти матрицы определяются соотношениями

$$S^M = S,\ K^M = -K,\ Q^M Q = I_n. \tag{7}$$

Для произведения (2) определения (7) означают, что

$$MS^\top M = S,\ MK^\top M = -K,\ MQ^\top MQ = I_n. \tag{8}$$

Учитывая, что M есть инволюция, эти определения можно переписать в виде

$$MS = S^\top M,\ MK = -K^\top M,\ Q^\top MQ = M. \tag{9}$$

Условимся называть матрицы, удовлетворяющие этим определениям, соответственно M-симметричными, M-кососимметричными и M-ортогональными. Если M – симметричная инволюция, то первые два соотношения (9) можно прочесть так: матрица S тогда и только тогда M-симметрична, когда произведение MS есть обычная симметричная матрица; M-кососимметричность матрицы K равносильна обычной косой симметрии матрицы MK. Для кососимметричной инволюции M эти соотношения читаются иначе. Первое из них равносильно косой симметрии произведения MS, а второе – обычной симметрии матрицы MK.

В случае произведения (3) первое и третье соотношения (8) заменяются равенствами

$$MS^* M = S,\ MQ^* MQ = I_n,$$

или

$$MS = S^* M,\ Q^* MQ = M. \tag{10}$$

Эти равенства определяют соответственно M-эрмитовы и M-унитарные матрицы.

Предполагая, что инволюция M есть эрмитова матрица, читаем первое равенство в (10) так: матрица S тогда и только тогда M-эрмитова, когда произведение MS есть обычная эрмитова матрица.

3. Как известно, ортогональные (унитарные) подобия сохраняют симметрию и косую симметрию (эрмитовость) матриц. Аналогичными свойствами обладают определенные нами классы специальных матриц. Проверим это, например, для M-симметричных матриц.

Будем считать для определенности, что инволюция M симметрична. Тогда для M-симметричной матрицы S матрица MS симметрична в обычном смысле. Для M-ортогональной матрицы Q третье соотношение в (8) можно переписать в виде

$$Q^{-1} = MQ^{\top}M. \tag{11}$$

Отсюда выводим

$$Q^{-1}SQ = MQ^{\top}(MS)Q.$$

Матрица MS симметрична; вместе с ней симметрична и матрица $Q^{\top}(MS)Q$. Произведение последней с матрицей M есть M-симметричная матрица, т.е. $Q^{-1}SQ$ является M-симметричной матрицей.

4. Термин *конгруэнтное преобразование* (или, короче, *конгруэнция*) понимается в алгебраической литературе двояко: как преобразование

$$A \to P^{\top}AP \tag{12}$$

(так называемая T-конгруэнция) или как

$$A \to P^{*}AP \tag{13}$$

(*-конгруэнция). В обеих этих формулах P – произвольная невырожденная матрица. Очевидно, что T-конгруэнции сохраняют симметрию и косую симметрию матриц, а *-конгруэнции сохраняют свойство матрицы быть эрмитовой.

Если матрица P ортогональна, то T-конгруэнцию (12) можно рассматривать и как подобие. Поэтому характеристический многочлен матрицы есть инвариант выполняемых с ней ортогональных T-конгруэнций, а его корни и коэффициенты суть скалярные инварианты таких конгруэнций. Точно так же *-конгруэнция (13) может рассматриваться как подобие, если P – унитарная матрица. Следовательно, характеристический многочлен матрицы, его корни и его коэффициенты являются инвариантами выполняемых с нею унитарных *-конгруэнций.

Нас интересуют аналоги только что перечисленных фактов для введенных нами классов специальных матриц. Пусть вначале инволюция M симметрична или кососимметрична. Рассмотрим Т-конгруэнцию

$$A \to B = Q^\top AQ, \tag{14}$$

где матрица Q предполагается M-ортогональной, а матрица A может быть симметричной либо кососимметричной в обычном смысле.

Перепишем соотношение (11) в виде

$$Q^\top = MQ^{-1}M$$

и подставим это выражение для $Q^\top$ в матрицу B. Имеем

$$B = Q^\top AQ = (MQ^{-1}M)AQ = MQ^{-1}(MA)Q,$$

или

$$MB = Q^{-1}(MA)Q. \tag{15}$$

Тем самым конгруэнции (14), переводящей A в B, соответствует переход от матрицы MA к матрице MB, совершаемый путем подобия с M-ортогональной матрицей Q. Согласно п. 3, такой переход сохраняет (косую) симметрию матрицы MA, т.е. матрица MB обладает тем же типом M-симметрии, что и MA.

Мы делаем из сказанного следующий важный вывод.

Предложение 1. *Пусть $M^2 = I$ и $M = M^\top$ либо $M = -M^\top$. Если A — симметричная или кососимметричная матрица, то характеристический многочлен матрицы MA есть инвариант Т-конгруэнций* (14) *с произвольными M-ортогональными матрицами Q.*

В случае эрмитовой инволюции M вместо (14) нужно рассматривать *- конгруэнцию

$$A \to B = Q^*AQ. \tag{16}$$

Матрица Q теперь должна быть M-унитарной, а матрица A – эрмитовой. Рассуждая, как выше, приходим к такому аналогу предложения 1.

Предложение 2. *Пусть $M^2 = I$ и $M = M^*$. Если A – эрмитова матрица, то характеристический многочлен матрицы MA есть инвариант *-конгруэнций* (16) *с произвольными M-унитарными матрицами Q.*

5. Проиллюстрируем результаты п. 4 разбором конкретного специального случая. Пусть V_n — пространство четной размерности $n = 2m$. В качестве метрической матрицы M возьмем кососимметричную матрицу

$$M = J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

В определении (1) будем использовать евклидово скалярное произведение (2). В результате получим хорошо известное билинейно метрическое пространство, называемое *симплектическим.* Специальные термины имеются и для J-симметричных, J-кососимметричных и J-ортогональных матриц. Они называются соответственно гамильтоновыми, косогамильтоновыми и симплектическими матрицами.

Пусть A – симметричная или кососимметричная матрица. В соответствии с п 2, матрица JA является гамильтоновой в первом случае и косогамильтоновой во втором. Согласно предложению 1, характеристический многочлен $f(\lambda)$ этой матрицы есть инвариант симплектических конгруэнций, производимых с A. Скалярными инвариантами таких конгруэнций будут коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ и его корни, т.е. собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы JA. Впрочем, те и другие суть соответственно элементарные симметрические функции от чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ньютоновы суммы этих же чисел. Связь между ними хорошо известна.

Положим $n = 4$ и найдем выражение для коэффициента σ при λ^2 в многочлене $f(\lambda)$ через элементы a_{ij} симметричной матрицы A. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

гамильтонова матрица JA выглядит так:

$$JA = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \end{pmatrix}.$$

Искомый коэффициент при λ^2 найдем по хорошо известному правилу, а именно как сумму всех главных миноров второго порядка матрицы JA. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} - a_{13}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} \\ &\quad + a_{12}a_{34} - a_{24}^2 + a_{22}a_{44} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} \\ &= -a_{13}^2 - a_{24}^2 + a_{11}a_{33} + 2a_{12}a_{34} - 2a_{14}a_{23} + a_{22}a_{44}.\end{aligned}$$

Эта величина есть один из скалярных инвариантов симплектических конгруэнций, производимых с симметричными матрицами четвертого порядка.

Если вещественная матрица A четного порядка $n = 2m$ симметрична и положительно определена, то посредством симплектической конгруэнции A может быть приведена к диагональной матрице вида

$$\Lambda = D_m \oplus D_m. \tag{17}$$

Это так называемая теорема Уильямсона (см. [1]). Диагональные элементы $m \times m$-матрицы D_m называют симплектическими собственными значениями матрицы A. Это название не случайно. Гамильтонова матрица $J\Lambda$, соответствующая матрице Λ, имеет вид

$$J\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & D_m \\ -D_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Возводя $J\Lambda$ в квадрат, получаем косогамильтонову матрицу

$$-D_m^2 \oplus -D_m^2.$$

Тем самым симплектические собственные значения $d_{11}, \ldots, d_{mm}$ матрицы A оказываются квадратными корнями из собственных значений косогамильтоновой матрицы $-(J\Lambda)^2$ или, что то же, корнями из собственных значений косогамильтоновой матрицы $-(JA)^2$. Можно рассматривать $d_{11}, \ldots, d_{mm}$ и как модули собственных значений самой гамильтоновой матрицы JA. И в том, и в другом случае понятно применение термина *собственные значения* по отношению к этим числам.

Список литературы

1. J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems.* — Amer. J. Math. **58**, No. 1 (1936), 141–163.

Ikramov Kh. D. Special congruences of symmetric and Hermitian matrices and their invariants.

Let V_n be the arithmetic space of dimension n, and let the inner product be introduced in V_n using a symmetric or a skew-symmetric involution M. In the resulting indefinite metric space, one can define the classes of special matrices playing the parts of symmetric, skew-symmetric, and orthogonal operators. We say that such matrices are M-symmetric, M-skew-symmetric, and M-orthogonal, respectively. The invariants of M-orthogonal congruences performed with M-symmetric and M-skew-symmetric matrices are indicated. A Hermitian counterpart of these constructions is also discussed.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 14 сентября 2021 г.