Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

**Х. Д. Икрамов**

# О МАТРИЦАХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СТРОКАМИ И СТОЛБЦАМИ

**1.** Пусть $A$ – комплексная $n \times n$-матрица. Что можно сказать об $A$, если ее строки попарно ортогональны и то же верно для ее столбцов? Иначе говоря, для $A$ выполнены соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{jk}} = 0, \qquad i \neq j, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a_{kj}} = 0, \qquad i \neq j. \tag{2}$$

Хорошо известным примером таких матриц $A$ являются унитарные матрицы и их скалярные кратные. Но существуют и другие матрицы этого типа, например, жорданова клетка $J_n(0)$ с нулем на главной диагонали, а также матрицы, получаемые из $J_n(0)$ произвольными перестановками строк и столбцов. А имеются ли, помимо унитарных, *невырожденные* матрицы $A$, удовлетворяющие условиям (1) и (2)?

Для ответа на этот вопрос обозначим евклидовы длины строк и столбцов матрицы $A$ соответственно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$. Положим

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad M = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Теперь соотношения (1) и (2) можно переписать в матричной форме:

$$AA^* = \Lambda^2, \tag{3}$$

$$A^*A = M^2. \tag{4}$$

Таким образом, матрицы $\Lambda^2$ и $M^2$ составлены из собственных значений матриц $AA^*$ и $A^*A$. Но, как хорошо известно, две последние матрицы имеют одни и те же собственные значения. Отсюда следует, что неотрицательные матрицы $\Lambda$ и $M$ получаются одна из другой посредством симметричной перестановки строк и столбцов:

$$M = P^\top \Lambda P. \tag{5}$$

Здесь $P$ – это матрица-перестановка.

*Ключевые слова*: нормальные матрицы, бинормальные матрицы, конгруэнции, коквадраты, юнитоидные матрицы.

В частном случае $P = I_n$ имеем $M = \Lambda$ и $AA^* = A^*A$, т.е. $A$ – нормальная матрица. Даже в этом случае $A$ не обязана быть скалярным кратным унитарной матрицы. Например, $A$ может быть матрицей вида

$$A = \alpha Q_k \oplus \beta Q_{n-k}, \qquad \alpha \neq \beta,\ 1 \leqslant k < n,$$

где $Q_k$ и $Q_{n-k}$ – унитарные матрицы порядков соответственно $k$ и $n-k$.

**2.** Рассмотрим другой интересный частный случай: числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различны, а последовательность $\mu_1, \dots, \mu_n$ получается из $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ циклическим сдвигом:

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \lambda_1). \tag{6}$$

Умножая на $A$ равенство (3) справа, а равенство (4) слева, имеем

$$\Lambda^2 A = AM^2.$$

Отсюда выводим

$$a_{ij}(\lambda_i^2 - \mu_j^2) = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j. \tag{7}$$

Для последовательностей (6) это означает, что элементы (невырожденной) матрицы $A$ отличны от нуля только в позициях $(1, n)$, $(2, 1)$, $(3, 2), \dots, (n, n-1)$, т.е. $A$ – матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если не все ненулевые элементы этой матрицы имеют одинаковые модули, то $A$ не является скалярным кратным унитарной матрицы.

**3.** Исследуем при $n = 3$ более сложную ситуацию, когда среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ есть кратные:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha, \beta, \beta). \tag{9}$$

Положим

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\beta, \alpha, \beta). \tag{10}$$

Теперь соотношения (7) приводят к матрице $A$ вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Согласно равенству (3), должно быть:

$$|a_{21}|^2 + |a_{23}|^2 = \beta^2 = |a_{31}|^2 + |a_{33}|^2,$$

$$a_{21}\overline{a_{31}} + a_{23}\overline{a_{33}} = 0.$$

Это означает, что подматрица

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

лишь множителем $\beta$ отличается от унитарной $2 \times 2$-матрицы. Так как $|a_{12}| = \alpha$, то при $\alpha \neq \beta$ матрица $A$ в целом не является скалярным кратным унитарной матрицы.

**4.** Обсудим приложения сказанного в п. 1–3 к задаче об условиях юнитоидности бинормальной матрицы. Напомним, что бинормальной называется квадратная матрица $A$, для которой матрицы $AA^*$ и $A^*A$ коммутируют. Разумеется, бинормальными являются все нормальные матрицы, но существуют и анормальные бинормальные матрицы. Бинормальна, в частности, жорданова клетка $J_n(0)$, для которой оба произведения $J_n(0)(J_n(0))^\top$ и $(J_n(0))^\top J_n(0)$ суть диагональные матрицы.

Юнитоидной называется квадратная матрица, которая может быть приведена к диагональному виду конгруэнцией, понимаемой как преобразование вида

$$A \to V^*AV,$$

где $V$ – произвольная невырожденная матрица. Юнитоидны, например, все нормальные матрицы, приводимые к диагональному виду посредством унитарных матриц $V$.

Если матрица $A$ невырожденная, то ей можно сопоставить матрицу

$$C_A = A^{-*}A. \tag{12}$$

Она называется коквадратом матрицы $A$. Для юнитоидности матрицы $A$ необходимо и достаточно, чтобы ее коквадрат $C_A$ был приводим к диагональному виду посредством подобия, а спектр $C_A$ лежал бы на единичной окружности. Это следует из теории преобразований конгруэнции, как она изложена в [1, §4.5].

Пусть $A$ – (невырожденная) бинормальная матрица, т.е.

$$(AA^*)(A^*A) = (A^*A)(AA^*).$$

Коммутирующие эрмитовы матрицы $AA^*$ и $A^*A$ имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов. Преобразуем матрицы

$A$, $AA^*$ и $A^*A$ к этому базису, обозначив унитарную матрицу перехода через $U$:

$$\begin{aligned} &A \to B = U^*AU, \\ &AA^* \to BB^* = U^*(AA^*)U, \\ &A^*A \to B^*B = U^*(A^*A)U. \end{aligned}$$

Матрицы $AA^*$ и $A^*A$ положительно определены, поэтому их диагональные формы $BB^*$ и $B^*B$ можно обозначить как квадраты неотрицательных диагональных матриц $\Lambda$ и $M$. Для бинормальной матрицы $B$ получаем соотношения, аналогичные (3) и (4):

$$BB^* = \Lambda^2, \quad B^*B = M^2.$$

Предположим, что для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ выполнено условие (6). Тогда $B$ имеет вид матрицы (8). Запишем $B$ как

$$B = WD, \tag{13}$$

где

$$D = \operatorname{diag}(|b_{21}|, |b_{32}|, \ldots, |b_{n,n-1}|, |b_{1n}|), \tag{14}$$

а $W$ – унитарная матрица того же строения, что и $B$, причем

$$w_{21} = \frac{b_{21}}{|b_{21}|},\ w_{32} = \frac{b_{32}}{|b_{32}|},\ \ldots,\ w_{1n} = \frac{b_{1n}}{|b_{1n}|}. \tag{15}$$

Для матрицы (13) имеем $B^{-*} = WD^{-1}$ и $C_B = WD^{-1}WD$. Найдем вид этой матрицы:

$$\begin{aligned} C_B &= (WD^{-1})(WD) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{w_{1n}}{d_n} \\ \frac{w_{21}}{d_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w_{32}}{d_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{w_{n,n-1}}{d_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n w_{1n} \\ d_1 w_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 w_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} w_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n,n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$c_{1,n-1} = w_{1n} w_{n,n-1} \frac{d_{n-1}}{d_n}, \quad c_{2n} = w_{1n} w_{21} \frac{d_n}{d_1},$$

$$c_{31} = w_{21} w_{32} \frac{d_1}{d_2}, \tag{16}$$

$$c_{42} = w_{32} w_{43} \frac{d_2}{d_3}, \ \ldots, \ c_{n,n-2} = w_{n-1,n-2} w_{n,n-1} \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}}. \tag{17}$$

Коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)$ матрицы $C_B$ вычислим, пользуясь хорошо известным правилом: коэффициент при $\lambda^k$ с точностью до знака есть сумма всех главных миноров порядка $n-k$ этой матрицы. Все диагональные элементы в $C_B$ равны нулю. Равны нулю и все главные миноры порядка $m$, где $1 < m < n$: в каждом из них есть нулевая строка либо нулевой столбец. Что касается определителя, то из формул (16)–(17) видно, что

$$\det C_B = w_{1n}^2 w_{21}^2 w_{32}^2 \cdots w_{n,n-1}^2.$$

Согласно (15), все сомножители правой части равны единице по модулю, поэтому и $d = \det C_B$ имеет модуль 1. Таким образом, многочлен $f(\lambda) = \det(C_B - \lambda I_n)$ есть $(-1)^n \lambda^n + d$. Все его корни лежат на единичной окружности; следовательно, матрица $B$ и исходная матрица $A$ юнитоидны.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно рассматривать как сингулярные числа матрицы $A$. Поэтому разобранная нами ситуация приводит к такому достаточному условию юнитоидности бинормальной матрицы.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ – невырожденная бинормальная матрица с попарно различными сингулярными числами. Если в общем базисе из собственных векторов матриц $AA^*$ и $A^*A$ их собственные значения удовлетворяют соотношению* (6)*, то матрица $A$ юнитоидна.*

**5.** В заключение рассмотрим противоположный случай бинормальной, но не юнитоидной матрицы. Пусть $n = 3$ и выполнено соотношение

(10). Бинормальную матрицу (11) запишем в виде $A = WD$, где

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & 0 \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & 0 & w_{33} \end{pmatrix}$$

– унитарная матрица, а $D$ – матрица нормирующих множителей:

$$d_1 = d_3 = \beta, \quad d_2 = |a_{12}| = \alpha.$$

Здесь $\beta$ – положительный множитель, которым подматрица

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

отличается от унитарной $2 \times 2$-матрицы.

Коквадрат $C_A$ есть произведение

$$C_A = (WD^{-1})(WD) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{w_{12}}{\alpha} & 0 \\ \frac{w_{21}}{\beta} & 0 & \frac{w_{23}}{\beta} \\ \frac{w_{31}}{\beta} & 0 & \frac{w_{33}}{\beta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \alpha w_{12} & 0 \\ \beta w_{21} & 0 & \beta w_{23} \\ \beta w_{31} & 0 & \beta w_{33} \end{pmatrix}.$$

След этого произведения равен

$$\mathrm{tr}\; C_A = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) w_{12} w_{21} + w_{33}^2.$$

Положим $w_{12} = 1$, $\beta = 1$,

$$\begin{pmatrix} w_{21} & w_{23} \\ w_{31} & w_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{tr}\; C_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}.$$

При $\alpha > \frac{5}{\sqrt{2}}$ след коквадрата заведомо больше 3, откуда следует, что все три собственные значения матрицы $C_A$ не могут лежать на единичной окружности, так что $A$ не может быть юнитоидной матрицей.

## Список литературы

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013.

Ikramov Kh. D. On matrices with pairwise orthogonal rows and columns.

We discuss possible forms of square matrices whose rows are pairwise orthogonal and the same is true of their columns. This discussion is applied to the problem of conditions under which a nonsingular binormal matrix is unitoid. A square matrix $A$ is said to be binormal if the matrices $AA^*$ and $A^*A$ commute. A square matrix is said to be unitoid if it can be brought to diagonal form by a (Hermitian) congruence.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
*E-mail*: `ikramov@cs.msu.su`

Поступило 21 сентября 2021 г.