Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

А. Э. Гутерман, Е. М. Крейнес, Н. В. Остроухова

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СБОРНОГО ЧИСЛА 4-РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА

§1. Введение

Сборные графы используются при изучении свойств рекомбинации ДНК простейших микроорганизмов, см. [1,2] и библиографию этих работ. Сборное число простого сборного графа позволяет предположить, какое минимальное число участков ДНК может появиться, если при конъюгации двух хромосом реализуется именно заданная конфигурация.

Помимо привычной нам информации о комбинаторной структуре графа – отношении инцидентности для его ребер и вершин – сборные графы также хранят в себе сведения о возможной пространственной структуре ребер в каждой из вершин, а именно, их циклическом порядке или отношении соседства двух ребер в вершине, аналогичной широко известным понятиям ленточного графа или карты, см. [6]. Интересно, что некоторые виды сборных графов – простые сборные графы – можно достаточно хорошо изучать, не визуализируя графически сам объект. В работе [3] был рассмотрен способ передать локальную топологическую структуру графа и сведения о соседях ребра в данной вершине, используя матрицу инцидентности, записанную специальным образом. Еще один вид матричной интерпретации сборных слов специального вида, а, значит, и сборных графов, можно найти в [7]. Подробнее о роли сборных слов в изучении ДНК живых организмов можно прочесть в [2, 5]. Настоящая работа по большей части использует представление простого сборного графа в виде 2-слова.

Исследованию сборных графов и их числовых и комбинаторных характеристик посвящен ряд работ, см. [1–3] и их библиографию. В частности, в работе [1] сформулирован ряд гипотез об оценках и экстремальных значениях так называемого сборного числа графа и связанных с ним инвариантов.

Ключевые слова: сборные графы, 2-слова, сборное число.
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

Основной целью представленной работы является изучение общих свойств сборного числа, в частности, возможности увеличить сборное число при добавлении минимального числа вершин. Предложен критерий увеличения сборного числа на 1 при добавлении петли на ребро. Доказано, что для увеличения на 1 сборного числа так называемого петельного графа необходимо добавить как минимум 3 петли на его ребра и предложен алгоритм выбора соответствующих ребер. Изучены преобразования графа, превращающие его в двусторонне аддитивный.

Во втором параграфе вводятся основные определения и обозначения. В §3 определено сборное число графа и исследуются различные преобразования графа, позволяющие увеличить сборное число или превратить граф в двусторонне аддитивный. В §4 определяется петельный граф и исследуются его свойства. В §5 изучается рост сборного числа при преобразованиях петельного графа.

§2. Понятие сборного графа и сборного слова

Рассматриваются конечные связные графы, обладающие рядом специальных свойств, в частности, допустимо наличие петель и кратных ребер. Основные используемые далее понятия введены в работах [1,2]. Приведем здесь необходимые определения для полноты изложения.

Пусть Γ – конечный граф. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей ребер, где петля считается дважды, иначе говоря, число концов инцидентных ей ребер. Для всех концов ребер, инцидентных данной вершине, зададим *циклический порядок*, т.е. укажем, какой конец за каким следует. Все циклические сдвиги набора $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ считаются идентичными. Также принято отождествлять порядок, заданный набором $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$, и обратный ему, т.е. заданный набором $(e_{i_n}, \ldots, e_{i_1})$ или его циклическими сдвигами. Вершина, в которой задан циклический порядок на концах инцидентных ей ребер, называется *упорядоченной* или *регулярной*.

Введем на множестве концов ребер понятие соседства. Пусть дана вершина v и этой вершине инцидентны следующие концы ребер: $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, при этом, возможно, некоторые из них являются различными концами одного ребра. Допустим, что циклический порядок на концах ребер задан последовательностью $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$. В этом случае мы будем говорить, что ребро e_i является *соседом* ребра e_{i+1} в вершине v, $i = 1, \ldots, n-1$, а *соседом* ребра e_n в вершине v является ребро e_1. На рис. 1 представлена регулярная вершина степени 4. Обычно, при наличии изображения графа, считается, что циклический порядок в каждой вершине задан графически: концы ребер, являющиеся соседними на рисунке, являются соседями и в вершине.

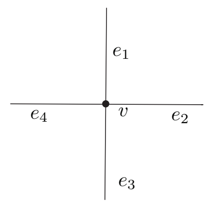


Рис. 1. Регулярная вершина степени 4.

Заметим, что в случае 4-регулярной вершины для каждого конца ребра, инцидентного данной вершине, существует ровно один конец ребра, не являющийся соседним с ним в этой вершине, и ровно два соседние конца.

Теперь можно определить сборный граф. Конечный связный граф, в котором все вершины регулярные и имеют степень 1 или 4, называется *сборным графом*. Вершина степени 1 называется концевой. *Размер* графа Γ, обозначаемый $|\Gamma|$, – это число 4-регулярных вершин в нем. Граф называется тривиальным, если $|\Gamma| = 0$.

Путем в графе называется последовательность из чередующихся вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине, такая что ребра в этой последовательности инцидентны вершинам, соседствующим с ними в этой последовательности. В случае, если в пути присутствует только одна вершина, он называется *одноточечным*.

Поскольку отношение соседства для концов ребер, инцидентных общей вершине, задано, пути в графе также можно рассматривать с точки зрения соседства входящих в них ребер. *Трансверсаль* или *трансверсальный путь* – это путь, в котором все ребра попарно различны и подряд идущие ребра пути не являются соседними в их общей вершине. Таким образом, чтобы трансверсальный путь мог пройти по петле, концы петли должны быть соседями в смысле введенных определений. *Полигональный путь* – это путь, в котором все вершины попарно различны, и подряд идущие ребра являются соседними в инцидентной им обоим вершине.

Сборный граф, в котором существует эйлеров, т.е. проходящий через все ребра графа, трансверсальный путь, называется *простым сборным графом.* Для выбранной эйлеровой трансверсали можно зафиксировать направление, в котором она проходится, получив таким образом ориентированный простой сборный граф.

Из определения эйлеровости непосредственно вытекает, что в простом сборном графе либо есть две концевые вершины, либо их нет вовсе. В случае наличия двух концевых вершин, эйлеров трансверсальный путь начинается в одной из них, назовем ее начальной вершиной и обозначим i, а заканчивается в другой, обозначим ее t.

Рассмотрим ребра (u, v) и (u, w) эйлеровой трансверсали простого сборного графа. Если эти ребра идут подряд в трансверсали, т.е., например, из вершины v трансверсаль попадает в вершину u, а затем в вершину w, то ребра (u, v) и (u, w) не являются соседями в их общей вершине u. Если же ребра (u, v) и (u, w) разнесены на трансверсали, т.е. не проходятся подряд, то они, наоборот, являются соседями в их общей вершине u.

Далее, если не указано обратное, все графы считаются простыми сборными графами с двумя концевыми вершинами.

Сборным словом или 2-словом в алфавите $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ называется слово, в котором каждый из символов алфавита либо встречается ровно дважды, либо не встречается вовсе. Обратным к слову $\omega = a_1 \dots a_k$ называется слово $\omega^R = a_k \dots a_1$. Два сборных слова *эквивалентны*, если после замены букв они совпадают или одно является обратным для другого.

Пример 2.1. Сборное слово $\omega = 1221$ совпадает со своим обратным, тогда как слово $\omega' = 213132$ совпадет с обратным к нему, если заменить символ 1 на 3, а символ 3 на 1.

Пусть Γ – простой сборный граф, а i – его начальная вершина. Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – множество 4-регулярных вершин Γ (i и t не принадлежат V). Начнем с вершины i и будем двигаться по трансверсали, записывая вершины Γ в том порядке, в котором их встречаем. В результате получим 2-слово в алфавите V. Таким образом, простой сборный граф порождает сборное слово.

Чаще всего простые сборные графы представляют сборными словами, записанными в порядке неубывания номеров букв в алфавите.

Первую из встретившихся на трансверсали вершин обозначим буквой 1, вторую – 2, если она отличается от первой. Каждый раз, встречая вершину, в которой уже побывали, будем записывать номер, который присвоили ей в прошлый раз. Каждой впервые встретившейся вершине присваиваем наименьший натуральный номер из еще не использованных. Наоборот, по сборному слову можно воссоздать простой сборный граф. Процесс подробно описан в работе [3]. Известно, см. [1, лемма 3.8], что классы эквивалентности сборных слов находятся в биективном соответствии с классами изоморфизма простых сборных графов. Напомним, что сборные графы называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая как отношение инцидентности, так и циклический порядок концов ребер в каждой вершине.

Простой сборный граф, соответствующий сборному слову ω, обозначим через Γ_ω. Пустое слово ϵ соответствует тривиальному графу, в котором есть только вершины i и t и соединяющее их ребро.

Композиция $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ двух направленных простых сборных графов Γ_1 и Γ_2 – это граф, получаемый в результате отождествления конечной вершины графа Γ_1 и начальной вершины графа Γ_2. Для любых двух сборных слов ω_1 и ω_2 имеем: $\Gamma_{\omega_1} \circ \Gamma_{\omega_2} = \Gamma_{\omega_1\omega_2}$. Отметим также, что, вообще говоря, графы $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ не изоморфны.

§3. Сборные числа

В этом параграфе рассматриваются преобразования простых сборных графов, позволяющие увеличить сборное число.

Напомним некоторые определения и свойства, введенные и доказанные в работе [1]. Рассматриваются множества непересекающихся, т.е. не имеющих общих вершин, полигональных путей, которые в совокупности покрывают все вершины сборного графа. Более точно, множество $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ попарно непересекающихся полигональных путей в Γ называется *гамильтоновым*, если объединение этих путей содержит все 4-регулярные вершины графа Γ. Например, множество всех 4-регулярных вершин сборного графа $V(\Gamma)$ будет гамильтоновым множеством одноточечных путей. Полигональный путь γ называется гамильтоновым, если множество $\{\gamma\}$ гамильтоново.

Пусть Γ – нетривиальный сборный граф.

Определение 3.1 ([1, определение 4.4])**.** *Сборным числом* графа Γ называется минимальная мощность $\mathrm{An}(\Gamma)$ гамильтонова множества полигональных путей.

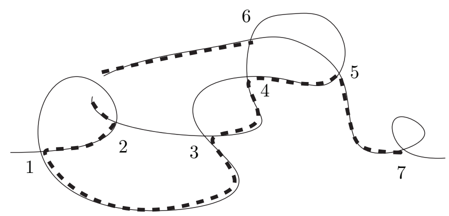


Рис. 2. Пример графа со сборным словом 12134564326577 и сборным числом 1.

Лемма 3.2 ([1, лемма 4.6])**.** *Для любой пары ориентированных простых сборных графов* Γ_1, Γ_2 *справедливо либо равенство* $\mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma_2)$, *либо равенство* $\mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma_2) - 1$.

Это утверждение позволяет использовать композицию в качестве одного из средств для увеличения сборного числа графа.

Напомним понятие аддитивного сборного графа.

Определение 3.3 ([2, определение 5.7])**.** Сборный граф Γ называется *аддитивным слева* (соответственно, справа), если для любого сборного графа Γ' выполнено:

$\mathrm{An}(\Gamma \circ \Gamma') = \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma')$ (соответственно, $\mathrm{An}(\Gamma' \circ \Gamma) = \mathrm{An}(\Gamma') + \mathrm{An}(\Gamma)$).

Если сборный граф является аддитивным и слева, и справа, то он называется *аддитивным. Двусторонне аддитивным* называется такой сборный граф Γ, что для любых сборных графов Γ_1 и Γ_2 выполнено равенство

$$\mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma \circ \Gamma_2) = \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma_2).$$

Двусторонне аддитивный граф является одновременно аддитивным слева и справа, однако обратное неверно.

Из утверждения ниже следует, что достаточно проверить аддитивность для композиции с петлей Γ_{ww}, соответствующей сборному слову ww, см. рис. 3.

Лемма 3.4 ([2, лемма 5.11]). *Пусть* Γ – *простой сборный граф. Тогда*:

- Γ *аддитивен справа, если и только если*
$$\mathrm{An}(\Gamma_{ww} \circ \Gamma) = \mathrm{An}(\Gamma) + 1,$$
- Γ *аддитивен слева, если и только если* $\mathrm{An}(\Gamma \circ \Gamma_{ww}) = \mathrm{An}(\Gamma) + 1$,
- Γ *является двусторонне аддитивным, если и только если*
$$\mathrm{An}(\Gamma_{ww} \circ \Gamma \circ \Gamma_{w'w'}) = \mathrm{An}(\Gamma) + 2.$$

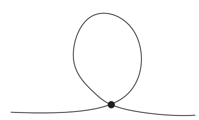


Рис. 3. Граф-петля Γ_{ww}.

В дальнейшем нам потребуется операция добавления петли на ребро сборного графа. Зададим ее при помощи 2-слов. Пусть w – буква, не используемая в 2-слове рассматриваемого графа. Тогда добавление петли w на ребро (u, v) означает замену ребра (u, v) на граф Γ_{ww}, т.е. (u, v) удаляется, а вместо него добавляются ребра $(u, w), (w, w), (w, v)$. В терминах сборного слова это означает, что новую букву вставляют в сборное слово между вхождениями букв u и v, соответствующими ребру (u, v), т.е. слово $\ldots uv \ldots$ заменяется на слово $\ldots uwwv \ldots$. При необходимости вершины далее переобозначаются для того, чтобы первые вхождения букв следовали в порядке возрастания. На рис. 4 приведен пример добавления петли на первое из ребер $(1, 2)$ трансверсали графа со сборным словом 1212.

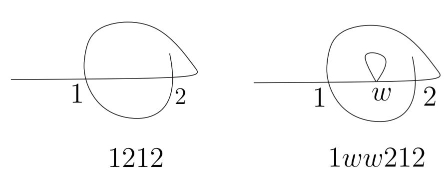


Рис. 4. Добавление петли w на ребро 12 графа Γ_{1212}.

Заметим, что сборное число можно искусственным образом увеличить, если “заставить” полигональные пути идти по определенным ребрам. Пример воплощения этой идеи приведен в [2], где рассматривается добавление петли на каждое из ребер сборного графа – операция полной петельной подстановки. В таком случае, полигональные пути в полученном графе вынужденно идут по добавленным петлям. Сборное число полученного графа возрастает, становясь на единицу больше числа вершин исходного графа. Однако и число вершин полученного графа утраивается по сравнению с исходным графом. Преобразуем технику из [2] и будем добавлять петли не на все ребра сразу, а лишь на некоторые.

Предложение 3.5. *Пусть* Γ *– простой сборный граф,* $|\Gamma| = n$, $\mathrm{An}(\Gamma) = k$, e *– ребро* Γ, *инцидентное вершинам* u *и* v *(возможно,* $u = v$*). Предположим, что каждый путь* γ *любого из минимальных гамильтоновых множеств полигональных путей удовлетворяет следующим условиям:*

- γ *не содержит* e*;*
- γ *не завершается в вершине* u *ребром, соседним в ней с ребром* e;
- γ *не завершается в вершине* v *ребром, соседним в ней с ребром* e;
- γ *не является одноточечным путем из единственной вершины* u *или единственной вершины* v.

Тогда, добавляя на ребро e *петлю* w, *получим граф* Γ' *со сборным числом* $\mathrm{An}(G') = k + 1$.

Доказательство. 1. Сперва покажем, что в Γ' есть гамильтоново множество полигональных путей не более чем из $k + 1$ элемента.

Действительно, в исходном графе существует некоторое гамильтоново множество $\mathbf{s}_1$ полигональных путей из k элементов, причем ни один путь не проходит по ребру e. Тогда, добавив к $\mathbf{s}_1$ одноточечный путь w, получим гамильтоново множество полигональных путей в Γ', состоящее из $k + 1$ элементов. Отсюда $\mathrm{An}(\Gamma') \leqslant k + 1$.

2. Теперь докажем от противного, что $\mathrm{An}(\Gamma') \neq k$.

Допустим, что после добавления петли граф все еще имеет сборное число $\mathrm{An}(\Gamma') = k$. В частности, это означает, что в некотором минимальном гамильтоновом множестве полигональных путей $\mathbf{s} =$

$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ графа Γ' существует полигональный путь γ_i, проходящий через вершину w.

Рассмотрим возможные конфигурации пути γ_i: это может быть одноточечный путь; путь, завершающийся (или начинающийся) в вершине w; путь, проходящий через w, но не завершающийся в ней. Заметим, что γ_i не может проходить по добавленному ребру-петле в вершине w, иначе γ_i проходил бы через вершину w дважды, т.е., не был бы полигональным. Также γ_i не может быть одноточечным путем, иначе существовало бы гамильтоново множество из $k-1$ полигональных путей в Γ, противоречие с $\mathrm{An}(\Gamma) = k$.

Тогда по пути γ_i можно построить в графе Γ полигональный путь γ_i^0, проходящий только по вершинам графа Γ. Сделаем это следующим образом: если путь γ_i завершается или начинается вершиной w, удалим из него и вершину w, и инцидентное ей ребро. Если же путь γ_i проходит через w, значит, он содержит ребра (u, w) и (w, v) графа Γ'. Такие ребра можно заменить на ребро e исходного графа Γ. Получаем полигональный путь γ_i^0 в Γ.

Рассмотрим множество $\mathbf{s}^0 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i^0, \ldots, \gamma_k\}$, которое содержит вместо пути γ_i путь γ_i^0. По своему определению множество $\mathbf{s}^0$ является гамильтоновым множеством из k полигональных путей в Γ. При этом существование $\mathbf{s}^0$ противоречит условию. Действительно, пусть γ_i начинается или завершается вершиной w. Если γ_i содержит более одного ребра, то по своему определению γ_i^0 завершается в одной из вершин u или v ребром, соседним с e в этой вершине. Если $\gamma_i = (u, w)$ (или $\gamma_i = (w, v)$), то γ_i^0 – одноточечный путь из единственной вершины u (или v). Если же путь γ_i проходит через вершину w, но не завершается ей, то путь γ_i^0 в исходном графе проходит по ребру e. Таким образом, в каждом случае получено противоречие с условием.

Следовательно, существование пути γ_i, проходящего через вершину w, в случае $\mathrm{An}(\Gamma') = k$ невозможно, поэтому $\mathrm{An}(\Gamma') = k + 1$. $\square$

Пример 3.6. Рассмотрим граф со сборным словом 11223344. В нем всего один гамильтонов полигональный путь, причем он не проходит по петле в вершине 2 и не заканчивается в вершине 2 соседним с этой петлей ребром.

На самом деле, как показывает следующее предложение, предыдущее предложение описывает единственный возможный способ увеличить сборное число графа при помощи добавления петли.

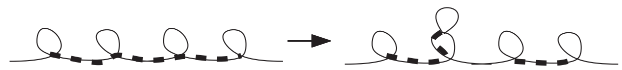


Рис. 5. Увеличение сборного числа при добавлении петли.

Предложение 3.7. *Пусть простой сборный граф* Γ' *получен из простого сборного графа* Γ, $\mathrm{An}(\Gamma) = k$, *добавлением петли* w *на некоторое ребро* (u, v). *Тогда* $\mathrm{An}(\Gamma') \in \{\mathrm{An}(\Gamma), \mathrm{An}(\Gamma) + 1\}$, *и равенство* $\mathrm{An}(\Gamma') = \mathrm{An}(\Gamma) + 1$ *выполняется тогда и только тогда, когда выполнены условия предложения* 3.5.

Доказательство. Неравенство $\mathrm{An}(\Gamma') \geqslant \mathrm{An}(\Gamma)$ следует непосредственно из определения сборного числа графа Γ как минимального размера гамильтонова множества полигональных путей.

Для доказательства неравенства $\mathrm{An}(\Gamma') \leqslant \mathrm{An}(\Gamma) + 1$ заметим, что если минимальное гамильтоново множество $\mathbf{s}$ полигональных путей в Γ содержит путь γ, проходящий по ребру (u, v), то, заменяя ребро (u, v) парой ребер (u, w), (w, v), получим путь γ' в Γ' и, следовательно, гамильтоново множество полигональных путей в Γ' той же мощности. А если множество $\mathbf{s}$ не содержит путь, проходящий по ребру (u, v), то добавление к $\mathbf{s}$ одноточечного пути, состоящего из вершины w, превращает его в гамильтоново множество полигональных путей в Γ'.

Рассмотрим все минимальные гамильтоновы множества полигональных путей в графе Γ. Если условия предложения 3.5 выполнены, то $\mathrm{An}(\Gamma') = \mathrm{An}(\Gamma) + 1$. Докажем обратное.

Предположим, что минимальное гамильтоново множество полигональных путей $\mathbf{s^0} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_k\}$ графа Γ содержит путь γ_i со свойствами, нарушающими условия предложения 3.5. Покажем, что тогда существует гамильтоново множество полигональных путей в Γ', состоящее из k элементов.

1. Если $\gamma_i \in \mathbf{s^0}$ проходит по ребру (u, v), то рассмотрим полигональный путь γ_i' в графе Γ', получающийся заменой ребра (u, v) парой ребер (u, w), (w, v).

2. Если γ_i заканчивается в вершине u ребром l, соседним с ребром (u, v) в вершине u, то рассмотрим полигональный путь γ_i' в Γ', продолжив путь γ_i ребром (u, w), являющимся соседним с ребром (u, v) в вершине u. Аналогично для вершины v, в этом случае γ_i продолжается ребром (w, v), соседним с ребром (u, v) в вершине v.

3. Если γ_i – одноточечный путь из единственной вершины u или v, соединим его с вершиной w ребром (u, w) или (w, v), снова получая полигональный путь γ_i'.

В каждом случае рассмотрим множество $\mathbf{s} = \big(\mathbf{s}^0 \setminus \{\gamma_i\}\big) \cup \{\gamma_i'\}$ – гамильтоново множество полигональных путей в Γ', откуда следует, что $\mathrm{An}(\Gamma') = k$. □

Заметим, что помимо добавления петель возможны и другие способы изменить сборное слово подстановкой новых символов. В [4] рассмотрены операции вставки возвратных и повторных паттернов в сборное слово, причем акцент делается на классах эквивалентности получаемых таким образом слов, а не на сборных числах и не на аддитивности. Однако можно рассматривать упомянутые операции и с точки зрения влияния на сборное число получаемого графа. Рассмотрим возможные способы построить двусторонне аддитивный граф, используя заданный граф.

Предложение 3.8. *Пусть простые сборные графы Γ_1, Γ_2 двусторонне аддитивны, а граф Γ – произвольный простой сборный граф. Тогда композиция $\Gamma_1 \circ \Gamma \circ \Gamma_2$ является двусторонне аддитивным сборным графом со сборным числом $\mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma_2)$.*

Доказательство. Для начала, поскольку графы Γ_1 и Γ_2 двусторонне аддитивны, каждый из них является аддитивным слева и справа. Таким образом, можно записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma \circ \Gamma_2) &= \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma \circ \Gamma_2)\\ &= \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma_2).\end{aligned}$$

Наконец, для композиции с петлями:

$$\begin{aligned}&\mathrm{An}(\Gamma_{aa} \circ \Gamma_1 \circ \Gamma \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_{bb}) = 1 + \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_{bb})\\ &\quad = 1 + \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma_2) + 1 = \mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma \circ \Gamma_2) + 2.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно лемме 3.4, композиция из условия является двусторонне аддитивной со сборным числом $\mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma) + \mathrm{An}(\Gamma_2)$. □

Следствие 3.9. *Пусть простые сборные графы Γ_1, Γ_2 двусторонне аддитивны. Тогда композиция $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ двусторонне аддитивна, причем $\mathrm{An}(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \mathrm{An}(\Gamma_1) + \mathrm{An}(\Gamma_2)$.*

Предложение 3.10. *Пусть простой сборный граф* $\widehat{\Gamma}$ *может быть представлен как* $\widehat{\Gamma} = \Gamma_{122133} \circ \Gamma_\omega \circ \Gamma_{445665}$, *где* ω *– сборное слово, не содержащее символы* $1, 2, 3, 4, 5, 6$, *см. верхнюю часть рис.* 6. *Тогда этот граф является двусторонне аддитивным.*

Доказательство. Пусть сборное число графа $\widehat{\Gamma}$ равно k. Воспользуемся леммой 3.4. Рассмотрим композицию с петлями $\Gamma_{aa} \circ \widehat{\Gamma} \circ \Gamma_{bb}$ и гамильтоново множество $\mathbf{s}$ полигональных путей в этой композиции. В случае если $\mathbf{s}$ содержит два одноточечных пути a и b, во всем множестве будет $k+2$ пути (иначе $\mathrm{An}(\widehat{\Gamma}) \neq k$).

Теперь предположим, что одна из добавленных петель, например (без ограничения общности), петля a, принадлежит некоторому полигональному пути γ_i, который не является одноточечным. Если вершина 2 является одноточечным путем, то можно заменить ребро $(a, 1)$ в γ_i на ребро $(1, 2)$, т.е. первое по порядку ребро эйлеровой трансверсали графа $\Gamma_{aa} \circ \widehat{\Gamma} \circ \Gamma_{bb}$, соединяющее вершины 1 и 2. А именно, эйлерова трансверсаль записывается как

$$\{(a, a), (a, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (2, 3), \ldots, (b, b)\},$$

причем ребра $(a, 1)$ и $(1, 3)$ являются соседями в вершине 1, так же как и $(1, 2)$ и $(1, 3)$.

Тогда замена $(a, 1)$ на $(1, 2)$ в γ_i не изменяет числа путей в $\mathbf{s}$, но превращает его в множество, содержащее одноточечный путь a.

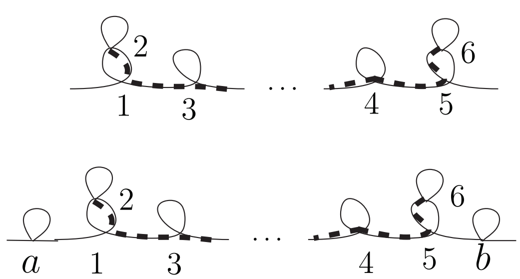


Рис. 6. Добавление петель к двусторонне аддитивному графу.

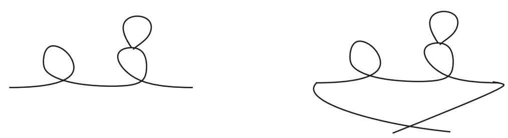
В том случае, когда одноточечный путь 2 отсутствует, в $\mathbf{s}$ существует полигональный путь, содержащий ребра $(a, 1)$ и $(2, 1)$. Тогда можно заменить ребро $(a,1)$ на ребро $(1,3)$, а ребро $(2,1)$ – на ребро $(1,2)$, присоединяя вершины 1 и 2 к пути, который заканчивается в вершине 3. Такая замена не изменяет число путей в $\mathbf{s}$, но превращает его в множество, содержащее одноточечный путь a.

Итак, можно, не изменяя числа путей, превратить любое гамильтоново множество полигональных путей в графе $\Gamma_{aa} \circ \widehat{\Gamma} \circ \Gamma_{bb}$ в множество путей, содержащее одноточечные пути a и b, см. рис. 6. При этом $\mathrm{An}(\Gamma_{aa} \circ \widehat{\Gamma} \circ \Gamma_{bb}) = \mathrm{An}(\widehat{\Gamma}) + 2$, так что граф $\widehat{\Gamma}$ двусторонне аддитивный. □

Приведем еще один способ увеличить сборное число графа.

Определение 3.11. Пусть Γ – простой сборный граф, а ω – соответствующее ему сборное слово, в котором не содержится символ a. Будем говорить, что граф ${}^{\times}\Gamma = \Gamma_{a\omega a}$ получен из Γ_ω *скрещиванием концов.*

Пример графа, полученного скрещиванием концов, приведен на рис. 7. Из определения эйлеровой трансверсали следует, что при скрещивании концов простого сборного графа также получается простой сборный граф.



112332 $\qquad$ $a112332a$

Рис. 7. Пример графа, полученного скрещиванием концов (справа).

Предложение 3.12. *Пусть* Γ *– двусторонне аддитивный простой сборный граф,* $\mathrm{An}(\Gamma) = k$. *Тогда сборное число графа* ${}^{\times}\Gamma$, *полученного скрещиванием концов, равняется* $k+1$.

Доказательство. Для начала заметим, что $\mathrm{An}({}^{\times}\Gamma) \geqslant k+1$. Действительно, предположим, что $\mathrm{An}({}^{\times}\Gamma) \leqslant k$. Рассмотрим произвольное гамильтоново множество s из k полигональных путей, которое покрывает все вершины графа ${}^{\times}\Gamma$. Разъединим концы ${}^{\times}\Gamma$, продублировав вершину a и добавив петлю в каждой из ее копий, см. рис. 8. По s строится гамильтоново множество из не более чем $k+1$ полигонального пути в графе $\Gamma_{aa} \circ \Gamma \circ \Gamma_{a'a'}$. Действительно, не более чем один из полигональных путей в ${}^{\times}\Gamma$ разделяется на две части при указанной операции, тогда как остальные не меняются. Тем не менее, поскольку $\mathrm{An}(\Gamma) = k$ и Γ двусторонне аддитивен, в любом гамильтоновом множестве полигональных путей графа $\Gamma_{aa} \circ \Gamma \circ \Gamma_{a'a'}$ должно быть ровно $k+2$ пути. Получено противоречие.

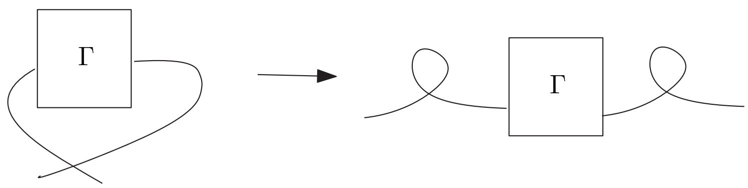


Рис. 8. Превращаем граф со скрещенными концами в композицию с петлями.

Чтобы показать, что $\mathrm{An}({}^{\times}\Gamma) \leqslant k+1$, рассмотрим гамильтоново множество из k полигональных путей в Γ и добавим к нему одноточечный путь a. □

§4. Петельный граф

Этот раздел посвящен серии графов специального вида – петельным графам.

Определение 4.1 ([2, определение 4.2])**.** *Петельным графом* размера n называют простой сборный граф, соответствующий сборному слову

$$\omega_{TC_n} = 1213243\ldots(n-1)(n-2)n(n-1)n.$$

Петельный граф обозначают TC_n.

Приведем для примера первые несколько сборных слов петельных графов: $\omega_{TC_1} = 11$, $\omega_{TC_2} = 1212$, $\omega_{TC_3} = 121323$. Каждое следующее слово ω_{TC_n} получено из предыдущего слова $\omega_{TC_{n-1}}$ заменой последнего вхождения буквы $n-1$ на подслово $n(n-1)n$.

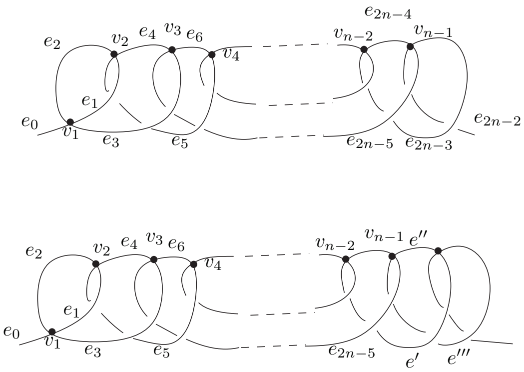


Рис. 9. Преобразование графа TC_{n-1} в граф TC_n.

Предложение 4.2. *Обозначим k-ую позицию в сборном слове ω_{TC_n} через $\omega_{TC_n}[k]$. Тогда выполнены следующие равенства*:

$$\omega_{TC_n}[1] = 1, \quad \omega_{TC}[2n] = n,$$
$$\omega_{TC_n}[2k] = k+1, \qquad k \in \{2, 3, \dots, n-1\},$$
$$\omega_{TC_n}[2k+1] = k, \qquad k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Доказательство. Исходя из определения, каждый символ (кроме символа 1) впервые появляется в слове ω_{TC_n} в том случае, если предыдущие $i-2$ символа уже встретились дважды, а символ $i-1$ встретился ровно один раз. Это означает, что впервые символ i появляется на позиции с номером $2(i-2)+2 = 2i-2$. Второе вхождение каждого из символов (кроме символов 1 и n) происходит на три позиции правее, чем первое: $2i-2+3 = 2i+1$. Наконец, заменив i на $k+1$, получаем, что

$$\omega_{TC_n}[2k] = k+1, \qquad k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\},$$
$$\omega_{TC_n}[2k+1] = k, \qquad k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Наконец,

$$\omega_{TC_n}[1] = 1, \, \omega_{TC_n}[2n] = n$$ □

Замечание 4.3. Слово ω_{TC_n} совпадает с обратным к нему, если переписать обратное слово в порядке неубывания. Таким образом, не важно, как именно ориентирована эйлерова трансверсаль, слово в порядке неубывания получится то же самое. Такое свойство немного сокращает доказательства. Например, можно считать, что добавление петли на ребро между вершинами 1 и 2 – это то же самое, что добавление петли между вершинами n и $n-1$. В частности, для графа TC_6, если рассмотреть слово $\omega_{TC_6} = 1aa21324354656$ и слово $12132435465aa6$ и переписать второе из них с конца в порядке неубывания (никак не изменяя символ для вершины a, для наглядности), то получим слово $1aa21324354656$.

§5. Рост сборного числа при преобразованиях петельного графа

Известно, см. [2], что $\mathrm{An}(TC_n) = 1$. При проведении операции петельной подстановки над произвольным графом Γ, $|\Gamma| = n$, т.е. при добавлении петли на каждое из ребер, получается граф со сборным числом, равным $n+1$, подробнее см. [2]. В этом параграфе мы отвечаем на вопрос, какое минимальное число петель требуется добавить на ребра графа TC_n, чтобы получить граф со сборным числом 2.

Лемма 5.1. *Если добавить петлю a на любое из ребер графа TC_n, то сборное число получившегося простого сборного графа с $n+1$ вершиной степени 4 равняется 1.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{An}(TC_n) = 1$, минимальное гамильтоново множество полигональных путей в графе TC_n состоит из единственного пути, и можно говорить о гамильтоновом полигональном пути в TC_n. Известно, см. [2, теорема 4.3], что существует $\binom{n+1}{2}$ различных гамильтоновых полигональных путей в графе TC_n. Обозначим через γ эйлеров трансверсальный путь в TC_n. Путь γ содержит $2n-1$ ребро, не инцидентное концевым вершинам. Напомним, что любые идущие подряд ребра трансверсали не являются соседями в их общей вершине. Любой полигональный путь в графе представлен некоторыми не идущими подряд ребрами из эйлеровой трансверсали. Непосредственная проверка показывает, что существует в точности $\binom{n+1}{2}$ способ выбрать $n-1$ ребро из выписанных подряд $2n-1$ ребер трансверсали таким образом, чтобы любые два из выбранных ребер были разделены хотя бы одним из невыбранных ребер.

Это означает, что любые $n-1$ из не идущих подряд ребер трансверсального пути (не считая ребер, инцидентных концевым вершинам) формируют полигональный путь. Поэтому, на какое бы ребро ни была добавлена петля, найдется путь, проходящий через него. В том же случае, когда петля добавлена на ребро, инцидентное концевой вершине, достаточно взять гамильтонов путь, завершающийся ребром $(2,1)$ в случае начальной вершины или $(n, n-1)$ в случае конечной вершины. Поэтому, согласно предложению 3.7, сборное число при добавлении петли не меняется. □

Лемма 5.2. *Пусть петли a и b добавлены на два не идущие подряд ребра эйлеровой трансверсали графа TC_n. Тогда сборное число полученного графа равняется* 1.

Доказательство. Как уже было сказано выше, любые $n-1$ из не идущих подряд и не инцидентных концевым вершинам ребер на эйлеровой трансверсали петельного графа образуют гамильтонов полигональный путь. Таким образом, просто выберем путь, который проходит через два ребра, на которые добавлены петли.

В случае же, если одна из петель добавлена на ребро, инцидентное концевому, выберем для полигонального пути соседнее с ним ребро, например, ребро $(2,1)$ или $(1,3)$, чтобы можно было продлить путь до добавленной петли. Кроме того, нужно будет взять ребро, на котором расположена вторая петля, и добавить еще $n-3$ ребра, чтобы получился полигональный путь. □

Лемма 5.3. *Пусть петли a и b добавлены на два последовательные ребра эйлеровой трансверсали графа TC_n. Тогда сборное число полученного графа равняется* 1.

Доказательство. Обозначим граф, получившийся в результате добавления петель через $\widehat{TC_n}$. Для начала будем считать, что ни одна петля не добавлена на ребро, инцидентное концевой вершине исходного графа. Рассмотрим произвольную часть слова ω_{TC_n}:

$$\dots(i-1)(i-2)i(i-1)(i+1)i(i+2)(i+1)\dots$$

Ниже перечислены все возможные способы, которыми могут быть добавлены петли на два последовательные ребра трансверсали, инцидентные вершине i.

(1) Первая из петель добавлена до первого вхождения символа i на ребро $(i-2, i)$:

$$\dots(i-1)(i-2)\mathbf{aa}i\mathbf{bb}(i-1)(i+1)i(i+2)(i+1)\dots$$

(2) Первая из петель добавлена сразу после первого вхождения символа i на ребро $(i, i-1)$:

$$\dots(i-1)(i-2)i\mathbf{aa}(i-1)\mathbf{bb}(i+1)i(i+2)(i+1)\dots$$

(3) Первая из петель добавлена перед вторым вхождением символа i на ребро $(i + 1, i)$:

$$\dots(i-1)(i-2)i(i-1)(i+1)\mathbf{aa}i\mathbf{bb}(i+2)(i+1)\dots$$

(4) Первая из петель добавлена сразу после второго вхождения символа i на ребро $(i, i+2)$:

$$\dots(i-1)(i-2)i(i-1)(i+1)i\mathbf{aa}(i+2)\mathbf{bb}(i+1)\dots$$

Теперь покажем, что на самом деле все эти случаи эквивалентны между собой, и достаточно разобрать лишь один из них.

Прежде всего, случаи 1 и 4 эквивалентны. Действительно, в случае 4 можно считать, что первая петля добавлена перед первым вхождением символа $i+2$. Это не так только в случае, если символа $i+2$ не существует, т.е. слово имеет вид $\dots n(n-1)aanbb$, но этот случай, так же как и аналогичный ему случай $aa1bb21\dots$, будет рассмотрен отдельно.

Далее, случаи 2 и 3 также эквивалентны. В третьем случае можно считать, что петля добавлена после первого вхождения символа $i+1$.

Наконец, можно считать эквивалентными также случаи 2 и 4. Действительно, в случае 4 можно прочитать слово с другого конца, не переписывая его при этом в порядке неубывания. При этом добавления петель начинаются с вершины b сразу после первого вхождения символа $i+1$.

Итак, все четыре случая эквивалентны. Теперь сосредоточимся на случае 2 и покажем, что существует гамильтонов полигональный путь. Отдельно отметим, что $i \neq 1, n$.

Рассмотрим сборное слово ω_{TC_n}. Пара последовательных символов в этом слове соответствует ребру графа. Два последовательных ребра не являются соседями в их общей вершине. Если же ребра, имеющие общую вершину, не идут подряд в трансверсали, то они, напротив, являются соседями в своей общей вершине. Кроме того, как уже упоминалось ранее, любые $n-1$ из не идущих подряд ребер трансверсали петельного графа образуют полигональный путь. Тогда можно рассмотреть следующий полигональный путь (здесь ребра, входящие в выбранный путь, обозначены фигурными скобками):

$$1\underbrace{21}\underbrace{32}\ldots\underbrace{(i-2)(i-3)}\underbrace{(i-1)(i-2)}i$$
$$\underbrace{(i-1)(i+1)}\underbrace{i(i+2)}\underbrace{(i+1)(i+3)}\ldots\underbrace{(n-1)n}$$

Путь продолжается влево и вправо с использованием не идущих подряд ребер. Согласно предложению 4.2, впервые символ i встречается в слове ω_{TC_n} на позиции $2i-2$. Поэтому при $i>2$ имеется $i-2$ ребра, включая ребро $(i-1)(i-2)$, слева от первого вхождения символа i. При $i=1$ или 2 таких ребер нет.

После первого вхождения символа i остается еще $2n-(2i-2)=2n-2i+2$ букв, что позволяет построить $n-i+1$ ребро. Всего найдется $i-2+n-i+1=n-1$ ребро в трансверсали графа TC_n, которые не идут подряд и образуют полигональный путь. Этот путь начинается в вершине 1 и завершается в вершине i ребром $(i,(i+2))$, что видно из структуры – есть лишь одно ребро, инцидентное вершине i на этом пути. Более того, дополнить описанный путь до пути в графе $\widehat{TC_n}$ можно следующим образом:

$$1\underbrace{21}\underbrace{32}\ldots\underbrace{(i-1)(i-2)}\underbrace{i\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$$
$$\underbrace{(i-1)\mathbf{b}}\underbrace{\mathbf{b}(i+1)}\underbrace{i(i+2)}\underbrace{(i+1)(i+3)}\ldots\underbrace{(n-1)n}$$

Здесь к пути в исходном графе добавили ребро $(i,\mathbf{a})$, которое является соседом ребра $(i,i+2)$ в вершине i, и разбили ребро $(i-1,i+1)$ на две части с помощью вершины b. Теперь путь начинается в вершине 1 и завершается в вершине a. Пример в случае $n=11$ и $i=6$ приведен на рис. 10.

Рассмотрим теперь случай, когда одна из петель добавлена на ребро, соседнее с концевой вершиной. Например: $aa1bb21\ldots$. Необходимо рассмотреть в исходном графе путь, завершающийся ребрами $(1,3)$ и $(4,2)$,

$$1\ 2\underbrace{1\ 3}\underbrace{2\ 4}\ldots\underbrace{(n-1)\ n}$$

и продлить его до соответствующих петель:

$$a\underbrace{a\ 1}\,b\underbrace{b\ 2}\underbrace{1\ 3}\underbrace{2\ 4}\ldots\underbrace{(n-1)\ n}. \qquad \square$$

Перебор случаев добавления одной или двух петель, реализованный в леммах 5.1, 5.2 и 5.3, позволяет вывести следующее предложение.

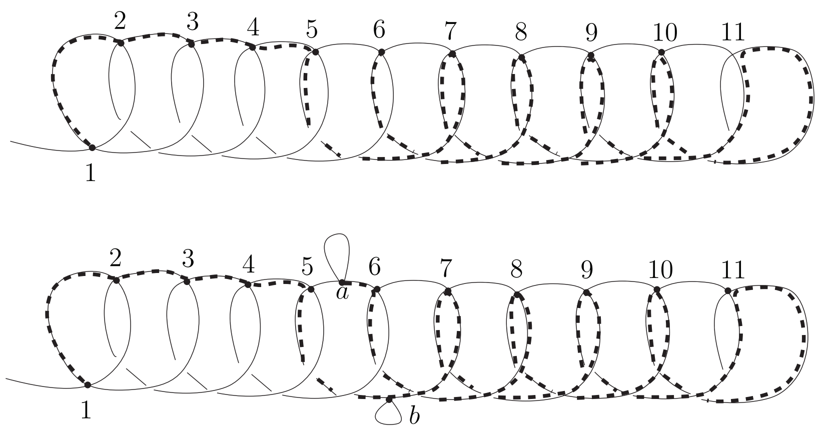


Рис. 10. Полигональный путь в графе TC_{11} и его продление до вершины a в графе $\widehat{TC_{11}}$.

Предложение 5.4. *Чтобы получить граф со сборным числом* 2 *добавлением петель на ребра графа* TC_n*, необходимо добавить хотя бы три петли.*

Опишем возможные случаи добавления трех петель на три подряд идущие ребра графа TC_n. Напомним, что $\omega_{TC_n} = 1213243\ldots$. Рассматриваются различные варианты вставок пар букв aa, bb и cc в три последовательных промежутка между буквами слова ω_{TC_n}. Возможны следующие варианты.

I. Первое вхождение символа, соответствующего добавленной петле, находится на нечетной позиции в сборном слове. Например, в слове

$$1213aa2bb4cc3\ldots$$

первое вхождение символа a находится на позиции номер 5. В таком случае, до первого вхождения символа, соответствующего петле, у нас имеется четное число букв исходного слова, возможно, 0.

Согласно предложению 4.2, при $k \neq 1, n$ символ k в сборном слове ω_{TC_n} впервые появляется на позиции $2k-2$, а во второй раз – на позиции $2k+1$. Поэтому все вхождения символов, соответствующих петлям, расположены между двумя вхождениями одной и той же буквы. Например, в рассмотренном выше случае слова $1213aa2bb4cc3\dots$, все петли расположены между двумя вхождениями символа 3.

При $k = 1$ или $k = n$ после добавления петель слово имеет вид $aa1bb2cc13\dots$ или, соответственно, $\dots naa(n-1)bbncc$.

II. Первое вхождение вершины, соответствующей добавленной петле, находится на четной позиции. Например, в слове

$$121aa3bb2cc43\dots$$

начали добавлять петли с позиции 4. В таком случае, до первого вхождения символа, соответствующего добавленной вершине, появится нечетное число символов исходного слова.

Предложение 5.5. *Пусть $n \geqslant 5$ и на три последовательные ребра эйлеровой трансверсали графа TC_n добавлено по одной петле.*

Если первое вхождение символа, соответствующего первой петле, находится на нечетной позиции сборного слова, то сборное число полученного графа равняется 2.

Если первое вхождение символа, соответствующего петле, находится на четной позиции сборного слова, то сборное число полученного графа равняется 1.

Доказательство. Для начала докажем первую часть предложения. Допустим, что петли добавлены между двумя вхождениями символа $k \notin \{1, n\}$. Обозначим получившийся граф TC_n^*. Пример графа приведен на рис. 11. Тогда его сборное слово имеет вид:

$$\dots(k-1)(k-2)kaa(k-1)bb(k+1)cck(k+2)(k+1)\dots$$

Для начала покажем, что сборное число полученного графа не превосходит 2. Действительно, существует гамильтоново множество из двух полигональных путей: путь, проходящий по вершинам $1, 2, \dots, a, k, c, k+1\dots$ и одноточечный путь b, см. рис. 12. Следовательно, сборное число нашего графа не превосходит двух.

Покажем, что не существует полигонального пути, проходящего одновременно по вершинам a, b и c, или, что то же самое, что сборное число нашего графа не равно единице.

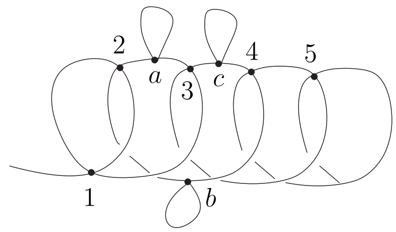


Рис. 11. Добавление трех петель на ребра графа TC_5 между двумя вхождениями символа 3.

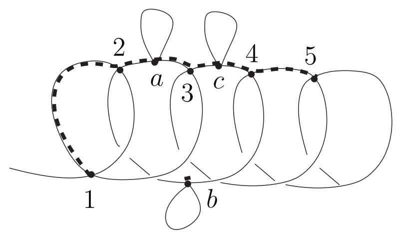


Рис. 12. Гамильтоново множество из двух полигональных путей в TC_n^*.

(1) Оба ребра $(k-1, b)$ и $(b, k+1)$ не могут одновременно принадлежать одному гамильтонову пути

$$\dots(k-1)(k-2)kaa\,\underbrace{(k-1)b}\,\underbrace{b(k+1)}\,cck(k+2)(k+1)\dots$$

Действительно, если бы это было так, то, поскольку вершины a и c также покрыты этим путем, то ребра (k, a) и (c, k) должны были бы принадлежать пути

$$\dots(k-1)(k-2)\,\underbrace{ka}\,a\,\underbrace{(k-1)b}\,\underbrace{b(k+1)}\,c\,\underbrace{ck}\,(k+2)(k+1)\dots$$

Однако это невозможно, поскольку в таком случае ребра (k, a) и (c, k) формируют отдельный полигональный путь – вершины $k-1$ и $k+1$ уже заняты ребрами, инцидентными вершине b. Таким образом, если оба ребра $(k-1, b)$ и $(b, k+1)$ принадлежат некоторому полигональному пути в минимальном гамильтоновом множестве полигональных путей, то сборное число графа TC_n^* не меньше двух. Итак, гамильтонов полигональный путь в графе TC_n^*, если он существует, заканчивается в вершине b.

(2) Предположим теперь, что ребро $(k-1,b)$ принадлежит гамильтонову пути и вершина b – один из концов этого пути:

$$\ldots(k-1)(k-2)kaa\underbrace{(k-1)b}b(k+1)cck(k+2)(k+1)\ldots$$

Теперь, чтобы вершина a также была покрыта путем, необходимо использовать ребро (k,a):

$$\ldots(k-1)(k-2)\underbrace{ka}a\underbrace{(k-1)b}b(k+1)cck(k+2)(k+1)\ldots$$

Тогда часть полигонального пути, содержащая вершины $1,2,\ldots,k-1$, не может быть полигонально соединена с частью полигонального пути, содержащей вершины $k,\ldots,n$, поскольку ребро $(k-2,k)$, соседнее в эйлеровой трансверсали с ребром (k,a), не может быть включено в гамильтонов полигональный путь. В таком случае есть как минимум два пути в гамильтоновом множестве полигональных путей.

(3) Та же логика применима, если в полигональный путь включить ребро $(b,k+1)$:

$$\ldots(k-1)(k-2)kaa(k-1)b\underbrace{b(k+1)}cck(k+2)(k+1)\ldots$$

В этом случае, нам также необходимо включить и ребро (c,k), поскольку вершина c должна быть покрыта гамильтоновым путем:

$$\ldots(k-1)(k-2)kaa(k-1)b\underbrace{b(k+1)}c\underbrace{ck}(k+2)(k+1)\ldots$$

В таком случае часть полигонального пути, содержащая вершины $k+1,\ldots,n$, и часть полигонального пути, содержащая вершины $1,\ldots,k$, не могут быть соединены между собой. Единственным способом их соединить является ребро $(k,k+2)$, но оно не может быть использовано, поскольку ребра $(k,k+2)$ и (c,k) идут подряд в эйлеровой трансверсали графа.

Заметим, что при $k=2$ или $k=n-1$ требуется заменить ребро $(k-2,k)$ соответственно на ребро $(1,2)$ или $(n-1,n)$.

Рассмотрим случай $k = 0$ или $k = n$. Тогда слово после добавления петель имеет вид: $aa1bb2cc13\ldots$ или соответственно $\ldots naa(n-1)bbncc$. Требуемый гамильтонов путь содержит ребро $(a, 1)$, он также должен проходить по вершине b и быть полигональным, поэтому содержит ребро $(b, 2)$. Но тогда для присоединения вершины c остается только ребро $(c, 1)$, а это значит, что мы не сможем соединить вершину 1 с остальными, используя ребро $(1, 3)$. Аналогично, для случая $\ldots naa(n-1)bbncc$:

$$a\,\underbrace{a\,1}\,b\,\underbrace{b\,2}\,c\,\underbrace{c\,1}\,3\ldots$$

Таким образом, если первое вхождение символа, соответствующего петле, расположено на нечетной позиции сборного слова, то сборное число полученного графа равняется 2.

Осталось привести пример гамильтонова полигонального пути в том случае, когда первое вхождение символа, соответствующего петле, находится на четной позиции сборного слова. Тогда слово имеет вид:

$$121\ldots(k-1)(k-2)aakbb(k-1)cc(k+1)k\ldots$$

Без ограничения общности можно считать, что первая петля добавлена до первого вхождения символа k и, следовательно, после второго вхождения символа $k-2$. Если это не так, воспользуемся замечанием 4.3 и прочитаем сборное слово с конца.

В таком случае для полигонального пути необходимо выбрать следующие ребра:

$$121\ldots(k-1)\,\underbrace{(k-2)a}\,a\,\underbrace{kb}\,b\,\underbrace{(k-1)c}\,\underbrace{c(k+1)}\,\underbrace{k(k+2)}\ldots$$

Путь продолжается влево и вправо с использованием не идущих подряд ребер. Согласно предложению 4.2, первому вхождению символа $k \geqslant 2$ предшествует в точности $2(k-1)-1$ символ. Таким образом, слева располагается $k-2$ ребра при $k \geqslant 2$ и 0 ребер при $k = 1$, не считая ребра $(k-2, b)$. Затем, начиная со второго вхождения символа k, располагаются еще $2n-(2k+1)$ символов. Получаем $n-k$ ребер, начиная с ребра $(k, k+2)$ вправо. Наконец, есть еще ребро $(k-1, k+1)$ в исходном графе, на которое добавлена вершина c. Всего, если не считать ребер, инцидентных a и b, получаем $n-1$ ребро в трансверсали графа TC_n, которые не идут подряд и образуют полигональный путь. Наконец, этот путь заканчивается в вершинах k и $k-2$, поэтому он может быть полигональным образом продолжен до вершин a и b.

Таким образом, построен гамильтонов полигональный путь в графе с добавленными петлями. □

Комбинируя предложения 5.4 и 5.5, получаем следующую теорему.

Теорема 5.6. *Пусть $n \geqslant 5$. Тогда минимальное число ребер в графе TC_n, на которые нужно добавить петли, чтобы сборное число получившегося графа равнялось 2, есть три.*

Доказательство. Из предложения 5.4 следует, что добавления двух петель недостаточно. По предложению 5.5, добавление трех петель на три последовательные ребра графа таким образом, что соответствующие буквы добавляются между вхождениями одного и того же символа k для любого k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, приводит к графу, сборное число которого равняется 2. □

Список литературы

1. A. Angeleska, N. Jonoska, M. Saito, *DNA recombinations through assembly graphs.* — Discr. Appl. Math. **157** (2009), 3020–3037.
2. J. Burns, E. Dolzhenko, N. Jonoska, T. Muche, M. Saito, *Four-regular graphs with rigid vertices associated to DNA recombination.* — Discr. Appl. Math. **161** (2013), 1378–1394.
3. А. Э. Гутерман, Е. М. Крейнес, Н. В. Остроухова, 2-*слова: их графы и матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 45–72.
4. D. A. Cruz, M. M. Ferrari, N. Jonoska, L. Nabergall, M. Saito, *Insertions yielding equivalent double occurrence words.* — Fundam. Inform. **171**, No. 1–4 (2019), 113–132.
5. A. Ehrenfeucht, T. Harju, I. Petre, DM. Prescott, G. Rozenberg, *Computation in Living Cells: Gene Assembly in Ciliates.* — Nat. Comput. Ser., Springer Berlin/Heidelberg, 2003.
6. А. К. Звонкин, С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, М., 2010.
7. B. Shtylla, L. Traldi, L. Zulli, *On the realization of double occurrence words.* — Discr. Math. **309**, No. 6 (2009), 1769–1773.

Guterman A. E., Kreines E. M., Ostroukhova N. V. Transformations of assembly number for 4-regular graphs.

Simple assembly graphs characterize the process of DNA recombination in living cells. The assembly number, number of distinct Hamiltonian sets of polygonal paths, one-sided and middle additivity of a graph are important characteristics of such graphs. This paper investigates transformations of simple assembly graphs that allow one to increase the assembly number or to obtain middle additive graphs. Also the minimum number of loops that must be added to the edges of a tangled chord graph in order to increase its assembly number by 1 is computed.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия,
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики, Москва, 119991, Россия,
Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, 141701, Россия
E-mail: `guterman@list.ru`

Поступило 13 октября 2021 г.

Московский гос. униветститет им. М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия,
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики, Москва, 119991, Россия
E-mail: `elena.kreines@gmail.com`

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия
E-mail: `natosova@gmail.com`