Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 504, 2021 г.

Ю. А. Альпин, И. В. Башкин

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПНЫЕ МАТРИЦЫ И УСЛОВИЕ КОЛМОГОРОВА

§1. Введение

В данной работе продолжается изучение неотрицательных цепных матриц, начатое в [1]. Знакомство с [1] желательно, хотя необходимые определения и факты будут здесь приведены. Дополнительные сведения о неотрицательных матрицах можно найти в [2]. Напомним определение цепной матрицы. Пусть дана неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$.

Определение 1.1. Пара положительных элементов a_{ik} и a_{pq} матрицы A называется *звеном*, если они стоят либо в одной строке (т.е. $i = p$), либо в одном столбце (т.е. $k = q$).

Определение 1.2. Последовательность положительных элементов

$$a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \dots, a_{i_{l-1}k_{l-1}}, a_{i_lk_l} \tag{1}$$

матрицы A называется *цепочкой*, если в ней любые два соседних элемента образуют звено. Говорят, что цепочка (1) *соединяет* элементы $a_{i_1k_1}$ и $a_{i_lk_l}$.

Определение 1.3. Неотрицательная матрица A без нулевых строк и столбцов называется *цепной*, если любая пара её положительных элементов соединяется цепочкой.

Таким образом, цепное свойство означает, что от любого положительного элемента A можно перейти к любому другому положительному элементу, двигаясь по звеньям некоторой цепочки. Переход по звену образно называют ходом шахматной ладьи. Мы будем пользоваться

Ключевые слова: неотрицательная матрица, цепная матрица, цепной ранг, условие Колмогорова.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение No. 075-02-2020-1478.

этим образным выражением как термином и говорить о цепочках ходов шахматной ладьи (иногда короче – ходов ладьи), чтобы отличить их от цепочек другого типа, которые встретятся далее.

Как предмет исследования цепные матрицы появились в статьях [3,4]. В [1] показано, что цепные матрицы ранее были введены в [5] под названием T-матриц для исследования неоднородных цепей Маркова. В этой статье будет установлено ещё более раннее появление цепных матриц. Оказалось, что цепные матрицы тесно связаны со стохастическими матрицами, удовлетворяющими условию Колмогорова, при котором цепь Маркова, определяемая стохастической матрицей, подчиняется многомерной локальной предельной теореме (см. [6]).

Для изучения прямоугольных цепных матриц используются двудольные графы. Но в важнейшем случае квадратных матриц более наглядным и эффективным средством являются ориентированные графы матриц. Напомним определение.

Определение 1.4. Графом неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется ориентированный граф с множеством вершин $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$, в котором дуга $i \to j$ существует тогда и только тогда, когда $a_{ij} > 0$.

Неотрицательная матрица A порядка n называется *неразложимой*, если не существует такой матрицы перестановки P, что PAP^{-1} имеет блочно-треугольный вид. Здесь нам будет полезно следующее эквивалентное определение.

Определение 1.5. Неотрицательная матрица A называется неразложимой, если её граф сильно связен.

Известно и легко проверяется, что в неразложимой матрице нет нулевых строк и столбцов.

В работе [7], отвечающей на один вопрос из [6], вводится понятие, эквивалентное цепочке ходов шахматной ладьи в теории цепных матриц. При этом фактически речь идёт об ориентированных графах, хотя термин «граф» не используется. В §2 показано, что теорема 1 из [7] может быть интерпретирована как теорема о цепном ранге матрицы – комбинаторной характеристике неотрицательной матрицы, введённой в статье [1]. Из этой теоремы выводится основной результат данной работы: квадратная неотрицательная матрица A удовлетворяет условию Колмогорова тогда и только тогда, когда она неразложима и является цепной матрицей.

В §3 определяется понятие общей матрицы Сарымсакова. Доказывается, что общие матрицы Сарымсакова и, как следствие, вполне неразложимые матрицы удовлетворяют условию Колмогорова.

В заключительном §4 представлены некоторые дополнительные сведения о неразложимых цепных матрицах.

Результаты этой работы частично опубликованы в тезисах [8].

§2. Цепные матрицы и условие Колмогорова

Множество всех прямоугольных неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов обозначим символом $\mathbb{P}$. Пусть дана $n \times m$ матрица $A \in \mathbb{P}$. Говорят, что i-ая и j-ая строки A *пересекаются*, если они имеют положительные элементы в некотором общем столбце. В [1] введены следующие бинарные отношения на множестве натуральных чисел $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$, элементы которого понимаются как номера строк матрицы A:

- $(i,p) \in \pi(A)$, если i-ая и p-ая строки матрицы A пересекаются;
- $(i,p) \in \widehat{\pi}(A)$, если существует последовательность номеров

$$i = i_1,\ i_2, \dots, i_l = p, \tag{2}$$

  в которой любые два соседних числа находятся в отношении $\pi(A)$, т.е. являются номерами пересекающихся строк.

В терминах теории бинарных отношений $\widehat{\pi}(A)$ есть транзитивное замыкание отношения $\pi(A)$. Поскольку $\pi(A)$ рефлексивно и симметрично, то $\widehat{\pi}(A)$ является отношением эквивалентности. Число классов эквивалентности отношения $\hat{\pi}(A)$ называется в [1] цепным рангом матрицы $A \in \mathbb{P}$ и обозначается символом $\mathrm{crk}(A)$.

Для того, чтобы установить связь цепных матриц и матриц, удовлетворяющих условию Колмогорова, желательно определить цепной ранг неотрицательной матрицы в терминах ходов шахматной ладьи.

Теорема 2.1. *Пусть дана матрица $A \in \mathbb{P}$. Положительные элементы a_{ik} и a_{pq} соединены в матрице A цепочкой ходов шахматной ладьи тогда и только тогда, когда номера строк этих элементов находятся в отношении $\widehat{\pi}(A)$, т.е. когда $(i,p) \in \widehat{\pi}(A)$.*

Доказательство. Пусть существует цепочка ходов ладьи

$$a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \dots, a_{i_{l-1}k_{l-1}}, a_{i_lk_l}, \tag{3}$$

где $i_1 = i, k_1 = k, i_l = p, k_l = q$. Тогда в последовательности номеров строк элементов из (3)

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_{l-1}, i_l = p, \tag{4}$$

любые два соседние индекса находятся в отношении $\pi(A)$. Действительно, пусть i_u, i_{u+1} – соседние индексы. Возможны два случая:

1) положительные элементы $a_{i_u k_u}$ и $a_{i_{u+1} k_{u+1}}$ стоят в одной строке, тогда $i_u = i_{u+1}$;

2) положительные элементы $a_{i_u k_u}$ и $a_{i_{u+1} k_{u+1}}$ стоят в одном столбце, тогда $k_u = k_{u+1}$, а это значит, что строки с номерами i_u и i_{u+1} пересекаются.

В обоих случаях для любых соседних индексов i_u и i_{u+1} последовательности (4) имеем $(i_u, i_{u+1}) \in \pi(A)$, следовательно, $(i_1, i_l) \in \widehat{\pi}(A)$. Ввиду равенств $i_1 = i, i_l = p$, получаем $(i, p) \in \widehat{\pi}(A)$.

Теперь пусть дано, что $(i, p) \in \widehat{\pi}(A)$. Следовательно, существует последовательность номеров строк

$$i = k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_{m-1},\, k_m = p, \tag{5}$$

в которой любые два соседние номера k_u, k_{u+1} находятся в отношении $\pi(A)$. Если $k_u = k_{u+1}$, т.е. два положительных элемента стоят в одной строке, то от первого элемента ко второму можно перейти за не более чем один ход ладьи. Пусть $k_u \neq k_{u+1}$. Поскольку строки с номерами k_u и k_{u+1} пересекаются, то, очевидно, от положительного элемента строки k_u можно перейти к положительному элементу строки k_{u+1} за не более чем три хода ладьи. Следовательно, можно перейти от любого элемента i-й строки к любому элементу p-й строки, сделав не более, чем $3(m-1)$ ходов ладьи. □

Проиллюстрируем доказательство теоремы 2.1 на примере матрицы из [6, с. 293].

Пример 2.1. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{31} и a_{23} соединены следующей цепочкой ходов шахматной ладьи:

$$a_{31}, a_{34}, a_{14}, a_{15}, a_{12}, a_{42}, a_{45}, a_{42}, a_{52}, a_{53}, a_{23}. \tag{6}$$

По теореме 2.1, существует последовательность номеров строк, соединяющая номера 3 и 2, такая, что строки с соседними номерами пересекаются. Последовательность с этим свойством можно составить, например, из первых индексов элементов (6), опустив в ней повторения:

$$3, 1, 4, 5, 2. \tag{7}$$

Заметим, что цепочка (6) – не самая короткая последовательность ходов ладьи, соединяющая элементы a_{31} и a_{23}, но у неё есть дополнительное качество: она доказывает цепное свойство матрицы A, поскольку содержит все положительные элементы матрицы. Последовательность (7) также доказывает цепное свойство матрицы A, так как в ней соседние номера относятся к пересекающимся строкам и все строки матрицы представлены. При этом в последовательности (7) номер каждой строки встречается один раз, так что она имеет минимально возможную длину.

Определим на множестве положительных элементов матрицы $A \in \mathbb{P}$ бинарное отношение $\mathcal{C}(A)$, полагая, что элементы a_{ik} и a_{pq} находятся в отношении $\mathcal{C}(A)$, если образуют звено в матрице A. Переходя к транзитивному замыканию, положим, что элементы a_{ik} и a_{pq} находятся в отношении $\widehat{\mathcal{C}}(A)$, если они соединены цепочкой ходов шахматной ладьи в матрице A. Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Отношение $\widehat{\mathcal{C}}(A)$ на множестве положительных элементов матрицы $A \in \mathbb{P}$ является отношением эквивалентности. Число классов отношения $\widehat{\mathcal{C}}(A)$ равно числу классов отношения $\widehat{\pi}(A)$, следовательно, равно цепному рангу матрицы A.*

Таким образом, мы получили определение цепного ранга матрицы непосредственно в терминах цепочек ходов шахматной ладьи.

Замечание 2.1. Когда в следствии 2.1 говорится о положительных элементах матрицы A, то имеется ввиду не числовое значение элемента, например, элемента a_{ij}, а лишь то, что на позиции (i, j) матрицы A стоит положительное число. Строго говоря, следовало бы говорить не о положительных элементах матрицы A, а о позициях, на которых стоят положительные элементы. То же можно сказать и по поводу определения цепной матрицы. Но мы оставили традиционное словоупотребление, поскольку правильное понимание обеспечивается интуитивно.

Главный интерес в этой работе представляют квадратные неотрицательные матрицы без нулевых строк и столбцов. Множество таких матриц порядка n обозначим символом $\mathbb{P}_n$.

В статье [7], отвечающей на вопрос, поставленный в работе [6] (см. с. 285), неявно используется понятие цепного ранга и доказана теорема о цепном ранге. Автор статьи, фактически посвящённой ориентированным графам, не пользуется терминами теории графов, что видно даже из названия статьи. Во время публикации статьи удобный язык теории графов был мало распространён. Ниже приводятся определения и формулировка теоремы 1 из [7] в переводе на этот язык.

Определение 2.1 ([7])**.** Пусть дан орграф с множеством вершин $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Две дуги орграфа называются *соседними*, если они имеют общее начало или общий конец.

Таким образом, дуги $i \to k$ и $p \to q$ в графе матрицы A являются соседними, если $i = p$ или $k = q$.

Определение 2.2 ([7])**.** Последовательность дуг орграфа:

$$i_1 \to k_1, i_2 \to k_2, \ldots, i_{l-1} \to k_{l-1}, i_l \to k_l \tag{8}$$

называется *цепочкой*, если в ней любые две рядом расположенные дуги являются соседними в смысле определения 2.1. Будем говорить, что цепочка (8) *соединяет* дуги $i_1 \to k_1$ и $i_l \to k_l$.

Как видно из определений 1.2 и 2.2, термин «цепочка» появился независимо в различных контекстах. Но они тесно связаны, как видно из следующих двух утверждений

Лемма 2.1. *Дуги $i \to k$ и $p \to q$ являются соседними в графе матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ тогда и только тогда, когда элементы a_{ik} и a_{pq} образуют звено в матрице A.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения 1.4 графа матрицы, а также определений звена в матрице A и соседства дуг в графе матрицы A, т.е. определений 1.1 и 2.1. □

Из леммы 2.1 с очевидностью вытекает

Следствие 2.2. *Пусть дана матрица $A \in \mathbb{P}_n$. Последовательность*

$$a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_{l-1}k_{l-1}}, a_{i_lk_l}$$

положительных элементов матрицы A является цепочкой ходов шахматной ладьи в точности тогда, когда последовательность

$$i_1 \to k_1, i_2 \to k_2, \ldots, i_{l-1} \to k_{l-1}, i_l \to k_l$$

дуг в графе матрицы A является цепочкой в смысле определения 2.2.

В статье [7] проводится следующая классификация дуг орграфа. Две дуги сильно связного орграфа принадлежат одному классу K, если их можно соединить цепочкой дуг. Множество дуг орграфа распадается на классы

$$K_1, K_2, \ldots, K_s$$

такие, что каждая дуга принадлежит одному и только одному из них.

Из следствия 2.2 в свою очередь вытекает

Следствие 2.3. *Число классов дуг в графе матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ равно цепному рангу матрицы A, т.е.*

$$s = \operatorname{crk}(A). \tag{9}$$

Частный случай $s = 1$ заслуживает специального термина.

Определение 2.3. Ориентированный граф с множеством вершин $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *цепным*, если любые две его дуги можно соединить цепочкой дуг в смысле определения 2.2.

Следствие 2.4. *Матрица $A \in \mathbb{P}_n$ тогда и только тогда является цепной матрицей, когда она имеет цепной граф.*

В статье [6] вводится понятие *циклического вектора* как характеристики ориентированного графа. Пусть дан орграф с множеством вершин $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Всякому контуру (т.е. замкнутому пути) графа сопоставляется вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, в котором компонента z_i равна числу вхождений i-й вершины в контур. Циклические векторы рассматриваются как элементы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим буквой L линейную оболочку множества циклических векторов.

Теорема 2.2 ([7]). *Пусть задан сильно связный орграф с $n \geqslant 2$ вершинами. Тогда*

$$s = n - r + 1, \tag{10}$$

где s – число классов дуг, r – максимальное число линейно независимых циклических векторов, т.е. $r = \dim(L)$.

В статье [6] доказано, что базис пространства L можно составить из циклических векторов, отвечающих простым контурам, т.е. контурам без повторяющихся вершин. Такие циклические векторы названы *простыми.* Составим матрицу F, строками которой являются простые циклические векторы. Тогда, очевидно,

$$r = \dim(L) = \mathrm{rk}(F). \tag{11}$$

Теперь сформулируем теорему 2.2 в матричных терминах. Пусть дана неотрицательная неразложимая матрица A порядка n. Обозначим через L_A линейную оболочку циклических векторов графа матрицы A, а через F_A – соответствующую этому графу матрицу простых циклических векторов. Учитывая равенства (9), (10) и (11), получаем матричный вариант теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть A – неразложимая неотрицательная матрица порядка n. Тогда*

$$\mathrm{crk}(A) = n - \mathrm{rk}(F_A) + 1. \tag{12}$$

Условие Колмогорова, при котором конечная однородная цепь Маркова подчиняется многомерной локальной предельной теореме, формулируется в терминах соответствующей стохастической матрицы порядка n и её графа (см. [6]), но без изменений переносится на произвольную неотрицательную матрицу A и её граф. Условие состоит в том, что матрица A неразложима и для неё $\mathrm{rk}(F_A) = n$.

Из теоремы 2.3 вытекает основной результат этой статьи.

Теорема 2.4. *Неотрицательная матрица A удовлетворяет условию Колмогорова тогда и только тогда, когда она неразложима и является цепной матрицей.*

Доказательство. Неразложимость матрицы A входит в условие Колмогорова, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для неразложимой матрицы A порядка n цепное свойство имеет место в точности тогда, когда $\mathrm{rk}(F_A) = n$. Действительно, из равенства (12) следует, что

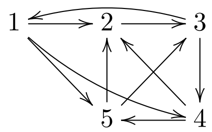
$$\mathrm{crk}(A) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rk}(F_A) = n.$$

Как доказано в [1], равенство $\mathrm{crk}(A) = 1$ выполняется для цепных матриц и только для них. Это доказывает теорему. □

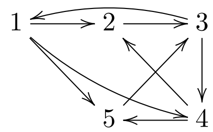
Пример 2.2. Для иллюстрации теорем 2.3 и 2.4 подробно рассмотрим пример из работы [6] (с. 293). Пусть даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф матрицы A



Граф матрицы B



(13)

Матрица B отличается от матрицы A лишь тем, что в ней на позиции (5,2) вместо 1 стоит 0. Соответственно, в графе B отсутствует дуга $5 \to 2$. В каждом из графов есть контур

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1,$$

содержащий все вершины. Следовательно, эти графы сильно связные, а матрицы A и B неразложимы.

Графы матриц A и B близки по структуре и непосредственно по их виду трудно определить, имеет ли место цепное свойство. В данном случае, это легче сделать, исследуя сами матрицы A и B. Пример 2.1 показывает, что A цепная матрица. Согласно теореме 2.4, ранг матрицы F_A должен быть равен 5. Проверим это.

Перечислим все простые контуры графа матрицы A и их циклические векторы:

$$\begin{array}{rl}
1 \to 2 \to 3 \to 1, & f_1 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0) \\
1 \to 5 \to 3 \to 1, & f_2 = (1\ 0\ 1\ 0\ 1) \\
2 \to 3 \to 4 \to 2, & f_3 = (0\ 1\ 1\ 1\ 0) \\
3 \to 4 \to 5 \to 3, & f_4 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1) \\
1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1, & f_5 = (1\ 1\ 1\ 1\ 0) \\
1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1, & f_6 = (1\ 0\ 1\ 1\ 1) \\
1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1, & f_7 = (1\ 1\ 1\ 0\ 1) \\
2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2, & f_8 = (0\ 1\ 1\ 1\ 1)
\end{array}$$

Непосредственное вычисление доказывает, что векторы $f_1, f_2.f_3, f_5, f_8$ линейно независимы, следовательно, ранг 8×5 матрицы F_A, составленной из простых циклических векторов, равен 5. Это значит, по теореме 2.4, что матрица A удовлетворяет условию Колмогорова.

Что касается матрицы B, то в ней 2-ая строка не пересекается с остальными строками, в то время как эти остальные строки образуют цепную матрицу. Следовательно, $\mathrm{crk}(B) = 2$. Согласно формуле (12) теоремы 2.3, ранг F_B равен 4. Действительно, список простых контуров в графе матрицы B отличается от аналогичного списка для матрицы A отсутствием двух последних контуров. Соответственно, в матрице F_B отсутствуют два последних циклических вектора. Прямые вычисления показывают, что $\mathrm{rk}(F_B) = 4$.

Пусть дана неразложимая матрица A порядка n и требуется выяснить, удовлетворяет ли она условию Колмогорова. Из теоремы 2.4 следует, что для этого есть два пути. Можно проверить наличие цепного свойства, как это сделано в примерах 2.1 и 2.2. Но иногда проще, как в следующем примере, обратиться непосредственно к матрице F_A.

Пример 2.3. Любая неразложимая неотрицательная матрица A порядка n с положительными диагональными элементами удовлетворяет условию Колмогорова.

Действительно, в графе матрицы A вокруг каждой вершины есть петля, т.е. простой контур, содержащий единственную вершину. Это значит, что матрица F_A содержит единичную подматрицу порядка n. Следовательно, $\mathrm{rk}(F_A) = n$ и, по теореме 2.4, матрица A удовлетворяет условию Колмогорова.

§3. Цепные матрицы и общие матрицы Сарымсакова

В этом параграфе будет описан обширный класс неотрицательных матриц, удовлетворяющих условию Колмогорова.

В работе [5] в целях исследования эргодических свойств цепей Маркова введён класс стохастических матриц, называемых в современной литературе матрицами Сарымсакова. Первоначальному определению автора [5] в [1] дана эквивалентная формулировка на языке цепных матриц. А именно, стохастическая матрица A называется матрицей Сарымсакова, если любая стохастическая подматрица A является либо цепной матрицей, либо нецепной матрицей, в которой столбцов больше, чем строк. Под стохастической матрицей в [5] понимается любая, необязательно квадратная, неотрицательная матрица, в которой сумма элементов каждой строки равна единице. Дополнительно требуется отсутствие нулевых столбцов. Мы придерживаемся здесь этого понимания, хотя оно не общепринято.

Можно заметить, что в определении матриц Сарымсакова и доказательствах их свойств используется лишь то свойство стохастических матриц, что они не имеют нулевых строк и столбцов. Поэтому легко обобщить определение матрицы Сарымсакова на произвольные неотрицательные матрицы без нулевых рядов. Вначале определим для матриц из $\mathbb{P}$ тип подматриц, соответствующих стохастическим подматрицам.

Подматрица матрицы $A \in \mathbb{P}$, расположенная в строках с номерами $i_1, \ldots, i_k$, называется s-подматрицей, если она принадлежит $\mathbb{P}$ и содержит все положительные элементы A, стоящие в этих строках. Сама матрица A является одной из своих s-подматриц. Легко видеть, что стохастические подматрицы и только они являются s-подматрицами стохастических матриц. Следующее определение обобщает определение 5.1 стохастической матрицы Сарымсакова из статьи [1].

Определение 3.1. Матрица $A \in \mathbb{P}$ называется общей матрицей Сарымсакова, если любая её s-подматрица является либо цепной матрицей, либо нецепной матрицей, в которой столбцов больше, чем строк.

Теорема 3.1. *Квадратные общие матрицы Сарымсакова являются цепными матрицами.*

Доказательство. Действительно, для квадратной матрицы Сарымсакова из двух возможностей, указанных в определении 3.1, остаётся одна – матрица необходимо является цепной. □

Из теорем 2.4 и 3.1 непосредственно вытекает

Следствие 3.1. *Любая неразложимая общая матрица Сарымсакова удовлетворяет условию Колмогорова.*

В теории неотрицательных матриц хорошо известны вполне неразложимые матрицы – подкласс класса неразложимых матриц. Они могут быть описаны различными способами (см., например, [1]). В данном контексте удобно следующее определение: неотрицательная матрица A порядка n вполне неразложима, если любая её s-подматрица, отличная от A, имеет больше столбцов, чем строк. Сопоставляя это определение с определением 3.1, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Всякая вполне неразложимая матрица является общей матрицей Сарымсакова.*

В силу предложения 3.1 и следствия 3.1 имеет место

Следствие 3.2. *Вполне неразложимые матрицы удовлетворяют условию Колмогорова.*

Пример 3.1. В примере 2.2 было показано, что неприводимая неотрицательная матрица с положительными диагональными элементами удовлетворяет условию Колмогорова. Установить этот факт можно и другим способом: доказать, что матрица указанного типа вполне неразложима и затем сослаться на следствие 3.2.

§4. Некоторые дополнительные свойства неразложимых цепных матриц

Напомним, что неотрицательная матрица называется примитивной, если некоторая её степень является положительной матрицей. Известно, что неотрицательная неразложимая матрица примитивна тогда и только тогда, когда НОД длин контуров в её графе равен единице (см., например, [2, с. 21]). Сильно связный орграф, для которого выполнено указанное свойство длин контуров, называется примитивным. Ясно, что матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф. Например, сильно связные графы (13) примитивны, так как они содержат контуры взаимно простых длин 3 и 4.

Таким образом, свойства неразложимости и примитивности неотрицательной матрицы выражаются на языке её графа. Существует ли аналогичная характеристика графов неразложимых цепных матриц, может быть, в терминах взаимного расположения простых контуров? Ответ на этот вопрос авторам неизвестен, но некоторые частные результаты представлены ниже.

Предложение 4.1. *Неразложимая цепная матрица примитивна.*

Доказательство. По известной теореме Фробениуса, для неразложимой, но не примитивной матрицы A существует матрица перестановки

P, преобразующая A к виду

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Цепной ранг цепной матрицы равен единице [1]. Матрица (14), очевидно, не является цепной, следовательно, её цепной ранг больше единицы. То же верно и для матрицы A. Это следует из факта, доказанного в [1]: для любой прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{P}$ и любых матриц перестановок P и Q подходящих размеров цепные ранги матриц A и PAQ равны. Следовательно, импримитивная матрица не может быть цепной, что и доказывает предложение. □

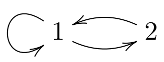
Предложение 4.1 позволяет несколько уточнить теорему 2.4.

Следствие 4.1. *Неотрицательная матрица A удовлетворяет условию Колмогорова в точности тогда, когда A – примитивная цепная матрица.*

По следствию 4.1, матрицы, удовлетворяющие условию Колмогорова, необходимо являются примитивными. Кроме того, для выполнения равенства $\mathrm{rk}(F_A) = n$ граф примитивной матрицы должен иметь не менее чем n простых контуров. Рассмотрим вопрос: удовлетворяют ли условию Колмогорова все примитивные матрицы порядка n, в графе которых не менее чем n простых контуров, т.е. являются ли все такие матрицы цепными? Сформулируем этот вопрос на языке графов. Являются ли цепными все примитивные орграфы с n вершинами, имеющие не менее чем n простых контуров?

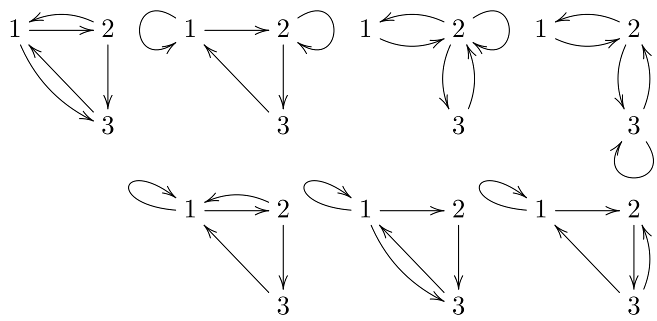
В поиках ответа рассмотрим пограничный случай: примитивные орграфы с n вершинами и *ровно* n простыми контурами. При малых n возможно перечислить все такие орграфы. Рисунки графов сопроводим их матрицами смежности. Заметим, что матрица смежности орграфа представляет весь класс неотрицательных матриц с данным орграфом.

Вначале пусть $n = 2$. Существует единственный (с точностью до изоморфизма) орграф с двумя вершинами и двумя простыми контурами:

граф  с матрицей смежности $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Граф примитивен, так как он сильно связен и содержит контуры длины 1 и 2. Матрица A, очевидно, цепная, так что в случае $n = 2$ ответ на вопрос положительный.

Рассмотрим случай $n = 3$. Вот полный список неизоморфных друг другу сильно связных графов с тремя вершинами и тремя простыми контурами. Их оказалось ровно семь:



(15)

Сильная связность этих графов очевидна. Примитивность же следует из того факта, что каждый из них содержит два контура, длины которых взаимно просты.

Матрицы смежности представленных выше графов соответственно таковы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Последняя матрица в (16) – единственная нецепная матрица в этом списке. Действительно, в ней вторая строка не пересекается с другими строками. Соответственно, последний граф в (15) – единственный (с точностью до изоморфизма) примитивный орграф с тремя вершинами и тремя простыми контурами, не являющийся цепным графом.

Итак, ответ на наш вопрос оказался в общем случае отрицательным, но на основе проведённого эксперимента можно предположить, что в большинстве случаев примитивные орграфы с n вершинами и не менее чем n простыми контурами являются цепными графами. Следовательно, соответствующие им неотрицательные матрицы удовлетворяют условию Колмогорова.

При исследовании класса неотрицательных матриц обычно выясняют, замкнут ли этот класс относительно умножения, т.е. является ли он мультипликативной полугруппой. Относительно матриц Сарымсакова и вполне неразложимых матриц известно что эти классы цепных матриц образуют полугруппы. С другой стороны, произведение двух примитивных матриц может не быть примитивной матрицей. Но, возможно, примитивные цепные матрицы, т.е. матрицы, удовлетворяющие условию Колмогорова, образуют полугруппу? Контрпримером являются примитивные цепные матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Действительно, их произведение $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ не является примитивной матрицей.

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, *Неотрицательные матрицы.* Казан. фед. ун-т, 2015.
3. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* — Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 67–75.
4. J. Hartfiel, J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
5. Т. А. Сарымсаков, *О неоднородных цепях Маркова.* — Докл. АН СССР **120** (1958), 465–467.
6. А. Н. Колмогоров, *Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **13** (1949), 281–300.
7. И. З. Розенкноп, *О некоторых свойствах совокупности замкнутых путей в системе из n состояний с заданными переходами между ними* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **14** (1950), 95–100.
8. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова.* Сб. трудов Межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казан. фед. ун-т, 2021.

Al'pin Yu. A., Bashkin I. V. Nonnegative chainable matrices and Kolmogorov's condition.

The paper proves that an indecomposable nonnegative matrix is chainable if and only if it satisfies Kolmogorov's condition, under which the

Markov chain determined by a stochastic matrix obeys the multidimensional local limit theorem.

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@kpfu.ru

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: IgVBashkin@stud.kpfu.ru

Поступило 10 октября 2021 г.