Н. А. Широков

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В
ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ В $\mathbb{C}^n$, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО
УБЫВАЮЩИЕ ВНУТРИ ОБЛАСТИ**

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, – область с C^2 -гладкой границей, $A(\Omega)$ – множество всех голоморфных в Ω функций. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $z \in \Omega$ положим

$$\partial^\alpha f(z) = f(\underbrace{z_1 \dots z_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{z_n \dots z_n}_{\alpha_n})(z_1, \dots, z_n), \quad |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

для модуля непрерывности $\omega(t)$ положим

$$H^\omega(\bar{\Omega}) = \{f \in A(\Omega) : |f(z_2) - f(z_1)| \leq c_f \omega(|z_2 - z_1|)\}.$$

Для $r \in \mathbb{N}$ пусть $H^{r+\omega}(\bar{\Omega}) = \{f \in H^\omega(\bar{\Omega}) : \partial^\alpha f(z) \in H^\omega(\bar{\Omega}), |\alpha| = r\}$, $H^{0+\omega}(\bar{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} H^\omega(\bar{\Omega})$.

На функцию $\omega(t)$ далее в соотношении (6) наложены ограничения.

Будем рассматривать только области Ω , выпуклые в геометрическом смысле, на которые дополнительно будут наложены некоторые требования. Предполагаем, что $\mathbb{O}_n = (0, \dots, 0) \in \Omega$ и что Ω задается условием $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$, где $\rho : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ и существует $c_0 > 0$ такое, что $|\text{grad } \rho(z)| \neq 0$ при $-c_0 \leq \rho(z) \leq c_0$. Пусть $\rho'_z(z) = (\rho'_{z_1}(z), \dots, \rho'_{z_n}(z))$, для $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ и $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $a \cdot b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ и при $h \in \mathbb{R}$ пусть $\Omega_h = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < h\}$. Далее считаем выполненными следующие условия.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, голоморфные функции.

Автор был поддержан грантом РФФИ 20-01-00209.

1. Для любого $z \in \Omega_{c_0} \setminus \Omega_{-c_0}$ и любых комплексных w_j , $1 \leq j \leq n$, справедливо неравенство

$$I_\rho(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho''_{z_j z_k}(z) w_j w_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho''_{\bar{z}_j \bar{z}_k}(z) \bar{w}_j \bar{w}_k + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho''_{z_j \bar{z}_k}(z) w_j \bar{w}_k \geq 0. \quad (1)$$

2. Если $-c_0 \leq \rho(\zeta) \leq \rho(z) \leq c_0$, то $|\rho'_z(z)(\zeta - z)| \asymp |\rho'_\zeta(\zeta) \cdot (\zeta - z)|$.

3. Пусть $\rho(\zeta) = h$, $0 \leq h \leq c_0$. Применим, если нужно, унитарное преобразование в $\mathbb{C}^n$ так, чтобы комплексная касательная гиперплоскость к $\partial\Omega_h$ в точке ζ имела бы вид $\{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n : \xi_1 = 0\}$, а также, чтобы при $2 \leq j \leq n$, $2 \leq \nu \leq n$, $j \neq \nu$ было выполнено $\rho''_{\zeta_j \bar{\zeta}_\nu} = 0$ и $\rho''_{\zeta_2 \bar{\zeta}_2}(\zeta) \geq \dots \geq \rho''_{\zeta_n \bar{\zeta}_n}(\zeta) \geq 0$. Положим

$$k_0(\zeta) = \rho''_{\zeta_2 \bar{\zeta}_2}(\zeta) \cdot \dots \cdot \rho''_{\zeta_n \bar{\zeta}_n}(\zeta) + \sum_{j=2}^n |\rho''_{\zeta_1 \bar{\zeta}_j}(\zeta)| \rho''_{\zeta_2 \bar{\zeta}_2}(\zeta) \cdot \dots \cdot \widehat{\rho''_{\zeta_j \bar{\zeta}_j}(\zeta)} \cdot \dots \cdot \rho''_{\zeta_n \bar{\zeta}_n}(\zeta), \quad (2)$$

где знак $\widehat{}$ в (2) означает пропуск соответствующего множителя. Характеристика $k_0(\zeta)$ в (2) соизмерима с характеристикой $k(\zeta)$ из (1.2) в [1], но удобнее для последующих действий. Для $z \in \partial\Omega_h$, $0 \leq h \leq c_0$, обозначим через $H(h, \delta, z)$ множество $H(h, \delta, z) = \{\zeta \in \partial\Omega_h : |\rho'_z(z) \cdot (\zeta - z)| \leq \delta\}$. Предположим, что существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от z, h и δ такие, что при $z \in \partial\Omega_h$, $0 \leq h \leq c_0$, $0 < \delta < c_1$ выполняется соотношение

$$\int_{H(h, \delta, z)} k_0(\zeta) dS_h(\zeta) \leq c_2 \delta^n, \quad (3)$$

где $dS_h(\zeta)$ в (3) означает поверхностную меру Лебега на $\partial\Omega_h$.

Приведем примеры областей, для которых можно проверить условия 1–3.

1. Предположим, что область Ω строго выпукла в аналитическом смысле, т.е., что для выражения $I_\rho(z, w)$, определенного в (1), с некоторой постоянной $c > 0$ справедливо неравенство $I_\rho(z, w) \geq c|w|^2$, $z \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \Omega_{-c_0}$.

2. Пусть $\alpha_j \geq 1$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n > n$, положим $\rho(z) = |z_1|^{2\alpha_1} + \dots + |z_n|^{2\alpha_n} - R$, $R > 0$.

Напомним, что на функцию $\omega(t)$ ниже в (6) наложены ограничения. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $f \in H^{r+\omega}(\bar{\Omega})$. Тогда существуют постоянные c_3 и c'_3 , такие, что для любого $N \in \mathbb{N}$ существует полином P_N , $\deg P_N \leq N$, для которого при $z \in \bar{\Omega}$ справедлива оценка

$$|f(z) - P_N(z)| \leq c_3 N^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad (4)$$

а для любого континуума $K \subset \Omega$ существует постоянная $c_4 = c_4(K) > 0$ такая, что при $z \in K$ выполнено соотношение

$$|f(z) - P_N(z)| \leq c'_3 e^{-c_4 N}. \quad (5)$$

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Соотношение (4) для $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и для выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ было доказано ранее в [1]. Доказательство этого утверждения из [1] остается справедливым при рассмотрении класса $H^{r+\omega}(\bar{\Omega})$ с модулем непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq c\omega(x). \quad (6)$$

Ниже в лемме 1 соотношение (4) будет доказано с использованием другого приближающего полинома, чем это сделано в [1].

Для C^1 -гладкой функции g , заданной в окрестности точки ζ , положим

$$\bar{\partial}g(\zeta) = g'_{\zeta_1} \bar{d}\zeta_1 + \dots + g'_{\zeta_n} \bar{d}\zeta_n.$$

При $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \Omega$ определим форму Л. А. Айзенберга [2]:

$$\begin{aligned} \omega_j(\zeta) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho'_{\zeta_j}(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \quad d\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{j=1}^n d\zeta_j, \\ \omega_\rho(\zeta) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \omega_j(\zeta) d\omega_1(\zeta) \wedge \dots \\ &\wedge d\omega_{j-1}(\zeta) \wedge d\omega_{j+1}(\zeta) \wedge \dots \wedge d\omega_n(\zeta) \wedge d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Построим продолжение f_0 функции f в $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}$, как это было сделано в (2.6)–(2.10) в [1], со свойствами $f_0 \in C(\mathbb{C}^n)$, $f_0|_{\bar{\Omega}} = f$, $f_0 \in C^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega})$,

$$\left(\sum_{j=1}^n |f'_{0\zeta_j}(\zeta)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \operatorname{dist}^{r-1}(\zeta, \partial\Omega) \omega(\operatorname{dist}(\zeta, \partial\Omega)). \quad (8)$$

Аналогично доказательству теоремы 1 в [1] получаем представление

$$f(z) = \int_{\Omega_{c_0} \setminus \Omega} \frac{\bar{\partial} f_0(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n}, \quad z \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

При выводе формулы (9) существенны оценки, аналогичные (2.19) и (2.20) из [1], именно,

$$\bar{\partial} f_0(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) = \chi(\zeta) dV(\zeta), \quad (10)$$

$$dV(\zeta) = \frac{1}{(2i)^n} \overline{d\zeta_1} \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \overline{d\zeta_n} \wedge d\zeta_n, \\ |\chi(\zeta)| \leq c \operatorname{dist}^{r-1}(\zeta, \partial\Omega) \omega(\operatorname{dist}(\zeta, \partial\Omega)) k_0(\zeta). \quad (11)$$

Для рассматриваемых областей $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ выполняется следующее свойство ([1], утверждение 4).

Лемма А. Пусть $0 \leq h \leq c_0$, $\zeta \in \partial\Omega_h$, $z \in \bar{\Omega}$, $\lambda = \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}$. Тогда λ лежит в области $L(\zeta)$, ограниченной большей дугой окружности $\{\sigma \in \mathbb{C} : |\sigma| = R\}$, $R = R(\Omega_{c_0})$, и хордой $\{s = 1 + e^{it}x, x \in \mathbb{R}, |s| \leq R\}$, $t = \frac{\pi}{2} - \arg(\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta))$.

Следующая лемма хорошо известна в теории аппроксимации; см. [3, гл. 9, §7].

Лемма В. Пусть область $L(\zeta) \subset \mathbb{C}$ определена в лемме А, $r, r_0 \geq 1$, $m \geq 1$. Тогда при $N \in \mathbb{N}$ существует полином $T_{N,m}$, $\deg T_{N,m} \leq N$, такой, что при $\lambda \in L(\zeta)$, $0 \leq k \leq r + 1$, имеем

$$\left| T_{N,m}^{(k)}(\lambda, \zeta) - \left(\frac{1}{(1-\lambda)^m} \right)^{(k)} \right| \leq c \frac{1}{|1-\lambda|^{m+k+r_0}} \cdot \frac{1}{N^{r_0}}, \quad (12)$$

$$|T_{N,m}^{(k)}(\lambda, \zeta)| \leq c N^{m+k}, \quad \lambda \in L(\zeta), |\lambda - 1| \leq \frac{1}{N}. \quad (12')$$

Постоянные c в (12) и (12') зависят от $L(\zeta)$, m , r и r_0 .

Для всех последующих рассуждений при выборе полиномов $T_{N,m}(\lambda, \zeta)$ полагаем $r_0 = 2r + 2$.

Положим

$$\pi_N(z) = \int_{\Omega_{c_0} \setminus \Omega} T_{N,n} \left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta \right) \bar{\partial} f_0(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta). \quad (13)$$

Лемма 1. $\pi_N(z)$ – полином, $\deg \pi_N \leq N$, для него справедливо соотношение (4), а также при $1 \leq |\alpha| \leq r$ выполнены оценки

$$|\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha \pi_N(z)| \leq c \frac{1}{N^{r-|\alpha|}} \omega\left(\frac{1}{N}\right). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $t_N = 1 - \frac{1}{N+1}$, тогда соотношение (4) при $z \in t_N \cdot \bar{\Omega}$ доказано в [1], соотношения (14) при $r > 0$ и при тех же z доказываются аналогично, именно, (13) влечет равенство

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha \pi_N(z) &= \int_{\Omega_{c_0} \setminus \Omega} \left(\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n} \right)_\lambda^{(|\alpha|)} \right. \\ &\quad \left. - T_{N,n\lambda}^{(|\alpha|)} \left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta \right) \right) \cdot \frac{(\rho'_\zeta(\zeta))^\alpha}{(\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta))^{|\alpha|}} \bar{\partial} f_0(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta), \end{aligned} \quad (15)$$

где выражения $(\dots)_\lambda^{(|\alpha|)}$ означают подстановку λ вместо $(*) \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}$, вычисление производной порядка $|\alpha|$ по λ и обратную подстановку указанного выражения $(*)$ вместо λ . Далее (10), (11), (15) влекут неравенство

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha \pi_N(z)| &\leq \int_{\Omega_{c_0} \setminus \Omega} \left| \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n} \right)_\lambda^{(|\alpha|)} \right. \\ &\quad \left. - T_{N,n\lambda}^{(|\alpha|)} \left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta \right) \right| \text{dist}^{r-1}(\zeta, \partial\Omega) \omega(\text{dist}(\zeta, \partial\Omega)) k_0(\zeta) dV(\zeta). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассуждая далее, как в [1], для интеграла (16) находим соотношение

$$|\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha \pi_N(z)| \leq c N^{-r+|\alpha|} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in t_N \cdot \bar{\Omega}, \quad |\alpha| \leq r + 1. \quad (17)$$

Далее, рассуждая аналогично [5, Гл. 6], где рассматривались классы Гёльдера в шаре, для функции $f \in H^{r+\omega}(\bar{\Omega})$ получаем оценку

$$|\partial^\alpha f(z)| \leq c N \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in t_N \cdot \partial\Omega, \quad |\alpha| = r + 1. \quad (18)$$

Из (17) и (18) находим, что при $|\alpha| = r + 1$ справедливо неравенство

$$|\partial^\alpha \pi_N(z)| \leq cN\omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in t_N \cdot \partial\Omega. \quad (19)$$

Пусть

$$\mathbb{C}_{z_0} = \{w \in \mathbb{C}^n : w = \xi z_0, \xi \in \mathbb{C}, z_0 \neq \mathbb{O}_n\}.$$

Для $z_0 \in t_N \cdot \partial\Omega$ полагаем

$$\Xi_{z_0} = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi z_0 \in \mathbb{C}_{z_0} \cap \bar{\Omega}\}.$$

Тогда Ξ_{z_0} – выпуклая область с C^2 -гладкой границей. Пусть $v_{N,z_0}(\xi) = (\partial^\alpha \pi_N)(\xi z_0)$, тогда $v_{N,z_0}(\xi)$ – полином от ξ степени $\leq N - r - 1$, и для $\xi \in t_N \cdot \Xi_{z_0}$ из (19) получаем соотношение $|v_{N,z_0}(\xi)| \leq cN\omega\left(\frac{1}{N}\right)$. Лемма Уолша [3, гл. 9, §6] для $\xi \in \partial\Xi_{z_0}$ дает оценку

$$|v_{N,z_0}(\xi)| \leq cN\omega\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{N}\right)^{N-r-1} \leq c'N\omega\left(\frac{1}{N}\right). \quad (20)$$

Соотношение (20) влечет неравенство

$$|\partial^\alpha \pi_N(z)| \leq cN\omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in \bar{\Omega}, \quad |\alpha| = r + 1. \quad (21)$$

Возьмем теперь $z \in \partial\Omega$, пусть $z_0 = t_N z$, $\nu = z - z_0$. Применим формулу Тейлора для функции $f - \pi_N$:

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_N(z) &= f(z_0) - \pi_N(z_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha (f - \pi_N)(z_0)}{\alpha!} \nu^\alpha \\ &+ (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha (f - \pi_N)(z_0 + t\nu)}{\alpha!} \nu^\alpha dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Воспользуемся соотношениями (4) и (14) для точки z_0 . Из (22) заключаем, что

$$\begin{aligned}
|f(z) - \pi_N(z)| &\leq |f(z_0) - \pi_N(z_0)| + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(z_0) - \partial^\alpha \pi_N(z_0)| |\nu^\alpha| \\
&+ (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(z_0 + t\nu) - \partial^\alpha \pi_N(z_0 + t\nu)| |\nu^\alpha| dt \\
&\leq cN^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right) + c \sum_{1 \leq |\alpha| \leq r} N^{-r+|\alpha|} \omega\left(\frac{1}{N}\right) \cdot N^{-|\alpha|} \\
&+ (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(z_0 + t\nu) - \partial^\alpha \pi_N(z_0 + t\nu)| |\nu^\alpha| dt.
\end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку для функции f при $|\alpha| = r+1$ справедлива оценка

$$|\partial^\alpha f(\zeta)| \leq c \operatorname{dist}^{-1}(\zeta, \partial\Omega) \omega(\operatorname{dist}(\zeta, \partial\Omega)), \quad \zeta \in \Omega, \tag{24}$$

а для $\partial^\alpha \pi_N(\zeta)$ имеется неравенство (21), то

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha f(z_0 + t\nu) - \partial^\alpha \pi_N(z_0 + t\nu)| &\leq c|z - z_0 - t\nu|^{-1} \omega(|z - z_0 - t\nu|) \\
&= c(1-t)^{-1} |\nu|^{-1} \omega((1-t)|\nu|), \quad |\alpha| = r+1.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из (25) получаем:

$$\begin{aligned}
(r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(z_0 + t\nu) \\
- \partial^\alpha \pi_N(z_0 + t\nu)| |\nu^\alpha| dt &\leq c \int_0^1 (1-t)^{r-1} |\nu|^r \omega((1-t)|\nu|) dt \\
&\leq c |\nu|^r \omega(|\nu|) \leq cN^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

В предпоследнем неравенстве в (26) мы использовали свойство (6) функции $\omega(t)$.

В итоге соотношения (23), (24), (26) дают оценку

$$|f(z) - \pi_N(z)| \leq cN^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in \partial\Omega,$$

которая является оценкой (4) для любой точки $z \in \bar{\Omega}$. Для того, чтобы получить оценку (14), следует применить формулу Тейлора к функции $\partial^\alpha(f - \pi_N)$, точкам z и z_0 , рассуждения, аналогичные проведенным при выводе формул (23)–(26), дадут неравенства (14). Лемма 1 доказана. $\square$

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $f(z) - \pi_N(z)$

Положим $q_N(z) = f(z) - \pi_N(z)$. Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Функцию $q_N(z)$ можно непрерывно продолжить на все пространство $\mathbb{C}^n$ функцией $h_N(z)$ со свойствами*

$$\text{supp } h_N \subset \frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \Omega, \quad h_N \in C^1(\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}),$$

$$|h'_{Nz_j}(z)| \leq c_{14} d^{r-1}(z) \omega(d(z)), \quad z \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}, \quad d(z) = \text{dist}(z, \partial\Omega), \quad (27)$$

для всех $j, 1 \leq j \leq n$, и для функции q_N справедливо представление

$$q_N(z) = \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \Omega} \frac{\bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n}. \quad (28)$$

Доказательство. Выберем $c_5 > 0$ так, чтобы для шара $\bar{B}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n : |z - \zeta| \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\zeta, \partial\Omega)\}$ выполнялось условие $\bar{B}(\zeta) \subset \frac{N+2}{N}\bar{\Omega}$, если $\bar{B}(\zeta) \cap \frac{N+c_5}{N}\bar{\Omega} \neq \emptyset$. Для $\zeta \in \frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \Omega$ положим

$$q_N(\zeta) = \begin{cases} q_N(\zeta_0), & \text{если } r = 0, \text{ точка } \zeta_0 \in \partial\Omega \\ \text{такая, что } \zeta_0 = \zeta_0(\zeta) \text{ и } |\zeta - \zeta_0| = \text{dist}(\zeta, \partial\Omega); \\ q_N(\zeta_0) + \sum_{1 \leq |\beta| \leq r} \frac{\partial^\beta q_N(\zeta_0)}{\beta!} (\zeta - \zeta_0)^\beta, & \text{если } r > 0. \end{cases} \quad (29)$$

Положим

$$q_N(\zeta) = 0, \quad \text{если } \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \frac{N+2}{N}\bar{\Omega}. \quad (30)$$

Теперь пусть $m_{2n} - 2n$ -мерная мера Лебега и

$$h_N(\zeta) = \frac{1}{|\bar{B}(\zeta)|_{2n}} \cdot \int_{\bar{B}(\zeta)} q_N(w) dm_{2n}(w), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}, \quad (31)$$

где $|\overline{B}(\zeta)|_{2n} = m_{2n}\overline{B}(\zeta)$. Обозначим выражение в правой части формулы (29) через $q_N(\zeta, \zeta_0)$, тогда $q_N(\zeta) = q_N(\zeta, \zeta_0(\zeta))$. Для оценки величины $h'_{N\overline{\zeta}}(\zeta)$ пусть $\zeta_0 = \zeta_0(\zeta) \in \partial\Omega$, $|\zeta - \zeta_0| = d(\zeta)$, тогда

$$h'_{N\overline{\zeta}}(\zeta) = \left(\frac{1}{|\overline{B}(\zeta)|_{2n}} \int_{\overline{B}(\zeta)} (q_N(w) - q_N(w, \zeta_0)) dm_{2n}(w) \right)'_{\overline{\zeta}}. \quad (32)$$

Если $\overline{B}(\zeta) \cap \frac{N+c_5}{N}\overline{\Omega} \neq \emptyset$, то $\overline{B}(\zeta) \subset \frac{N+2}{N}\overline{\Omega}$, тогда для оценки выражения (32) применимы рассуждения (2.17) в [1], которые дают оценку (27). Если же $\overline{B}(\zeta) \cap \frac{N+c_5}{N}\overline{\Omega} = \emptyset$, то имеем соотношение

$$\begin{aligned} |h'_{N\overline{\zeta}}(\zeta)| &\leq \left| \text{grad} \left(\frac{1}{|\overline{B}(\zeta)|_{2n}} \int_{\overline{B}(\zeta)} q_N(w) dm_{2n}(w) \right) \right| \\ &\leq cd^{-1}(\zeta) \sup_{\overline{B}(\zeta)} |q_N(w)| \leq cN \sup_{\overline{B}(\zeta)} |q_N(w)|. \end{aligned} \quad (33)$$

Если $r = 0$, то по лемме 1 имеем $|q_N(\zeta_1)| \leq c\omega(\frac{1}{N})$, $\zeta_0 \in \partial\Omega$, поэтому (29) и (33) влекут

$$|h'_{N\overline{\zeta}}(\zeta)| \leq cN\omega\left(\frac{1}{N}\right). \quad (34)$$

Если $r > 0$, то лемма 1 влечет неравенства

$$|q_N(\zeta_0)| \leq cN^{-r}\omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad |\partial^\beta q_N(\zeta_0)| \leq cN^{-r+|\beta|}\omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad 1 \leq |\beta| \leq r, \quad (35)$$

и (29) и (35) для $w \in \overline{B}(\zeta)$ дают соотношение $|q_N(w)| \leq cN^{-r}\omega\left(\frac{1}{N}\right)$, из (33) получаем

$$|h'_{N\overline{\zeta}}(\zeta)| \leq cN^{-r+1}\omega\left(\frac{1}{N}\right) \leq cd^{r-1}(z)\omega(d(z)).$$

Теорема 2 доказана. $\square$

§3. НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Следующий факт установлен в [4, Лемма 6].

Лемма С. Пусть $S_N(z) = ((1 + \frac{1}{3}z)(1 + \frac{1}{9}z^2))^N \stackrel{\text{def}}{=} 1 + zU_N(z)$, $\bar{Q} = \{z = x + iy : |y| \leq 1, -2 \leq x \leq 0\}$. Тогда

$$|S_N(z)| \leq 1, \quad z \in \bar{Q}, \quad (36)$$

$$|S_N(z)| \leq e^{-c_0(d)N}, \quad z \in \bar{Q}, \quad \text{dist}(z, \partial Q) \geq d, \\ c_0(d) > 0 \quad \text{при} \quad d > 0. \quad (37)$$

Применяя леммы А и С, получаем

Следствие. Пусть $R = R(\Omega)$ взято из леммы А, $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \bar{\Omega}$, $\theta_0(\zeta) = -\frac{\pi}{2} + \arg(\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta))$, значение $\arg$ выбрано между $-\pi$ и π . Положим

$$S_N(z, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} S_N\left(\frac{1}{R+1} e^{i\theta_0(\zeta)} \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)\right). \quad (38)$$

$S_N(z, \zeta)$ – полином от z степени $3N$, при $z \in \bar{\Omega}$ справедливо соотношение

$$|S_N(z, \zeta)| \leq 1. \quad (39)$$

Если $K \subset \Omega$ – компакт, то существует постоянная $c_0 = c_0(K) > 0$ такая, что при $z \in K$, $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \bar{\Omega}$ выполнено соотношение

$$|S_N(z, \zeta)| \leq e^{-c_0N}. \quad (40)$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что при $z \in \bar{\Omega}$, $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \Omega$ имеем

$$\frac{e^{i\theta_0(\zeta)}}{R+1} \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right) \in \bar{Q}. \quad \square$$

Напомним, что характеристика k_0 определена равенством (2).

Лемма 2. Пусть $d(\zeta) = \text{dist}(\zeta, \partial\Omega)$, $z \in \bar{\Omega}$.

Справедливо следующее неравенство:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{\zeta: |1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}| < h\} \setminus \bar{\Omega}} \frac{d^{r-1}(\zeta) \omega(d(\zeta)) k_0(\zeta)}{|1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}|^n} dm_{2n}(\zeta) \leq ch^r \omega(h). \quad (41)$$

Доказательство. При $m \geq 0$ положим

$$E_m = \{\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \bar{\Omega} : |1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}| < h\} \cap (\bar{\Omega}_{2^{-m}h} \setminus \bar{\Omega}_{2^{-m-1}h}), \quad (42)$$

$$I_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E_m} \frac{d^{r-1}(\zeta)\omega(d(\zeta))k_0(\zeta)}{\left|1 - \frac{z \cdot \rho'_z(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_z(\zeta)}\right|^n} dm_{2n}(\zeta), \quad (43)$$

тогда $I = \sum_{m=0}^{\infty} I_m$. В силу свойств 2 и 3 области Ω с некоторыми постоянными c'_1 и c'_2 получаем оценку

$$\begin{aligned} I_m &\leq c'_1 \int_{\{\zeta: |(\zeta-z)\rho'_z(z)| < c'_2 h\} \cap (\bar{\Omega}_{2^{-m}h} \setminus \bar{\Omega}_{2^{-m-1}h})} \frac{d^{r-1}(\zeta)\omega(d(\zeta))k_0(\zeta)}{(|(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} dm_{2n}(\zeta) \leq c \cdot 2^{-m(r-1)} h^{r-1} \omega(2^{-m}h) \\ &\times \int_{\{\zeta: |(\zeta-z)\rho'_z(z)| < c'_2 h\} \cap (\bar{\Omega}_{2^{-m}h} \setminus \bar{\Omega}_{2^{-m-1}h})} \frac{k_0(\zeta)}{(|(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} dm_{2n}(\zeta) \\ &\leq c 2^{-m(r-1)} h^{r-1} \omega(2^{-m}h) \\ &\times \int_{2^{-m-1}h}^{2^{-m}h} dt \int_{\{\zeta: |(\zeta-z)\rho'_z(z)| < c'_2 h\} \cap \Omega_t} \frac{k_0(\zeta) ds_t(\sigma)}{(|(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n}. \quad (44) \end{aligned}$$

В соотношении (44) $ds_t(\sigma) - 2n - 1$ -мера Лебега на Ω_t , σ – координаты на Ω_t , $\zeta = \zeta(\sigma, t)$.

При $0 \leq \nu \leq m - 1$ положим

$$\begin{aligned} G_\nu(t) &= \{\zeta : 2^{-\nu-1} \cdot c'_2 h \leq |(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| \leq 2^{-\nu} \cdot c'_2 h\} \cap \Omega_t, \\ G_m(t) &= \{\zeta : |(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| \leq 2^{-m} \cdot c'_2 h\} \cap \Omega_t. \end{aligned}$$

В этих обозначениях получаем

$$\int_{\Omega_t \cap \{|(\zeta-z)\rho'_z(z)| < c'_2 h\}} \frac{k_0(\zeta) ds_t(\sigma)}{(|(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} = \sum_{\nu=0}^m \int_{G_\nu(t)} \dots, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \int_{G_m(t)} \frac{k_0(\zeta) ds_t(\sigma)}{(|(\zeta-z) \cdot \rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} &\leq c \frac{1}{(2^{-m}h)^n} \int_{G_m(t)} k_0(\zeta) ds_t(\sigma) \\ &\leq c \cdot \frac{1}{(2^{-m}h)^n} \cdot (2^{-m}h)^n = c. \quad (46) \end{aligned}$$

При $0 \leq \nu \leq m - 1$ аналогично формуле (46) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{G_\nu(t)} \frac{k_0(\zeta) ds_t(\sigma)}{(|(\zeta - z)\rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} \\ & \leq c \frac{1}{(2^{-\nu}h)^n} \int_{G_\nu(t)} k_0(\zeta) ds_t(\sigma) \leq c \frac{1}{(2^{-\nu}h)^n} \cdot (2^{-\nu}h)^n = c. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (45)–(47) заключаем, что

$$\int_{\Omega_t \cap \{\zeta: |(\zeta - z)\rho'_z(z)| < c'_2 h\}} \frac{k_0(\zeta) ds_t(\sigma)}{(|(\zeta - z)\rho'_z(z)| + 2^{-m}h)^n} \leq c(m + 1). \quad (48)$$

Из (44) и (48) получаем

$$I_m \leq c 2^{-m(r-1)} h^{r-1} \omega(2^{-m}h) \cdot 2^{-m}h \cdot (m + 1) = c 2^{-mr} h^r \omega(2^{-m}h) \cdot (m + 1). \quad (49)$$

Теперь из (49) следует

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} I_m \leq h^r \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-mr} \omega(2^{-m}h) \cdot (m + 1). \quad (50)$$

Из свойства (6) функции $\omega(t)$ имеем оценку

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-mr} \omega(2^{-m}h) \cdot (m + 1) \leq c\omega(h). \quad (51)$$

Соотношения (50) и (51) доказывают лемму 2. $\square$

Теперь, применяя полином $T_{N,m}$ из леммы В и полином S_N из леммы С, определим полиномы $V_{N,m}(z, \zeta)$ от z следующим образом. Положим $\mu = \mu(\zeta) = \frac{1}{3(R+1)} e^{i\theta_0(\zeta)}$, $\lambda = \lambda(z, \zeta) = \frac{z \cdot \rho'_z(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}$ и пусть

$$\begin{aligned} & (1 - (1 - \lambda)^m T_{N,m}(\lambda, \zeta)) S_N(z, \zeta) \\ & = (1 - (1 - \lambda)^m T_{N,m}(\lambda, \zeta)) (1 + \mu(1 - \lambda))^N (1 + \mu^2(1 - \lambda)^2)^N \\ & \stackrel{\text{def}}{=} 1 + (1 - \lambda) \tilde{V}_{N,m}(\lambda, \zeta). \end{aligned} \quad (52)$$

Полагая в (52) $\lambda = \lambda(z, \zeta)$, определяем $V_{N,m}(z, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{V}_{N,m}(\lambda(z, \zeta), \zeta)$.

Лемма 3. Пусть $\lambda = \lambda(z, \zeta)$ определена выше, $z \in \bar{\Omega}$, $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \bar{\Omega}$. Тогда для полинома от λ $\tilde{V}_{N,m}(\lambda, \zeta)$ справедлива оценка

$$\left| \tilde{V}_{N,m}(\lambda, \zeta) \right| \leq \frac{c}{|1 - \lambda|}. \quad (53)$$

Доказательство. Из (12) и (12') для $T_{N,m}$ следует соотношение $|1 - (1 - \lambda)^m T_{N,m}(\lambda, \zeta)| \leq c$, соотношение (39) дает $|S_N(z, \zeta)| \leq 1$, поэтому

$$|1 + (1 - \lambda)\tilde{V}_{N,m}(\lambda, \zeta)| \leq c,$$

что и влечет (53). Лемма доказана. $\square$

§4. ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Определим функции $\rho_{N,k}(z)$, $1 \leq k \leq n$, $F_{N,k}(z)$, $1 \leq k \leq n - 1$, и полином $R_N(z)$. Положим при $z \in \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \rho_{N,1}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n} \left(1 - \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n\right) \\ &\times T_{N,n}\left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta\right) S_N(z, \zeta) \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \\ &= \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^n} \left(1 + \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right) V_{N,n}(z, \zeta)\right) \\ &\times \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) = q_N(z) + \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-1}} \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} q_N(z) + F_{N,1}(z); \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \rho_{N,2}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-1}} \left(1 + \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-1}\right) \\ &\times T_{N,n-1}\left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta\right) \cdot S_N(z, \zeta) \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-1}} \\
 &\times \left(1 + \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right) V_{N,n-1}(z, \zeta)\right) \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) = F_{N,1}(z) \\
 &+ \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta) V_{N,n-1}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-2}} \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} F_{N,1}(z) + F_{N,2}(z).
 \end{aligned} \tag{55}$$

Далее по индукции при $2 \leq k \leq n-1$ получаем

$$\begin{aligned}
 \rho_{N,k}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta) \cdot \dots \cdot V_{N,n-k+2}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-k+1}} \\
 &\times \left(1 - \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-k+1}\right) \\
 &\times T_{N,n-k+1}\left(\frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}, \zeta\right) S_N(z, \zeta) \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \\
 &= \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta) \cdot \dots \cdot V_{N,n-k+2}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-k+1}} \\
 &\times \left(1 + \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right) V_{N,n-k+1}(z, \zeta)\right) \\
 &\times \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) = F_{N,k-1}(z) \\
 &+ \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta) \cdot \dots \cdot V_{N,n-k+1}(z, \zeta)}{\left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right)^{n-k+2}} \\
 &\times \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} F_{N,k-1}(z) + F_{N,k}(z).
 \end{aligned} \tag{56}$$

При $k = n$ имеем

$$\rho_{N,n}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{V_{N,n}(z, \zeta) \cdot \dots \cdot V_{N,2}(z, \zeta)}{1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}} \left(1 + \left(1 - \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}\right) V_{N,1}(z, \zeta)\right)$$

$$\begin{aligned} \times \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) &= F_{N,n-1}(z) + \int_{\frac{N+2}{N}\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} V_{N,n}(z, \zeta) \cdot \dots \cdot V_{N,1}(z, \zeta) \\ \times \bar{\partial} h_N(\zeta) \wedge \omega_\rho(\zeta) &\stackrel{\text{def}}{=} F_{N,n-1}(z) + R_N(z). \end{aligned} \quad (57)$$

Функция $V_{N,m}(z, \zeta)$ является полиномом от z степени не выше $4N + m - 1$, поэтому $R_N(z)$ – полином, $\deg R_N \leq 4nN + \frac{n(n-1)}{2}$.

Получилась система:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{N,1} &= q_N + F_{N,1} \\ \rho_{N,2} &= F_{N,1} + F_{N,2} \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_{N,n} &= F_{N,n-1} + R_N \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Соотношение (58) влечет

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \rho_{N,k} &= q_N + F_{N,1} + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} (F_{N,k-1} + F_{N,k}) \\ &+ (-1)^{n-1} (F_{N,n-1} + R_N) = q_N + (-1)^{n-1} R_N. \end{aligned} \quad (59)$$

Лемма 4. Пусть $K \subset \Omega$ – компакт. Существуют постоянные $c_6 > 0$, $c_7 = c_7(K) > 0$, $c_8 = c_8(K) > 0$ такие, что при $1 \leq k \leq n$ справедливы оценки

$$|\rho_{N,k}(z)| \leq c_6 N^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in \bar{\Omega}, \quad (60)$$

$$|\rho_{N,k}(z)| \leq c_7 e^{-c_8 N}, \quad z \in K. \quad (61)$$

Доказательство. Положим $\delta = \frac{1}{N}$, $\lambda = \lambda(z, \zeta) = \frac{z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}{\zeta \cdot \rho'_\zeta(\zeta)}$, и $d(\zeta) = \text{dist}(\zeta, \partial\Omega)$, $\zeta \in \bar{\Omega}_{c_0} \setminus \bar{\Omega}$. Применяя соотношения (11), (12), (12') и (39),

получаем неравенства:

$$\begin{aligned}
 |\rho_{N,k}(z)| &\leq c \int_{(1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{1}{|1-\lambda|^n} \frac{\delta^{r_0}}{(|1-\lambda|+\delta)^{r_0}} \\
 &\quad \times d^{r-1}(\zeta) \omega(d(\zeta)) k_0(\zeta) dm_{2n}(\zeta) \\
 &\leq c \int_{(1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \frac{\delta^{r_0} d^{r-1}(\zeta) \omega(d(\zeta)) k_0(\zeta)}{|\zeta-z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)|^n (|\zeta-z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)|+\delta)^{r_0}} dm_{2n}(\zeta) \\
 &= c \int_{((1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \cap \{\zeta: |\zeta-z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)| \leq \delta\}} \dots\dots\dots \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} c \int_{((1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \cap \{\zeta: 2^{\nu-1}\delta \leq |\zeta-z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)| \leq 2^\nu \delta\}} \dots\dots\dots \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} J_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu. \tag{62}
 \end{aligned}$$

Для оценки интеграла J_0 применим лемму 2 и получим соотношение $J_0 \leq c\delta^r \omega(\delta)$. При оценке интеграла J_ν , $\nu \geq 1$, аналогично доказательству леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
 J_\nu &\leq c \frac{\delta^{r_0}}{(2^\nu \delta)^{n+r_0}} \int_{((1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \cap \{\zeta: |\zeta-z \cdot \rho'_\zeta(\zeta)| \leq 2^\nu \delta\}} d^{r-1}(\zeta) \omega(d(\zeta)) k_0(\zeta) dm_{2n}(\zeta) \\
 &\leq c \cdot 2^{-\nu(n+r_0)} \cdot \frac{1}{\delta^n} \cdot \delta^r \omega(\delta) \cdot (2^\nu \delta)^n = c \cdot 2^{-\nu r_0} \cdot \delta^r \omega(\delta),
 \end{aligned}$$

поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu \leq c\delta^r \omega(\delta) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu r_0} = c' \delta^r \omega(\delta). \tag{63}$$

Вместе с оценкой интеграла J_0 соотношения (62) и (63) дают неравенство (60).

Для доказательства оценки (61) при $z \in K \subset \Omega$ используем соотношение (40), которое влечет

$$|1 - (1-\lambda)^k T_{N,k}(\lambda, \zeta)| |S_N(z, \zeta)| \leq ce^{-c_8 N} \frac{\delta^{r_0}}{(|1-\lambda|+\delta)^{r_0}}. \tag{64}$$

Используя (64) и применяя обозначения в (62), получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\rho_{N,k}(z)| &\leq c e^{-c_8 N} \int_{(1+2\delta)\bar{\Omega} \setminus \Omega} \frac{1}{|1-\lambda|^n} \frac{\delta^{r_0}}{(|1-\lambda|+\delta)^{r_0}} \\ &\quad \times d^{r-1}(\zeta) \omega(d(\zeta)) k_0(\zeta) dm_{2n}(\zeta) \\ &\leq c \cdot e^{-c_8 N} (J_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu) \leq c e^{-c_8 N} \delta^r \omega(\delta). \end{aligned} \quad (65)$$

Теперь (65) влечет (61). Лемма 4 доказана. $\square$

Положим $\tilde{P}_N(z) = \pi_N(z) + (-1)^n R_N(z)$. Из равенства (59) и леммы 4 заключаем, что

$$|f(z) - \tilde{P}_N(z)| = |q_N(z) + (-1)^n R_N(z)| \leq c N^{-r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad z \in \bar{\Omega}, \quad (66)$$

$$|f(z) - \tilde{P}_N(z)| \leq c_7 e^{-c_8 N}, \quad z \in K. \quad (67)$$

Полином $\tilde{P}_N$ имеет степень не выше $4nN + \frac{n(n-1)}{2}$. Для того, чтобы получить полином P_N , $\deg P_N \leq N$, удовлетворяющий соотношениям (4) и (5), следует в вышеприведенном доказательстве провести рассуждения с заменой N на $N_1 = \lfloor \frac{N}{4n} \rfloor - 1$, тогда (66) и (67) влекут (4) и (5). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. А. Широков, *Равномерные полиномиальные приближения в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **333** (2006), 98–112.
2. Л. А. Айзенберг, *Интегральное представление функций, голоморфных в выпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$* . — ДАН СССР **151**, No. 6 (1963), 1247–1249.
3. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
4. Н. А. Широков, *Полиномиальные D -приближения, экспоненциально убывающие строго внутри континуума*. — Алгебра и анализ **6**, No. 6 (1994), 146–176.
5. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* , Мир, М., 1984.

Shirokov N. A. Polynomial approximations in a convex domain in $\mathbb{C}^n$ with exponential decay inside.

Let Ω be a convex domain in $\mathbb{C}^n$ satisfying some restrictions, and let a function f be holomorphic in Ω and continuous in $\bar{\Omega}$, $f \in H^{r+\omega}(\bar{\Omega})$ with a certain modulus of continuity ω . Then there are polynomials P_N ,

$\deg P_N \leq N$, such that $|f(z) - P_N(z)| \leq cN^{-r}\omega(\frac{1}{N})$, $z \in \overline{\Omega}$, and $|f(z) - P_N(z)| \leq c \exp(-c_0(K)N)$, $z \in K \subset \Omega$, where K is any compact set strictly inside Ω .

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7-9,
199034 С.-Петербург;
Научно-исследовательский университет
Высшая Школа Экономики,
ул. Союза Печатников 16,
190121 С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 9 июня 2021 г.