

А. Целищев

О ВЕКТОРНОЗНАЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ
ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ–РУБИО ДЕ ФРАНСИА ДЛЯ
СИСТЕМЫ УОЛША

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{I_m\}$ – последовательность попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{Z}$. В работе [13] Рубио де Франсия доказал, что для всякой функции $f \in L^p(\mathbb{T})$, $2 \leq p < \infty$, справедливо неравенство

$$\left\| \left(\sum_m |(\widehat{f} \mathbb{1}_{I_m})^\vee|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \quad (1.1)$$

Использованный здесь символ “ $\lesssim$ ” означает, что левая часть неравенства не превосходит правой части, умноженной на некоторую константу. Здесь эта константа не зависит ни от f , ни от интервалов I_m . Стоит отметить, что Рубио де Франсия доказывал свой результат для функций, заданных на $\mathbb{R}$, однако все результаты статьи [13] легко переносятся и на окружность $\mathbb{T}$.

Позднее, в работе [10] Н. Осипов доказал такое же неравенство (в “двойственной” формулировке) для функций Уолша. Поскольку функции Уолша понадобятся нам в дальнейшем, остановимся сейчас на некоторых их основных свойствах.

Функции Радемахера определяются так: $r_k(x) = \text{sign} \sin 2^k \pi x$. Для числа $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$, где $k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0$, мы можем определить n -ю функцию Уолша: $w_n = r_{k_1+1} r_{k_2+1} \dots r_{k_m+1}$. Хорошо известно, что функции Уолша образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0, 1]$. Для всякой функции f , определённой на отрезке $[0, 1]$, символом $\widehat{f}$ будем обозначать последовательность коэффициентов её разложения по этому базису: $\widehat{f}(n) = (f, w_n) = \int f w_n$.

Ключевые слова: система Уолша, мартингалы, свойство UMD.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 18-11-00053, <https://rscf.ru/project/18-11-00053>.

Пусть даны целые числа

$$n_1 = \sum_{k=0}^m \alpha_k 2^k \quad \text{и} \quad n_2 = \sum_{j=0}^m \beta_j 2^j,$$

где α_k и β_j – цифры в двоичной записи чисел n_1 и n_2 . Нам понадобится следующее обозначение:

$$n_1 \dot{+} n_2 = \sum_{k=0}^m ((\alpha_k + \beta_k) \bmod 2) 2^k.$$

Нетрудно видеть, что выполняется соотношение

$$w_{n_1} w_{n_2} = w_{n_1 \dot{+} n_2}.$$

Функции Уолша тесно связаны с двоичными мартингалами. Обозначим через $\mathcal{F}_k$ сигма-алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порождённую двоичными интервалами длины 2^{-k} (то есть интервалами вида $[2^{-k}s, 2^{-k}(s+1))$, где s – целое число между 0 и $2^k - 1$). В таком случае, условное матожидание функции f относительно $\mathcal{F}_k$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k) = \sum_{n=0}^{2^k-1} (f, w_n) w_n.$$

Для краткости мы будем использовать обозначение $\mathbb{E}_k f$ вместо $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)$. Если мы обозначим через δ_k отрезок $[2^{k-1}, 2^k - 1]$ в $\mathbb{N}_0$, то для мартингальных разностей справедлива формула

$$\Delta_k f = \mathbb{E}_k f - \mathbb{E}_{k-1} f = \sum_{n \in \delta_k} (f, w_n) w_n, \quad k \geq 1.$$

Мы также будем считать, что $\delta_0 = \{0\}$ и $\Delta_0 f = (f, w_0) w_0 = \int_0^1 f$.

Для всякого множества $A \subset \mathbb{N}_0$ определим ортогональную проекцию в пространстве $L^2[0, 1]$:

$$P_A f = \sum_{n \in A} (f, w_n) w_n = (\chi_A \hat{f})^\vee.$$

Если $\{I_s\}_s$ – набор попарно не пересекающихся интервалов в $\mathbb{N}_0$, то для всякой функции $f \in L^p[0, 1]$, $2 \leq p < \infty$, справедлив следующий

аналог неравенства Рубио де Франсиа (1.1):

$$\left\| \left(\sum_s |P_{I_s} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \quad (1.2)$$

Как уже отмечалось, доказательство этого неравенства (в двойственной форме) приведено в работе [10]. Мы, однако, предложим другое доказательство (основывающееся на той же комбинаторной конструкции, но без перехода к двойственности), которое можно обобщить на функции f , принимающие значения в некотором банаховом пространстве. Поскольку все рассматриваемые нами функции определены на отрезке $[0, 1]$, мы будем опускать это обстоятельство в наших обозначениях.

Обозначим через ε_s последовательность функций Радемахера (их не стоит путать с функциями r_k , использующимися при определении функций Уолша; это другая “копия” последовательности функций Радемахера, и можно считать, что они определены на некотором другом вероятностном пространстве). Если X – банахово пространство, а f – X -значная функция, то аналог неравенства (1.2) имеет следующий вид:

$$\left\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \right\|_{L^p(\text{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}. \quad (1.3)$$

Символом $\text{Rad}X$ обозначено замыкание в $L^p(X)$ множества X -значных функций вида

$$\sum_{j=1}^k \varepsilon_j(\omega) x_j.$$

Несложно видеть, что из неравенства Хинчина–Кахана (см., например, [3, стр. 191]) следует, что это определение не зависит от p , если $1 \leq p < \infty$. Кроме того, из неравенства Хинчина следует, что для $X = \mathbb{R}$ неравенства (1.2) и (1.3) равносильны.

Приведём теперь следующее определение.

Определение. Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством LPR_p^w , если неравенство (1.3) выполняется для всякой функции $f \in L^p(X)$.

Для контекста функций Уолша, это – естественный аналог свойства LPR_p , которое было в тригонометрическом случае аксиоматизировано в работе [1]. Свойство LPR_p изучалось в том числе в работах [5, 12].

В настоящей работе мы докажем аналоги результатов из работы [12] для функций Уолша. Перейдём теперь к конкретным формулировкам результатов.

Теорема 1. *Если X – такая банахова решётка, что ассоциированная с ней 2-вогнутая решётка $X_{(2)}$ является банаховой решёткой со свойством UMD, то X обладает свойством LPR_p^w для $2 < p < \infty$.*

Упомянутое в формулировке свойство UMD естественно для многих вопросов, касающихся анализа для функций со значениями в банаховых пространствах. По определению, это свойство означает, что для всякого мартингала со значениями в банаховом пространстве X сумма его мартингальных разностей – безусловно сходящийся ряд в $L^p(X)$ (это условие не зависит от p при $1 < p < \infty$). Это свойство имеет также множество равносильных переформулировок, одна из которых (см. главу 6 в книге [11]) – равномерная ограниченность операторов P_I для всякого отрезка $I \subset \mathbb{N}_0$.

Упомянем тут также, что решётка $X_{(2)}$ задаётся следующей нормой:

$$\|x\|_{X_{(2)}} = \||x|^{1/2}\|^2.$$

Она действительно будет банаховой решёткой, если решётка X 2-выпукла. Более подробную информацию о банаховых решётках можно найти в книге [8], а все необходимые определения будут приведены в п. 2.3.

Теорема 2. *Если X – банахово пространство, обладающее свойством LPR_p^w для некоторого $p \geq 2$, то X также обладает свойством LPR_q^w для всякого $q > p$.*

Приведённые теоремы являются аналогами результатов работы [12] в контексте системы Уолша. Отметим, однако, что методы, которыми мы будем пользоваться в нашей работе, отличаются в некоторых существенных деталях от методов из работы [12] – мы будем, прежде всего, использовать мартингальные преобразования (вместо сингулярных интегралов) и, кроме того, для нас будут важны специфические комбинаторные свойства функций Уолша.

§2. СВОЙСТВО LPR_p^w В БАНАХОВЫХ РЕШЁТКАХ

В этом параграфе мы докажем теорему 1. Отметим прежде всего, что для банаховых решёток X , обладающих свойством UMD, неравенство (1.3) можно записать в том же виде, что и неравенство для

скалярных функций:

$$\left\| \left(\sum_s |P_{I_s} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}.$$

Этот факт следует из неравенства Хинчина–Море (см., например, [4, стр.86]; для неравенства Хинчина–Море необходим конечный котип банаховой решётки – отметим, что из свойства UMD следует конечный котип, этот факт можно найти, например, в книге [11, стр. 409]).

Для того, чтобы доказать неравенство для банаховых решёток, мы сначала приведём доказательство для скалярных функций f , отличное от доказательства из работы [10], а потом обобщим его на случай X -значных функций f .

2.1. Комбинаторная конструкция. Пусть интервалы I_s имеют вид $I_s = [a_s, b_s)$. Нам потребуется разбиение этих интервалов, построенное в работе [10]:

$$I_s = \{a_s\} \cup \bigcup_{j \in \Theta_s} J_{js} \cup \bigcup_{i \in \tilde{\Theta}_s} \tilde{J}_{is}, \quad \text{где } \Theta_s, \tilde{\Theta}_s \subset \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Интервалы J_{js} и $\tilde{J}_{is}$ таковы, что выполняются следующие соотношения:

$$a_s \dot{+} J_{js} = \delta_j \quad \text{и} \quad b_s \dot{+} \tilde{J}_{is} = \delta_i. \quad (2.2)$$

Мы коротко опишем конструкцию этого разбиения (а все детали читатель может найти в статье [10]).

Опустим индекс s и построим разбиение интервала $I = [a, b)$. Рассмотрим двоичную запись чисел a и b :

$$a = \sum_{k=0}^N \alpha_k 2^k, \quad b = \sum_{k=0}^N \beta_k 2^k.$$

Для начала, построим разбиение интервала $[0, \beta)$. Пронумеруем все цифры, равные 1, в двоичной записи числа β :

$$\beta_{k_1} = \beta_{k_2} = \dots = \beta_{k_l} = 1, \quad k_1 > k_2 > \dots > k_l.$$

После этого возьмём следующие интервалы:

$$\tilde{J}_{k_i+1} = \left[\sum_{r=1}^{i-1} 2^{k_r}, \sum_{t=1}^i 2^{k_t} \right), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Нетрудно видеть, что $b \dot{+} \tilde{J}_{k_i+1} = \delta_{k_i+1}$.

Один из этих отрезков содержит число a . Предположим, что $a \in \tilde{J}_{k_m+1}$. Это означает, что $\alpha_j = \beta_j$ для $j > k_m$ и $\alpha_{k_m} = 0$. Теперь наша задача – построить разбиение интервала

$$\left(a, \sum_{t=1}^m 2^{k_t}\right).$$

Это можно сделать похожим образом. Пронумеруем все цифры в двоичном представлении числа a , равные нулю:

$$\alpha_{k_m} = \alpha_{\varkappa_h} = \dots = \alpha_{\varkappa_1} = 0, \quad k_m > \varkappa_h > \dots > \varkappa_1.$$

После этого, возьмём следующие интервалы:

$$J_{\varkappa_i+1} = \left[a + \sum_{j=1}^{i-1} 2^{\varkappa_j} + 1, a + \sum_{g=0}^i 2^{\varkappa_g}\right], \quad i = 1, 2, \dots, h.$$

Нетрудно видеть, что $a \in J_{\varkappa_i+1} = \delta_{\varkappa_i+1}$, и таким образом мы построили требуемое разбиение.

2.2. Основное рассуждение для скалярных функций. Для доказательства неравенства (1.2) нам теперь достаточно доказать следующие три неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_s |P_{\{a_s\}} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} &\lesssim \|f\|_{L^p}, \\ \left\| \left(\sum_s \left| \sum_{j \in \Theta_s} P_{J_{j_s}} f \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} &\lesssim \|f\|_{L^p}, \\ \left\| \left(\sum_s \left| \sum_{i \in \tilde{\Theta}_s} P_{\tilde{J}_{i_s}} f \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} &\lesssim \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Первое неравенство легко вывести из соображений ортогональности (поскольку $\sum_s |P_{\{a_s\}} f|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$). Таким образом, нам достаточно доказать второе (а третье доказывается аналогично). Введём обозначение:

$$J_s = \bigcup_{j \in \Theta_s} J_{j_s}.$$

Заметим, что из формул (2.2) вытекает соотношение

$$P_{J_s} f = w_{a_s} \sum_{j \in \Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f).$$

Пользуясь этой формулой, мы можем переписать наше неравенство:

$$\left\| \left(\sum_s \left| \sum_{j \in \Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Обозначим через G следующий оператор, действующий из L^p в пространство ℓ^2 -значных функций:

$$f \mapsto \left(\sum_{j \in \Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f) \right)_s. \quad (2.3)$$

Наша задача свелась к тому, чтобы доказать, что G – ограниченный оператор из L^p в $L^p(\ell^2)$. Для ℓ^2 -значной функции g рассмотрим подходящую максимальную функцию:

$$g^\#(x) = \sup_{I \ni x} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \|g(t) - g_I\|_{\ell^2}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \text{где } g_I = \frac{1}{|I|} \int_I g(s) ds \in \ell^2.$$

Здесь супремум берётся по всем двоичным интервалам, содержащим точку x .

Кроме того, нам потребуется также диадическая максимальная функция (на этот раз мы определяем её для скалярных функций f):

$$M_2 f(x) = \sup_{I \ni x} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь супремум также берётся по всем двоичным интервалам, содержащим точку x .

Наша цель – доказать следующую поточечную оценку:

$$(Gf)^\#(x) \lesssim M_2 f(x). \quad (2.4)$$

Из этого неравенства вытекает доказываемая нами теорема для скалярных функций f , поскольку мы можем написать:

$$\|Gf\|_{L^p(\ell^2)} \lesssim \|(Gf)^\#\|_{L^p} \lesssim \|M_2 f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Здесь первое неравенство следует из того известного факта, что неравенство

$$\|g\|_{L^p(\ell^2)} \lesssim \|g^\#\|_{L^p}$$

выполняется для всякой ℓ^2 -значной функции g , такой, что $\int_0^1 g = 0$. Отметим, что $\int_0^1 Gf = 0 \in \ell^2$, поскольку $\int_0^1 \Delta_j(h) = 0$ для любой функции h и любого числа $j > 0$.

Для того чтобы доказать неравенство (2.4), достаточно проверить, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_s \left| \sum_{j \in \Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f) - h_s \right|^2 \right)^{1/2} \lesssim \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

где

$$h_s = \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{j \in \Theta_s} \Delta_j(w_{a_s} f).$$

Здесь I – двоичный интервал.

Заметим, что для всякой функции g интеграл $\int_I \Delta_j(g)$ равен нулю, если $2^{j-1} \geq |I|^{-1}$ – это так, поскольку для всякого такого интервала $\int_I \mathbb{E}_j g = \int_I \mathbb{E}_{j-1} g = \int_I g$. Таким образом, определение функции h_s можно переписать в виде

$$h_s = \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{\substack{j \in \Theta_s, \\ 2^j \leq |I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s} f).$$

С другой стороны, для всякой функции g функция $\Delta_j(g)$ постоянна на интервале I , если $|I| \leq 2^{-j}$ (поскольку обе функции $\mathbb{E}_j g$ и $\mathbb{E}_{j-1} g$ постоянны на I). Таким образом, левая часть формулы (2.5) равна следующему выражению:

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_s \left| \sum_{\substack{j \in \Theta_s, \\ 2^{j-1} \geq |I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s} f) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим сужение функции f на интервал I : $\tilde{f} = f|_I$. Пусть $|I| = 2^{-m}$ и одно из чисел a_s записывается в двоичной системе счисления в виде

$$a_s = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_t},$$

где

$$k_1 < \dots < k_t, \quad k_l \leq m-1, \quad k_{l+1} \geq m.$$

Обозначим через $\tilde{a}_s$ число

$$2^{k_{l+1}-m} + \dots + 2^{k_t-m}.$$

Кроме того, через $\tilde{w}_n$ обозначим функции Уолпа, “отмасштабированные” на отрезок I (то есть они образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(I; |I|^{-1}dx)$). Будем также использовать обозначение $\tilde{\Delta}_j$ для двоичных мартингалных разностей на I . Тогда функция $\Delta_j(w_{a_s}f)$ совпадает на I с функцией $\pm \tilde{\Delta}_{j-m}(\tilde{w}_{\tilde{a}_s}\tilde{f})$ (отметим здесь, что функции $r_{k_1+1}, \dots, r_{k_l+1}$ на I – постоянные, равные ± 1 ; кроме того, операторы Δ_j “локальны” в том смысле, что значение функции $\Delta_j g$ на I зависит только от сужения g на интервал I , если $2^{j-1} \geq |I|$).

Теперь нетрудно видеть, что из того факта, что множества

$$\{a_s \dot{+} \delta_j\}_{j \in \Theta_s}$$

попарно не пересекаются при разных значениях s и j (а это так, поскольку $a_s \dot{+} \delta_j = J_{js}$; см. формулу (2.2)), следует, что множества

$$\{\tilde{a}_s \dot{+} \delta_{j-m}\}_{\substack{j \in \Theta_s, \\ j \geq m+1}}$$

также попарно не пересекаются.

Следовательно, просто воспользовавшись теоремой Планшереля, можно заключить, что

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_s \left| \sum_{\substack{j \in \Theta_s, \\ 2^{j-1} \geq |I|^{-1}}} \Delta_j(w_{a_s}f) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \|\tilde{f}\|_{L^2(I; |I|^{-1}dx)} = \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \right)^{1/2},$$

и таким образом доказательство неравенства (2.4) завершено.

2.3. Неравенство для функций со значениями в решётке. После того, как мы доказали неравенство (2.4), мы можем закончить доказательство теоремы 1 аналогично тому, как это делается в статье [12] (для обычного свойства LPR_p).

Пусть X – банахова решётка. Не умаляя общности, мы можем считать, что X является пространством Кётэ на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) (см. [8, стр. 25]). В самом деле, из свойства UMD следует, что решетка X рефлексивна (см. [11, стр. 183]); кроме того, можно считать её сепарабельной и что в ней есть слабая единица. Помимо этого, решетка X обладает свойством Фату, поскольку ввиду

рефлексивности, она является сопряженной с X' (см. [8, стр. 30]). Напомним, что решётка $X_{(2)}$ задаётся нормой

$$\|x\|_{X_{(2)}} = \| |x|^{1/2} \|_X^2.$$

Пространство $X_{(2)}$ является банаховой решёткой тогда и только тогда, когда X – 2-выпуклая решётка, то есть для любых $x_1, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Аналогично скалярному случаю (см. начало предыдущего параграфа), ясно, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие три неравенства (на этот раз для X -значных функций f):

$$\left\| \left(\sum_s |P_{\{a_s\}} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}, \quad (2.6)$$

$$\left\| \left(\sum_s \left| \sum_{j \in \Theta_s} P_{J_{js}} f \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}, \quad (2.7)$$

$$\left\| \left(\sum_s \left| \sum_{i \in \tilde{\Theta}_s} P_{\tilde{J}_{is}} f \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)}. \quad (2.8)$$

Оценка (2.6) в настоящем контексте также доказывается легко. Заметим, что для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ следующая оценка вытекает из теоремы Планшереля:

$$\left(\sum_s |(f, w_{a_s})|^2 \right)^{1/2}(\omega) \leq \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2}(\omega).$$

Воспользовавшись этим неравенством, напомним:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_s |(f, w_{a_s})|^2 \right)^{1/2} \right\|_X &\lesssim \left\| \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \left(\int_0^1 \|f\|_X^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 \|f\|_X^p \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(X)}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались 2-выпуклостью решётки X во втором неравенстве (мы можем считать, что f является конечной линейной комбинацией функций Уолша и, следовательно, константой на двоичных интервалах длины 2^{-n} для достаточно большого значения n ; таким образом, вместо интеграла мы можем написать сумму и воспользоваться 2-выпуклостью).

Приступим теперь к доказательству неравенств (2.7) и (2.8). Мы покажем только, как доказывать неравенство (2.7), поскольку (2.8) доказывается аналогично.

Напомним, что пространство $X(\ell^2)$ – это пространство последовательностей $x = (x_j) \subset X$, таких, что

$$\|x\|_{X(\ell^2)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_X < \infty.$$

Определим оператор G точно так же, как мы это делали для скалярных функций (см. формулу (2.3)). На этот раз наша цель – доказать, что G – ограниченный оператор из $L^p(X)$ в $L^p(X(\ell^2))$.

Для всякой X -значной функции f определим функцию $M_2 f$ следующим образом:

$$M_2 f(x) = \sup_{I \ni x} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \right)^{1/2}.$$

Отметим, что это функция двух переменных – для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ это обычная максимальная функция, применённая к скалярной функции $f(\cdot, \omega)$.

Для $X(\ell^2)$ -значной функции g аналогичным образом определим функцию $g^\#$: для всякого фиксированного $\omega \in \Omega$ рассмотрим функцию $g^\#(\cdot, \omega)$ (которую мы уже определяли в предыдущем параграфе для ℓ^2 -значной функции $g(\cdot, \omega)$). Таким образом, формула, задающая функцию $g^\#$ для $X(\ell^2)$ -значной функции $g = (g_1, g_2, \dots)$, имеет следующий вид:

$$g^\#(x) = \sup_{I \ni x} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(t) - (g_I)_j|^2 dt \right)^{1/2},$$

где

$$g_I = \frac{1}{|I|} \int_I g(s) ds \in X(\ell^2).$$

Из неравенства (2.4), доказанного нами для скалярных функций, следует в нашем контексте оценка

$$G(f(\cdot, \omega))^{\#} \lesssim M_2(f(\cdot, \omega)), \quad \text{п.в. } \omega \in \Omega.$$

Таким образом, справедливо следующее неравенство:

$$\|(Gf)^{\#}\|_{L^p(X)} \lesssim \|M_2f\|_{L^p(X)}.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 нам остаётся доказать две оценки:

$$\|g\|_{L^p(X(\ell^2))} \lesssim \|g^{\#}\|_{L^p(X)} \quad \text{и} \quad \|M_2f\|_{L^p(X)} \lesssim \|f\|_{L^p(X)} \quad (2.9)$$

для произвольной $X(\ell^2)$ -значной функции g , такой, что $\int g = 0$ (напомним, в предыдущем параграфе мы доказали, что $\int Gf = 0$) и X -значной функции f . Вторая из этих оценок следует из ограниченности максимальной функции Харди–Литтлвуда в $L^p(X)$ для банаховых решёток X со свойством UMD (это утверждение впервые было доказано в работе [2]; см. также [14, теорема 3]) – просто применим это утверждение к $X_{(2)}$:

$$\|M_2f\|_{L^p(X)}^2 = \|M[|f|^2]\|_{L^{p/2}(X_{(2)})} \lesssim \| |f|^2 \|_{L^{p/2}(X_2)} = \|f\|_{L^p(X)}^2.$$

Здесь Mf – стандартная (двоичная) максимальная функция Харди–Литтлвуда:

$$Mf(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(s)| ds.$$

Отметим, что $M_2f(x) = M[|f|^2]^{1/2}$.

Объясним теперь, почему первое из неравенств (2.9) справедливо для всякой $X(\ell^2)$ -значной функции $g = (g_1, g_2, \dots)$, интеграл которой равен нулю. Воспользуемся следующим стандартным неравенством для ℓ^2 -значных функций u и v , таких, что $\int_0^1 v = 0$ (см., например, [9, стр. 223] для случая скалярных функций; как обычно, доказательство для ℓ^2 -значных ничем не отличается):

$$\int_0^1 |\langle u(x), v(x) \rangle| dx \lesssim \int_0^1 (\mathcal{S}u)(x) v^{\#}(x) dx.$$

Здесь через $\mathcal{S}$ обозначена мартингаловая квадратичная функция относительно фильтрации Хаара.

Возьмём произвольную функцию $h \in L^{p'}(X^*(\ell^2))$ и напомним:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1] \times \Omega} \langle g, h \rangle \right| &\lesssim \int_{[0,1] \times \Omega} g^\# \mathcal{S}h \lesssim \|g^\#\|_{L^p(X)} \|\mathcal{S}h\|_{L^{p'}(X^*)} \\ &\lesssim \|g^\#\|_{L^p(X)} \|h\|_{L^{p'}(X^*(\ell^2))}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались следующим простым утверждением (отметим, что если X – банахова решётка со свойством UMD, то X^* – тоже банахова решётка, обладающая свойством UMD).

Лемма. *Если Y – банахова решётка, обладающая свойством UMD, а $h = (h_1, h_2, \dots) \in Y(\ell^2)$ – $Y(\ell^2)$ -значная функция, то для всякого q , $1 < q < \infty$, верно неравенство $\|\mathcal{S}h\|_{L^q(Y)} \lesssim \|h\|_{L^q(Y(\ell^2))}$.*

Найти ссылку на именно этот факт оказалось затруднительно, поэтому приведём здесь его доказательство.

Доказательство. Опять будем предполагать, что Y – банахово пространство функций, заданных на пространстве с мерой (Ω', Σ', μ') . Обозначим через d_j операторы мартингальной разности для фильтрации Хаара. Воспользовавшись неравенством Хинчина и интегральным неравенством Минковского, напомним:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}h(x, \omega') &= \left(\sum_n \sum_j |d_j h_n(x, \omega')|^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\sum_n \left[\mathbb{E} \left| \sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x, \omega') \right|^2 \right] \right)^{1/2} \leq \mathbb{E} \left(\left[\sum_n \left| \sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x, \omega') \right|^2 \right]^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Используя это неравенство, оценим норму квадратичной функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}h\|_{L^q(Y)}^q &\lesssim \int \left\| \mathbb{E} \left(\left[\sum_n \left| \sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x) \right|^2 \right]^{1/2} \right) \right\|_Y^q dx \\ &\leq \int \mathbb{E} \left[\left\| \left(\sum_n \left| \sum_j \varepsilon_j d_j h_n(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_Y^q \right] dx \\ &= \mathbb{E} \left(\left\| \sum_j \varepsilon_j d_j h \right\|_{L^q(Y(\ell^2))}^q \right) \lesssim \|h\|_{L^q(Y(\ell^2))}^q. \end{aligned}$$

Здесь последнее неравенство вытекает из определения свойства UMD для пространства $Y(\ell^2)$ (которое действительно обладает свойством UMD, если это верно для Y , см. обзор [14]). $\square$

Нам остаётся перейти в неравенстве (2.10) к супремуму по всем функциям $h \in L^{p'}(X^*(\ell^2))$ единичной нормы и получить требуемую оценку.

§3. ВЫВОД СВОЙСТВА LPR_q^w ИЗ LPR_p^w ДЛЯ $q > p$

Перейдём теперь к доказательству сформулированной во введении теоремы 2. Пусть банахово пространство X обладает свойством LPR_p^w (напомним, это означает, что неравенство (1.3) выполняется для всякой функции $f \in L^p(X)$). Прежде всего, отметим, что отсюда следует, что X обладает свойством UMD (достаточно взять “набор” $\{I_s\}$ состоящим из одного отрезка $[0, N]$ и получить равномерную ограниченность проекторов $P_{[0, N]}$ – отсюда уже следует свойство UMD, см., например, [11, стр. 254]).

Наша цель – доказать, что для произвольного семейства непересекающихся интервалов $\{I_s\}$ следующее неравенство верно для всякой функции $f \in L^q(X)$:

$$\left\| \sum_s \varepsilon_s P_{I_s} f \right\|_{L^q(\text{Rad} X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}, \quad q > p.$$

Мы опять будем пользоваться описанной нами выше конструкцией разбиения интервалов I_s из работы [10] (см. формулы (2.1) и (2.2)). Введём также обозначение $J_{0s} = a_s$. Достаточно доказать два неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} P_{J_{js}} f \right\|_{L^q(\text{Rad} X)} &\lesssim \|f\|_{L^q(X)}, \\ \left\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{i \in \tilde{\Theta}_s} P_{\tilde{J}_{is}} f \right\|_{L^q(\text{Rad} X)} &\lesssim \|f\|_{L^q(X)}. \end{aligned}$$

Поскольку эти неравенства доказываются аналогично, покажем только, как вывести первое из них. Напомним, что $P_{J_{js}} f = w_{a_s} \Delta_j(w_{a_s} f)$ и таким образом наше неравенство можно переписать в следующем

виде:

$$\left\| \sum_s \varepsilon_s w_{a_s} \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j(w_{a_s} f) \right\|_{L^q(\text{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}.$$

Воспользовавшись стандартным неравенством Кахана (“принципом сжатия”, см. [3, стр.181]), можно заключить, что наше неравенство эквивалентно следующему:

$$\left\| \sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j(w_{a_s} f) \right\|_{L^q(\text{Rad}X)} \lesssim \|f\|_{L^q(X)}.$$

Рассмотрим оператор T , переводящий функцию $f \in L^p(X)$ в

$$\sum_s \varepsilon_s \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j(w_{a_s} f).$$

Как видно из вышесказанного, свойство LPR_p^w влечёт ограниченность T как оператора из $L^p(X)$ в $L^p(\text{Rad}X)$ (здесь важно отметить, что $\bigcup_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} J_{js}$ – отрезок в $\mathbb{N}_0$) и наша цель – доказать, что T действует также из $L^q(X)$ в $L^q(\text{Rad}X)$.

Рассмотрим сопряжённый оператор $T^* : L^{p'}(\text{Rad}X^*) \rightarrow L^{p'}(X^*)$ (заметим, что $(\text{Rad}X)^* \sim \text{Rad}X^*$, см. третью часть в статье [6]). Нетрудно убедиться (прямым подсчётом), что T^* имеет следующий вид:

$$T^* \left(\sum_s \varepsilon_s g_s \right) = \sum_s w_{a_s} \sum_{j \in \Theta_s \cup \{0\}} \Delta_j g_s. \quad (3.1)$$

Здесь $g = \sum_s \varepsilon_s g_s$ – $\text{Rad}X^*$ -значная функция. Для того, чтобы доказать, что T^* – ограниченный оператор из $L^{q'}(\text{Rad}X^*)$ в $L^{q'}(X^*)$, мы воспользуемся векторнозначным вариантом разложения Кальдерона–Зигмунда из статьи [7].

Предложение 1. Пусть E – банахово пространство, g – простая E -значная функция (под этим мы подразумеваем, что $g = \mathbb{E}_k g$ для достаточно больших значений k), а λ – произвольное положительное число. Тогда найдутся такие простые функции b и h , что $g = b + h$ и выполняются следующие условия:

- 1) $\|h\|_{L^\infty(Y)} \lesssim \lambda$ и $\|h\|_{L^1(Y)} \lesssim \|g\|_{L^1(Y)}$;
- 2) $\int_0^1 b = 0$ и для всякого $n \geq 1$ мы имеем $\Delta_n b = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_n b$, где $e_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ и $|\bigcup_{n \geq 1} e_n| \lesssim \lambda^{-1} \|g\|_{L^1(Y)}$.

Наша цель – доказать, что T^* – оператор слабого типа $(1, 1)$, поскольку в таком случае ограниченность из $L^{q'}(\text{Rad}X^*)$ в $L^{q'}(X^*)$ будет следовать из интерполяционной теоремы Марцинкевича. Зафиксируем число $\lambda > 0$ и применим сформулированное предложение для $Y = \text{Rad}X^*$ и нашей функции g . Заметим, что мы можем рассматривать только простые функции g , поскольку из-за соображений плотности мы можем считать, что набор отрезков $\{I_s\}$ конечен и всякая функция g_s является конечной линейной комбинацией функций Уолша. Напишем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & |\{x : \|(T^*g)(x)\|_{X^*} > \lambda\}| \\ & \leq |\{x : \|(T^*b)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| + |\{x : \|(T^*h)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Второе слагаемое в этой формуле оценивается при помощи ограниченности T^* как оператора из $L^{p'}(\text{Rad}X^*)$ в $L^{p'}(X^*)$:

$$\begin{aligned} |\{x : \|(T^*h)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| & \leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-p'} \|T^*h\|_{L^{p'}(X^*)}^{p'} \lesssim \lambda^{-p'} \|h\|_{L^{p'}(\text{Rad}X^*)}^{p'} \\ & \leq \lambda^{-p'} \|h\|_{L^\infty(\text{Rad}X^*)}^{p'-1} \|h\|_{L^1(\text{Rad}X^*)} \lesssim \lambda^{-1} \|g\|_{L^1(\text{Rad}X^*)}. \end{aligned}$$

Оценим теперь первое слагаемое в формуле (3.2). Нетрудно заметить, что из формулы (3.1) для оператора T^* и свойства функции b из разложения Кальдерона–Зигмунда следует, что носители функции T^*b содержатся в множестве $\bigcup_{n \geq 1} e_n$. Таким образом, мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} & |\{x : \|(T^*b)(x)\|_{X^*} > \lambda/2\}| \\ & \leq |\{x : (T^*b)(x) \neq 0\}| \leq \left| \bigcup_{n \geq 1} e_n \right| \lesssim \lambda^{-1} \|g\|_{L^1(\text{Rad}X^*)}, \end{aligned}$$

и доказательство теоремы 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Berkson, T. A. Gillespie, and J. L. Torrea, *Vector-valued transference*, Functional Space Theory and Its Applications, Proc. Int. Conf. 13th Academic Symp. Wuhan, 2003 (ed. P. Liu), pp. 1–27 (Burnham: Research Information, 2004).
2. J. Bourgain, *Extension of a result of Benedek, Calderon and Panzone*. — Ark. Mat. **22**, No. 1 (1984), 91–95.
3. T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood–Paley Theory*, vol. 63 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Cham (2016).

4. T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces. Vol. II. Probabilistic methods and operator theory*, vol. 67 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer, Cham (2017).
5. T. P. Hytönen, J. L. Torrea, and D. V. Yakubovich, *The Littlewood–Paley–Rubio de Francia property of a Banach space for the case of equal intervals*. — *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **139** (2009), 819–832.
6. T. P. Hytönen and L. Weis, *Singular convolution integrals with operator-valued kernel*. — *Math. Z.* **255** (2007), 393–425.
7. С. В. Кисляков, *Мартигальные преобразования и равномерно сходящиеся ортогональные ряды*. — *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **141** (1985), 18–38.
8. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*. *Results in Mathematics and Related Areas*, 97. Springer, Berlin–New York, 1979.
9. C. Muscalu and W. Schlag, *Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 137, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
10. N. N. Osipov, *Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system*. — *Алгебра и анализ*, **28**, No. 5 (2016), 236–246.
11. G. Pisier, *Martingales in Banach spaces*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 155. Cambridge University Press, Cambridge (2016).
12. D. Potapov, F. Sukochev, and Q. Xu, *On the vector-valued Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality*. — *Rev. Mat. Iberoamericana* **28(3)** (2012), 839–856.
13. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*. — *Rev. Mat. Iberoamericana* **1(2)** (1985), 1–14.
14. J. L. Rubio de Francia, *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions*. In: *Probability and Banach Spaces (Zaragoza, 1985): Lecture Notes in Math.*, vol. 1221, pp. 195–222. Springer (1986).

Tselishchev A. On a vector-valued extension of the Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for Walsh functions.

In the case of trigonometric system, Rubio de Francia proved the one-sided Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals and for the functions in the L^p spaces, $2 \leq p$. Later, Osipov proved a similar inequality for the Walsh system. In this paper, the latter fact is extended to L^p -spaces of functions with values in certain Banach spaces X .

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: celis-anton@yandex.ru

Поступило 13 июня 2021 г.