Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 503, 2021 г.

Д. В. Третьяков, Ю. Л. Кудряшов

ОБ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

§1. Введение

Определение 1 (С.-Надь)**.** Самосопряженный оператор D, действующий в гильбертовом пространстве (ГП) $\mathbb{H}$, называется *дилатацией* плотно заданного диссипативного оператора A, действующего в ГП $\mathfrak{H}$, если:

$$1)\, \mathfrak{H} \subset \mathbb{H};\quad 2)\, (A-\lambda)^{-1} = \mathsf{P}(\mathsf{D}-\lambda)^{-1}\,|_{\mathfrak{H}},\quad \lambda \in \mathbf{C}^{-},$$

где P – оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{H}$ на $\mathfrak{H}$, $\mathbf{C}^{-} = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}\ z < 0\}$.

Отметим, что условие 2) из определения 1 эквивалентно условию:

$$e^{At} = \mathsf{P}\, e^{\mathsf{D}t}\,|_{\mathfrak{H}},\ t \geqslant 0\ .$$

Определение 2. Самосопряженные дилатации D_1 и D_2 диссипативного оператора A, действующие соответственно в пространствах $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$, называются *изоморфными*, если существует унитарное отображение U пространства $\mathbb{H}_1$ на $\mathbb{H}_2$ такое, что

1) $\mathsf{U}h = h\ \ (\forall h \in \mathfrak{H})$;
2) $\mathsf{D}_2 \subseteq \mathsf{U}\mathsf{D}_1\mathsf{U}^{-1}$.

Впервые в математической литературе понятие дилатации появилось в работе М. А. Наймарка в 1940 году [1]. Следует отметить, что другие доказательства теоремы М. А. Наймарка имеются в [2] и [19] (в [19] получено обобщение этой теоремы на случай произвольных ограниченных операторных мер).

Ключевые слова: самосопряженный оператор, диссипативный оператор, граничные двойки, максимальный симметрический оператор, дефектные операторы, дефектные подпространства, индекс дефекта.

В 1953 году Б. Секефальви-Надь [2] построил унитарную дилатацию сжатия. Это привело к многочисленным замечательным приложениям в различных математических дисциплинах, в том числе в теории функций и в функциональном анализе (теория инвариантных пространств, спектральный анализ и синтез операторов, функциональные модели – см., напр., [3]). Следует отметить, что Н. К. Никольским и С. В. Хрущевым была построена унитарная дилатация *общего вида* для оператора сжатия (см., напр., [4]).

Задача о явном построении самосопряженной дилатации диссипативного оператора впервые была решена в работах Б. С. Павлова [5,6] для диссипативного оператора Шредингера с некоторыми ограничениями. Существенно использовался тот факт, что для исходного диссипативного оператора A справедливо равенство $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(A^*)$ и мнимая компонента $\frac{A-A^*}{2i}$ ограничена. Самосопряженная дилатация произвольного ограниченного диссипативного оператора была построена В. А. Золотаревым в [7].

В работах А. В. Кужеля и Ю. Л. Кудряшова [8, 9] было построено спектральное, а в [8, 10] – трансляционное представления самосопряженной дилатации произвольного плотно заданного диссипативного оператора A с непустым множеством регулярных точек $\rho(A)$ $(-i \in \rho(A))$.

В работах [25, 26] дилатации операторных мер применяются для решения различных задач теории однолистных функций

В [11] Ю. Л. Кудряшовым доказан изоморфизм спектрального представления дилатации и дилатации из [7] в случае ограниченности оператора A. Им же в случае сепарабельности дефектных подпространств оператора A доказан изоморфизм спектрального и трансляционного представлений самосопряженной дилатации [12].

В вышедшей в 2020 г. работе М. Брауна, М. Марлетта, С. Н. Набоко и И. Вуда [23] построена минимальная самосопряженная дилатация (трансляционное представление) максимального диссипативного оператора.

Анализ перечисленных работ указывает на возможность построения самосопряженной дилатации *общего вида* для диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек, частными случаями которой являются ранее упомянутые дилатации из [8, 9]. Построению такой дилатации посвящена данная работа.

§2. Предварительные определения и предложения

Пусть $\mathfrak{H}$ – сепарабельное ГП, A – плотно заданный диссипативный оператор, причем $-i \in \rho(A), R_{-i} = (A+i)^{-1}$. Рассмотрим неотрицательные операторы $B_+ = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}$, $B_- = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R_{-i}R^*_{-i}$, их неотрицательные квадратные корни $Q_\pm = \sqrt{B_\pm}$ и дефектные подпространства $\mathfrak{Q}_\pm = \operatorname{clos}(Q_\pm \mathfrak{H})$.

Рассмотрим ГП $\mathfrak{D}_\pm$, в которых действуют замкнутые максимальные симметрические операторы $F_\pm$ с индексом дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно, где $\mathfrak{q}_\pm = \dim \mathfrak{Q}_\pm = \dim \mathfrak{N}_\pm$, а $\mathfrak{N}_\pm$ – дефектные подпространства операторов $F_\pm$. По причине последних равенств существуют изометрии $\Phi_\pm : \mathfrak{N}_\pm \to \mathfrak{Q}_\pm$.

Определение 3. Пары $\langle \mathcal{H}_\pm; \Gamma_\pm \rangle$, где $\mathcal{H}_\pm$ – ГП со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_\pm}$, $\Gamma_\pm : \operatorname{dom}\left(F^*_\pm\right) \to \mathcal{H}_\pm$ – операторы, называются *граничными двойками* операторов $F^*_\pm$, если выполнены следующие условия:

а) $\left(F^*_\pm f, g\right)_{\mathfrak{D}_\pm} - \left(f, F^*_\pm g\right)_{\mathfrak{D}_\pm} = \mp 2i \left(\Gamma_\pm f, \Gamma_\pm g\right)_{\mathcal{H}_\pm}$ при всех $f, g \in \operatorname{dom}\left(F^*_\pm\right)$;

б) отображения $\operatorname{dom}\left(F^*_\pm\right) \ni f \mapsto \Gamma_\pm f \in \mathcal{H}_\pm$ сюръективны.

Существование граничных операторов $\Gamma_\pm$ в определении 3 вытекает из формул фон Неймана. Из этих же формул также следует, что в нашем случае $\mathcal{H}_\pm = \mathfrak{N}_\pm$.

Отметим, что понятие граничных троек для *равных дефектных чисел* было введено в работах А. Н. Кочубея и В. М. Брауна (см., например, [21,22]) и развивалось в многочисленных работах В. И. Горбачука, В. М. Брука, С. Н. Набоко, М. М. Маламуда, В. А. Деркача, В. Рыжова и др. (см., например, [13–15, 22–24]).

В связи с *неравными дефектными числами* в определении 3 необходимо упомянуть работы В. И. Могилевского, который обобщил ряд положений теории граничных троек на этот случай (см, например, [20]).

Из условий а) определения 3 легко получить, что $\operatorname{dom}(F_\pm) = \operatorname{Ker}\Gamma_\pm$. В самом деле, с одной стороны, из условий а) при $g = f \in \operatorname{dom}(F_\pm)$ следует, что $\operatorname{dom}(F_\pm) \subseteq \operatorname{Ker}\Gamma_\pm$. С другой стороны, по формулам фон Неймана, если $h_+ = h^0_+ + n_+$, где $h_+ \in \operatorname{dom}\left(F^*_+\right)$, $h^0_+ \in \operatorname{dom}(F_+)$, $n_+ \in \mathfrak{N}_+$, то из того, что $h_+ \in \operatorname{Ker}\Gamma_+$, вытекает:

$$
\begin{aligned}
0 = ||\Gamma_+ h_+||^2 &= \left(F_+^* h_+, h_+\right)_{\mathfrak{D}_+} - \left(h_+, F_+^* h_+\right)_{\mathfrak{D}_+} \\
&= \left(F_+ h_+^0 - i n_+, h_+^0 + n_+\right)_{\mathfrak{D}_+} - \left(h_+^0 + n_+, F_+ h_+^0 - i n_+\right)_{\mathfrak{D}_+} \\
&= -2i||n_+||^2,
\end{aligned}
$$

и, следовательно, $n_+ = 0$, поэтому, $h_+ = h_+^0 \in \operatorname{dom}(F_+)$. Аналогично доказывается включение $\operatorname{Ker}\Gamma_- \subseteq \operatorname{dom}(F_-)$.

§3. Общая самосопряженная дилатация диссипативного оператора

Построим ГП $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ и оператор S следующим образом. Вектор $\mathsf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T$, где $h_\pm \in \mathfrak{D}_\pm, h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежит области определения оператора S тогда и только тогда, когда

1) $h_\pm \in \operatorname{dom}(F_\pm^*)$;
2) $\varphi = h_0 + \sqrt{2} Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \operatorname{dom}(A)$;
3) $\sqrt{2}\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = \sqrt{2} T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i Q_+ (A + i)\varphi$, где $T^* = I + 2iR_{-i}^*$, $I-$единичный оператор в $\mathfrak{H}$.

Для любого вектора $\mathsf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \operatorname{dom}(\mathsf{S})$ положим

$$
\mathsf{S}\mathsf{h} = \mathsf{S}(h_-, h_0, h_+)^T = \left(F_-^* h_-, -i h_0 + (A + i)\varphi, F_+^* h_+\right)^T.
$$

Доказательству основной теоремы предпошлем следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Если* $\mathsf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \operatorname{dom}(\mathsf{S})$, *то*

$$
\psi = h_0 + \sqrt{2} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \operatorname{dom}(A^*) \quad \text{и} \quad (A + i)\varphi - (A^* - i)\psi = 2ih_0.
$$

Доказательство. Подействуем на обе части условия 3) (область определения оператора S) оператором Q_+ с учетом равенств $TQ_+ = Q_- T$ и $Q_+ T^* = T^* Q_-$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ &= \sqrt{2} T^* Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i Q_+^2 (A + i)\varphi \\
&= \sqrt{2}\left(I + 2iR_{-i}^*\right) Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i B_+ (A + i)\varphi \\
&= \sqrt{2}\left(I + 2iR_{-i}^*\right) Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i\left(iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^* R_{-i}\right)(A + i)\varphi \\
&= \left(I + 2iR_{-i}^*\right)\left(\sqrt{2} Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- - \varphi\right) + R_{-i}^*(A + i)\varphi \\
&= -\left(I + 2iR_{-i}^*\right) h_0 + R_{-i}^*(A + i)\varphi.
\end{aligned}
$$

Из доказанного равенства получаем:

$$2iR^*_{-i}h_0 + \left(h_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+h_+\right) = R^*_{-i}\,(A+i)\,\varphi. \tag{1}$$

Так как

$$\{R^*_{-i}h_0, R^*_{-i}\,(A+i)\,\varphi\} \subset \mathrm{dom}(A^*),$$

то вектор $\psi = h_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+h_+$ лежит в $\mathrm{dom}(A^*)$. Подействуем теперь на обе части равенства (1) оператором $(A^* - i)$:

$$2ih_0 + (A^* - i)\,\psi = (A+i)\,\varphi,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Оператор S является симметрическим.*

Доказательство. Легко видеть, что оператор S плотно задан. Для любого $\mathsf{h} \in \mathrm{dom}(\mathsf{S})$, используя определение 3, формулы для операторов $B_\pm, T$, равенство $I - TT^* = 2B_-$ и условия на область определения оператора S, получим:

$$\begin{aligned}
&i^{-1}[\ (\mathsf{Sh},\mathsf{h})_{\mathbb{H}} - (\mathsf{h},\mathsf{Sh})_{\mathbb{H}}\ ]\\
&= ||\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - ||\sqrt{2}\Phi_+\Gamma_+h_+||^2 + 2\,\mathrm{Im}((A+i)\varphi, h_0) - 2||h_0||^2\\
&= ||\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - ||\sqrt{2}T^*\Phi_-\Gamma_-h_- + iQ_+(A+i)\varphi||^2\\
&\quad + 2\,\mathrm{Im}(A\varphi, h_0) + 2\,\mathrm{Re}(\varphi, h_0) - 2||h_0||^2\\
&= ||2Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - ||Q_+(A+i)\varphi||^2\\
&\quad - 2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}T^*\Phi_-\Gamma_-h_-, iQ_+(A+i)\varphi\right)\\
&\quad + 2\,\mathrm{Im}(A\varphi, h_0) + 2\,\mathrm{Re}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, h_0)\\
&= ||2Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - (B_+(A+i)\varphi, (A+i)\varphi)\\
&\quad + 2\,\mathrm{Re}\ i(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, (A-i)\varphi)\\
&\quad + 2\ \mathrm{Im}(A\varphi, h_0) + 2\,\mathrm{Re}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, h_0)\\
&= ||2Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - 2\ \mathrm{Im}(A\varphi, \varphi)\\
&\quad - 2\ \mathrm{Im}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, (A-i)\varphi) + 2\ \mathrm{Im}(A\varphi, h_0)\\
&\quad + 2\,\mathrm{Re}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, h_0)\\
&= ||2Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-||^2 - 2\ \mathrm{Re}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, \varphi)\\
&\quad + 2\,\mathrm{Re}(\sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, h_0) = 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Вектор* $\mathsf{g} = (g_-, g_0, g_+)^T$ *лежит в* $\operatorname{dom}(\mathsf{S}^*)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1*) $g_\pm \in \operatorname{dom}(F_\pm^*)$;
2*) $\psi = g_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+ \in \operatorname{dom}(A^*)$;
3*) $\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_- = \sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+ - iQ_-(A^* - i)\,\psi$.

В этом случае

$$\mathsf{S}^*\mathsf{g} = \mathsf{S}^*(g_-, g_0, g_+)^T = \left(F_-^*g_-, ig_0 + (A^* - i)\,\psi, F_+^*g_+\right)^T$$

при всех $\mathsf{g} \in \operatorname{dom}(\mathsf{S}^*)$.

Доказательство. Если $\mathsf{h} \in \operatorname{dom}(\mathsf{S})$ и

$$\mathsf{g} \in \left\{(f_-, f_0, f_+)^T \in \mathbb{H} \;\middle|\; f_\pm \in \operatorname{dom}(F_\pm^*), f_0 \in \mathfrak{H}\right\},$$

то

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Sh}, \mathsf{g})_{\mathbb{H}} &= \Big((F_-^*h_-, -ih_0 + (A+i)\varphi, F_+^*h_+)^T, (g_-, g_0, g_+)^T\Big)_{\mathbb{H}} \\
&= \left(F_-^*h_-, g_-\right)_{\mathfrak{D}_-} + (-ih_0 + (A+i)\varphi, g_0) + \left(F_+^*h_+, g_+\right)_{\mathfrak{D}_+}
\end{aligned}$$

$$= \left(h_-, F_-^*g_-\right)_{\mathfrak{D}_-} + i\left(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_-\right) + (h_0, ig_0) + ((A+i)\varphi, g_0)$$

$$+ \left(h_+, F_+^*g_+\right)_{\mathfrak{D}_+} - i\left(\sqrt{2}T^*\Phi_-\Gamma_-h_- + iQ_+(A+i)\varphi, \sqrt{2}\Phi_+\Gamma_+g_+\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(h_-, F_-^*g_-\right)_{\mathfrak{D}_-} + \left(h_+, F_+^*g_+\right)_{\mathfrak{D}_+} \\
&\qquad + \left(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, i\sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+ - i\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_-\right) \\
&\quad + (h_0, ig_0) + \left((A+i)(h_0 + \sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-), g_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+\right).
\end{aligned}$$

Положим $\psi = g_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+$. Тогда $\mathsf{g} = (g_-, g_0, g_+)^T \in \operatorname{dom}(\mathsf{S}^*)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1*)–3*). Если эти условия выполнены, то

$$\mathsf{S}^*\mathsf{g} = \mathsf{S}^*(g_-, g_0, g_+)^T = \left(F_-^*g_-, ig_0 + (A^* - i)\,\psi, F_+^*g_+\right)^T$$

при всех $\mathsf{g} \in \operatorname{dom}(\mathsf{S}^*)$. Лемма доказана. □

Так же, как и лемма 1, доказывается следующий факт.

Лемма 4. *Если* $\mathsf{g} = (g_-, g_0, g_+)^T \in \operatorname{dom}(\mathsf{S}^*)$, *то*

$$\varphi = g_0 + \sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-g_- \in \operatorname{dom}(A) \quad \textit{и} \quad (A+i)\,\varphi - (A^* - i)\,\psi = 2ig_0.$$

Лемма 5. *Оператор* S *является самосопряженным.*

Доказательство. Достаточно доказать включение $\mathsf{S}^* \subseteq \mathsf{S}$. В этом случае при $\mathsf{g} \in \mathrm{dom}(\mathsf{S}^*)$ имеем

$$\mathsf{S}^*\mathsf{g} = \mathsf{S}^*\left(g_-, g_0, g_+\right)^T = \left(F_-^* g_-, ig_0 + \left(A^* - i\right)\psi, F_+^* g_+\right)^T.$$

По лемме 4 вектор $\varphi = g_0 + \sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-g_-$ лежит в $\mathrm{dom}(A)$ и

$$ig_0 + \left(A^* - i\right)\psi = -ig_0 + \left(A + i\right)\varphi. \tag{2}$$

Кроме того, так как $I - T^*T = 2B_+$, то с помощью леммы 3 (условие 3*)) и равенства $T^*Q_- = Q_+T^*$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\Phi_+\Gamma_+g_+ - \sqrt{2}T^*\Phi_-\Gamma_-g_- - iQ_+\left(A + i\right)\varphi \\
&= \sqrt{2}\Phi_+\Gamma_+g_+ - \sqrt{2}T^*T\Phi_+\Gamma_+g_+ + iT^*Q_-\left(A^* - i\right)\psi - iQ_+\left(A + i\right)\varphi \\
&= 2\sqrt{2}B_+\Phi_+\Gamma_+g_+ + iQ_+T^*\left(A^* - i\right)\psi - iQ_+\left(A + i\right)\varphi \\
&= 2\sqrt{2}B_+\Phi_+\Gamma_+g_+ + iQ_+\left((A^* - i)\psi - (A + i)\varphi\right) - 2Q_+\psi \\
&= 2\sqrt{2}B_+\Phi_+\Gamma_+g_+ + 2Q_+(-\sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathsf{g} \in \mathrm{dom}(\mathsf{S})$ и в силу (2)

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}^*\mathsf{g} &= \left(F_-^* g_-, ig_0 + \left(A^* - i\right)\psi, F_+^* g_+\right)^T \\
&= \left(F_-^* g_-, -ig_0 + \left(A + i\right)\varphi, F_+^* g_+\right)^T = \mathsf{S}\mathsf{g}.
\end{aligned}$$

Таким образом, S – самосопряженный оператор.

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Оператор* S *является самосопряженной дилатацией оператора* A.

Доказательство. Воспользуемся определением 1. Возьмем произвольную точку $\lambda \in \mathbf{C}^-$ и рассмотрим уравнение $\mathsf{Sh} - \lambda\mathsf{h} = \mathsf{g}$, которое эквивалентно системе

$$\begin{cases}
\left(F_-^* - \lambda\right)h_- = g_-, \\
-\left(i + \lambda\right)h_0 + \left(A + i\right)\varphi = g_0, \\
\left(F_+^* - \lambda\right)h_+ = g_+ .
\end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения (3) вытекает, что $h_- = R_\lambda(F_-^*)g_-$. Второе уравнение перепишем в виде $\left(A - \lambda\right)\varphi + \left(i + \lambda\right)\left(\varphi - h_0\right) = g_0$, откуда

$$\varphi = R_\lambda\left(g_0 - \sqrt{2}(i + \lambda)Q_-\Phi_-\Gamma_-R_\lambda(F_-^*)g_-\right), \tag{4}$$

где $R_\lambda = (A-\lambda)^{-1}$ – резольвента оператора A.

Из равенства (4) находим h_0 :

$$h_0 = R_\lambda g_0 - \sqrt{2}\,(I + (i+\lambda)\,R_\lambda)\,Q_-\Phi_-\Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_- \ .$$

Используем теперь условие 3) на $\operatorname{dom}(\mathsf{S})$ и равенство (4):

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ h_+ &= \Phi_+^{-1}\left(T^*\Phi_-\Gamma_- h_- + \frac{i}{\sqrt{2}}\,Q_+(A+i)\varphi\right)\\
&= \Phi_+^{-1}\Big(T^*\Phi_-\Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-\\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\,Q_+(A+i)R_\lambda(g_0 - \sqrt{2}(\lambda+i)Q_-\Phi_-\Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-)\Big)\\
&= \Phi_+^{-1}\Big(\ (T^* - i(\lambda+i)Q_+(A+i)R_\lambda Q_-)\Phi_-\Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-\\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\,Q_+(A+i)R_\lambda g_0\Big) = \mathbb{S}(\lambda)v_-(\lambda) + \Phi_+^{-1}v_+(\lambda),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$v_-(\lambda) = \Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-, \quad M_{-i,\lambda}(A) = (A+i)R_\lambda(A),$$
$$v_+(\lambda) = \frac{i}{\sqrt{2}}\,Q_+ M_{-i,\lambda}(A)g_0,\ \mathbb{S}(\lambda) = \Phi_+^{-1}W_A^*(\bar{\lambda})\Phi_-,$$

где

$$W_A(\lambda) = T + i(\lambda - i)Q_- M_{i,\lambda}(A^*)Q_+, \quad W_A(\lambda) : \mathfrak{Q}_+ \to \mathfrak{Q}_-$$

– характеристическая функция оператора A (см., например, [17]), $\mathbb{S}(\lambda)$ – матрица рассеяния группы унитарных операторов $\mathsf{U}(t) = e^{i\mathsf{S}t}$; см. [18].

По формулам фон Неймана $h_+ = h_+^0 + n_+, h_+^0 \in \operatorname{dom}(F_+)$, $n_+ = \Gamma_+ h_+ \in \mathfrak{N}_+$. Ввиду формулы (3) находим:

$$(F_+ - \lambda)\,h_+^0 = g_+ + (\lambda + i)n_+.$$

Отсюда, в силу (5)

$$\begin{aligned}
h_+ = h_+^0 + n_+ &= R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i,\lambda}(F_+)n_+\\
&= R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i,\lambda}(F_+)\left(\mathbb{S}(\lambda)v_-(\lambda) + \Phi_+^{-1}v_+(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{S})\,(g_-, g_0, g_+)^T = \Big(&R_\lambda(F_-^*)g_-,\ R_\lambda g_0 - \sqrt{2}M_{-i,\lambda}(A)Q_-\Phi_- v_-(\lambda),\\
&R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i,\lambda}(F_+)(\mathbb{S}(\lambda)v_-(\lambda) + \Phi_+^{-1}v_+(\lambda))\Big)^T.
\end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим через $\mathsf{P} : \mathbb{H} \to \mathfrak{H}$ – ортопроектор на подпространство $\mathfrak{H}$. Тогда

$$\mathsf{PR}_\lambda(\mathsf{S})\,(0,\ g_0,\ 0)^T = \mathsf{P}\left(0,\ R_\lambda g_0,\ M_{-i,\lambda}(F_+)\Phi_+^{-1}v_+(\lambda)\right)^T = R_\lambda g_0.$$

Теорема доказана. □

Аналогично рассуждая, с помощью леммы 3 приходим к справедливости следующего предложения.

Следствие 1. *Для любого* $\lambda \in \mathbf{C}^-$ *верно равенство*

$$\mathsf{R}_{\overline{\lambda}}(\mathsf{S})\,(g_-, g_0, g_+)^T = \Big(R_{\overline{\lambda}}(F_-)g_- + M_{i,\overline{\lambda}}(F_-)(\mathbb{S}^*(\lambda)w_+(\overline{\lambda}) - w_-(\overline{\lambda})),$$

$$R^*_\lambda g_0 - \sqrt{2}M_{i,\overline{\lambda}}(A^*)Q_+\Phi_+ w_+(\overline{\lambda}),\ R_{\overline{\lambda}}(F^*_+)g_+\Big)^T,$$

где $w_-(\overline{\lambda}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_-^{-1}Q_- M_{i,\overline{\lambda}}(A^*)g_0,\ w_+(\overline{\lambda}) = \Gamma_+ R_{\overline{\lambda}}(F^*_+)g_+$.

§4. Некоторые частные случаи

Рассмотрим известные частные случаи построенной дилатации.

4.1. Спектральное представление дилатации. Пусть

$$\mathfrak{D}_\pm = L_2(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm),$$

где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. В пространствах $\mathfrak{D}_\pm$ рассмотрим симметрические максимальные операторы $F_\pm$ с индексом дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно, $\mathfrak{q}_\pm = \dim \mathfrak{Q}_\pm$, действующие следующим образом:

$$\operatorname{dom}(F_\pm) = \{h_\pm \in W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm) |\ h_\pm(0) = 0\},\ (F_\pm h_\pm)\,(t) = ih'_\pm(t),$$

где $W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)$ – классы Соболева. Операторы $F^*_\pm$ задаются теми же дифференциальными выражениями на множествах

$$\operatorname{dom}(F^*_\pm) = W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm).$$

Для дефектных подпространств операторов $F_\pm$ справедливы равенства:

$$\mathfrak{N}_\pm = \left\{e^{\mp t}q_\pm \mid q_\pm \in \mathfrak{Q}_\pm\right\}.$$

Для любых векторов $f_\pm, g_\pm \in \operatorname{dom}(F^*_\pm)$ имеем

$$\left(F^*_\pm f_\pm, g_\pm\right)_{\mathfrak{D}_\pm} - \left(f_\pm, F^*_\pm g_\pm\right)_{\mathfrak{D}_\pm} = \mp i\,(f_\pm(0), g_\pm(0))_{\mathfrak{Q}_\pm} = \mp 2i(\Gamma_\pm f_\pm, \Gamma_\pm g_\pm),$$

откуда $(\Gamma_\pm f_\pm)(t) = e^{\mp t} f_\pm(0)$. Легко проверить, что операторы $\Phi_\pm$ действуют следующим образом:

$$\Phi_\pm \left(e^{\mp t} q_\pm\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, q_\pm, \quad q_\pm \in \mathfrak{Q}_\pm\ .$$

В ГП $\mathbb{H} = L_2(\mathbb{R}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus L_2(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Q}_+)$ рассмотрим оператор S, причем вектор $\mathsf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T$ лежит в $\mathrm{dom}(\mathsf{S})$ тогда и только тогда, когда

1) $h_\pm \in W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)$;
2) $\varphi = h_0 + Q_- h_-(0) \in \mathrm{dom}(A)$;
3) $h_+(0) = T^* h_-(0) + iQ_+ (A+i)\, \varphi$, где $T^* = I + 2iR^*_{-i}$.

Для любого вектора $\mathsf{h} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T \in \mathrm{dom}(\mathsf{S})$ верны равенства

$$\mathsf{S}\mathsf{h} = \mathsf{S}\,(h_-(t), h_0, h_+(t))^T = \left(ih'_-(t), -ih_0 + (A+i)\,\varphi, ih'_+(t)\right)^T .$$

В результате получаем самосопряженную дилатацию из [8, 9].

4.2. Трансляционное представление дилатации. Пусть

$$\mathfrak{D}_\pm = l_2(\mathbb{Z}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm),$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -2, -1\}$. В $\mathfrak{D}_\pm$ рассмотрим симметрические максимальные операторы $F_\pm$ с индексом дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно, которые задаются следующим образом. Пусть $h_+ = (h_1, h_2, \dots) \in \mathfrak{D}_+,\ h_- = (\dots, h_{-2}, h_{-1}) \in \mathfrak{D}_-$.

Рассмотрим операторы $S_\pm : \mathfrak{D}_\pm \supset \mathrm{dom}(S_\pm) \to \mathfrak{Q}_\pm$, $S_{\pm\, n} : \mathfrak{D}_\pm \supset \mathrm{dom}(S_{\pm\, n}) \to \mathfrak{Q}_\pm$, действующие по формулам:

$$S_\pm h_\pm = \sum_{k=1}^{\infty} h_{\pm\, k},\ S_{\pm\, n} h_\pm = \sum_{k=n}^{\infty} h_{\pm\, k} - \frac{1}{2}\, h_{\pm\, n}\ ,$$

причем

$$\mathrm{dom}(S_\pm) = \left\{ h_\pm \in l_2(\mathbb{Z}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)\ \middle|\ \sum_{k=1}^{\infty} h_{\pm\, k} \in \mathfrak{Q}_\pm \right\} = \mathrm{dom}(S_{\pm\, n}).$$

С помощью операторов $S_\pm,\ S_{\pm\, n}$ определим операторы $F_\pm$:

$$\mathrm{dom}(F_\pm) = \left\{ h_\pm \in l_2(\mathbb{Z}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)\ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty} ||S_{\pm\, n} h_\pm||^2_{\mathfrak{Q}_\pm} < \infty,\ S_\pm h_\pm = 0 \right\},$$

$$F_+ h_+ = -2i\,(S_1 h_+, S_2 h_+, \dots)\,,\ F_- h_- = 2i\,(\dots, S_{-2} h_-, S_{-1} h_-)\,. \qquad (7)$$

Операторы $F_\pm$ замкнуты, симметричность этих операторов вытекает из легко проверяемых равенств:

$$(F_\pm h_\pm, g_\pm)_{\mathfrak{D}_\pm} - (h_\pm, F_\pm g_\pm)_{\mathfrak{D}_\pm} = \mp 2i\ (S_\pm h_\pm, S_\pm g_\pm)_{\mathfrak{Q}_\pm}.$$

Сопряженные операторы $F^*_\pm$ действуют по формулам (7) на

$$\operatorname{dom}(F^*_\pm) = \left\{ h_\pm \in l_2(\mathbb{Z}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm) \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} ||S_{\pm\, n} h_\pm||^2{}_{\mathfrak{Q}_\pm} < \infty \right\}.$$

Дефектные подпространства операторов $F_\pm$ имеют вид

$$\mathfrak{N}_+ = \{(h_1, 0, 0, \dots) | h_1 \in \mathfrak{Q}_+\},$$
$$\mathfrak{N}_- = \{(\dots, 0, 0, h_{-1}) | h_{-1} \in \mathfrak{Q}_-\},$$

при этом выполняются равенства

$$S_+ h_+ = \sum_{k=1}^{\infty} h_k = h_1, \quad S_- h_- = \sum_{k=1}^{\infty} h_{-k} = h_{-1}.$$

Для любых векторов $h_\pm, g_\pm \in \operatorname{dom}(F^*_\pm)$ имеем

$$\begin{aligned}\left(F^*_\pm h_\pm, g_\pm\right)_{\mathfrak{D}_\pm} - \left(h_\pm, F^*_\pm g_\pm\right)_{\mathfrak{D}_\pm} &= \mp 2i\,(S_\pm h_\pm, S_\pm g_\pm)_{\mathfrak{Q}_\pm} \\ &= \mp 2i\,(h_{\pm 1}, g_{\pm 1})_{\mathfrak{Q}_\pm} = \mp 2i\,(\Gamma_\pm h_\pm, \Gamma_\pm g_\pm)_{\mathfrak{N}_\pm}.\end{aligned}$$

Следовательно, операторы $\Gamma_\pm$ определяются так:

$$\Gamma_+ h_+ = \Gamma_+(h_1, h_2, \dots) = (h_1, 0, 0, \dots), \quad h_+ \in \operatorname{dom}(F^*_+),$$
$$\Gamma_- h_- = \Gamma_-(\dots, h_{-2}, h_{-1}) = (\dots, 0, 0, h_{-1}), \quad h_- \in \operatorname{dom}(F^*_-).$$

Зададим теперь операторы $\Phi_\pm$:

$$\Phi_+(h_1, 0, 0, \dots) = h_1, \;\; \Phi_-(\dots, 0, 0, h_{-1}) = h_{-1}, \;\; h_{\pm 1} \in \mathfrak{Q}_\pm.$$

Рассмотрим ГП $\mathbb{H} = l_2(\mathbb{Z}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus l_2(\mathbb{Z}_+; \mathfrak{Q}_+)$. Вектор $\mathsf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \mathbb{H}$ принадлежит линеалу $\operatorname{dom}(\mathsf{S})$ тогда и только тогда, когда

1) $h_\pm \in \operatorname{dom}(F^*_\pm)$;
2′) $\varphi' = h_0 + \sqrt{2} Q_- S_- h_- \in \operatorname{dom}(A)$;
3′) $\sqrt{2} S_+ h_+ = \sqrt{2} T^* S_- h_- + i Q_+ (A + i)\, \varphi', \;\; T^* = I + 2i R^*_{-i}$.

Положим $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 + Q_- S_- h_-$. Тогда $\varphi' = \sqrt{2}\varphi$ и условия 1), 2′), 3′) принимают вид:

1) $h_\pm \in \operatorname{dom}(F^*_\pm)$;
2) $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 + Q_- S_- h_- \in \operatorname{dom}(A)$;

3) $S_+h_+ = T^*S_-h_- + iQ_+(A+i)\varphi$.

Для любого $\mathsf{h} \in \mathrm{dom}(\mathsf{S})$ положим

$$\mathsf{Sh} = \mathsf{S}\,(h_-, h_0, h_+)^T = \Big(F_-^* h_-, -ih_0 + \sqrt{2}(A+i)\varphi, F_+^* h_+\Big)^T.$$

В результате получаем самосопряженную дилатацию из [10].

§5. Минимальность дилатации общего вида.

Рассмотрим важное применение построенной дилатации, связанное с ее минимальностью.

Пусть, по-прежнему, A – плотно заданный диссипативный оператор, действующий в сепарабельном ГП $\mathfrak{H}$, причем $-i \in \rho(A)$.

Определение 4. Самосопряженная дилатация S диссипативного оператора A называется *минимальной* [16], если выполнено равенство

$$\mathbb{H} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{\mathsf{R}_{-i}^{\,n}(\mathsf{S})\mathfrak{H}\,,\ \mathsf{R}_{i}^{\,n}(\mathsf{S})\mathfrak{H}\} = \mathbb{H}_{\min}.$$

Здесь $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ обозначает замкнутую линейную оболочку линеалов или подпространств $\mathfrak{F}_n$.

Отметим, что в [16] доказана минимальность самосопряженых дилатаций из разделов 4.1 и 4.2 при условии, что исходное пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно.

Из формулы (6) при $\lambda = -i$ вытекает, что

$$\mathsf{R}_{-i}(\mathsf{S})\,(g_-, g_0, g_+)^T = \Big(R_{-i}(F_-^*)g_-,\ R_{-i}g_0 - \sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-R_{-i}(F_-^*)g_-,$$
$$R_{-i}(F_+)g_+ + \Phi_+^{-1}(T^*\Phi_-\Gamma_-R_{-i}(F_-^*)g_- + \frac{i}{\sqrt{2}}Q_+g_0)\Big)^T. \tag{8}$$

Частный случай формулы (8):

$$\mathsf{R}_{-i}(\mathsf{S})\,(0, g_0, 0)^T = \Big(0,\ R_{-i}g_0,\ \frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_+^{-1}Q_+g_0\Big)^T. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{R}_{-i}^{\,n}(\mathsf{S})\,(0, g_0, 0)^T = \Big(0,\ R_{-i}^n g_0,\ \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{r=0}^{n-1} R_{-i}^{\,n-1-r}(F_+)\Phi_+^{-1}Q_+R_{-i}^{\,r}g_0\Big)\Big)^T. \tag{10}$$

Используем теперь следствие 1 для нахождения $\mathsf{R}_i(\mathsf{S})$, приходим к равенствам

$$\mathsf{R}_i(\mathsf{S})\,(g_-,g_0,g_+)^T=\Big(R_i(F_-)g_-+\Phi_-^{-1}T\Phi_+\Gamma_+R_i(F_+^*)g_+-\frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_-^{-1}Q_-g_0,$$

$$R_{-i}^*g_0-\sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+R_i(F_+^*)g_+,\ R_i(F_+^*)g_+\Big)^T. \tag{11}$$

Запишем также частный случай этой формулы:

$$\mathsf{R}_i(\mathsf{S})\,(0,g_0,0)^T=\Big(-\frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_-^{-1}Q_-g_0,\ R_{-i}^*g_0,\ 0\Big)^T. \tag{12}$$

Соотношения (11) и (12) используем для нахождения n-й степени резольвенты, $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathsf{R}_i^n(\mathsf{S})\,(0,g_0,0)^T=\Big(-\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{n-1}R_i^{n-1-r}(F_-)\Phi_-^{-1}Q_-R_{-i}^{*\,r}g_0,\ R_{-i}^{*\,n}g_0,\ 0\Big)^T. \tag{13}$$

Рассмотрим подпространства

$$\mathfrak{B}_\pm=\bigvee_{n=0}^{\infty}\{\mathsf{R}_{\mp i}^{\,n}(\mathsf{S})\mathfrak{H}\}\ .$$

Очевидно, что $\mathbb{H}_{\min}=\mathfrak{B}_-\vee\mathfrak{B}_+$ и, в силу (10) и (13), $\mathfrak{H}=\mathfrak{B}_-\cap\mathfrak{B}_+$.

Тогда подпространство $\mathbb{H}_{\min}$ можно представить в виде ортогональной суммы:

$$\mathbb{H}_{\min}=\mathfrak{D}_-^{\min}\ \oplus\mathfrak{H}\oplus\ \mathfrak{D}_+^{\min}, \tag{14}$$

где

$$\mathfrak{D}_\pm^{\min}=\mathfrak{B}_\pm\ominus\mathfrak{H}\ . \tag{15}$$

Из равенств (14) и (15) вытекает, что самосопряженная дилатация S диссипативного оператора A является минимальной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}_\pm^{\min}=\mathfrak{D}_\pm$.

Рассмотрим подробно случай подпространства $\mathfrak{D}_+^{\min}$. Из равенства (10) вытекает следующее очевидное включение:

$$\mathfrak{D}_+^{\min}\subseteq\bigvee_{n=0}^{\infty}\{R_{-i}^{\,n}(F_+)\mathfrak{N}_+\}=\mathfrak{D}'_+\ .$$

Обратно, пусть $(0,0,f_+)^T\in\mathfrak{D}'_+$. Так как линеал $\Phi_+^{-1}Q_+(A+i)\,\mathrm{dom}(A)$ всюду плотен в $\mathfrak{N}_+$, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся такой полином

$p \in \mathbf{C}[z]$ степени $N = N(\varepsilon)$ и вектор $g \in \mathrm{dom}(A)$, что

$$\varepsilon > \|(0,0,f_+)^T - (0,0,p(R_{-i}(F_+))\,\Phi_+^{-1}Q_+(A+i)g)^T\|$$

$$= \left\|(0,0,f_+)^T - \left(0,0,\sum_{m=0}^{N}\alpha_m R_{-i}^{\,m}(F_+)\,\Phi_+^{-1}Q_+(A+i)g\right)^T\right\|$$

$$= \left\|(0,0,f_+)^T - (-i\sqrt{2})\sum_{m=0}^{N}\alpha_m\left[\mathsf{R}_{-i}^{m+1}(\mathsf{S})(0,(A+i)g,0)^T - \mathsf{R}_{-i}^{m}(\mathsf{S})(0,g,0)^T\right]\right\|.$$

Следовательно, доказано обратное включение $\mathfrak{D}'_+ \subseteq \mathfrak{D}_+^{\min}$. Случай подпространства $\mathfrak{D}_-^{\min}$ рассматривается аналогично.

Мы обосновали справедливость равенств

$$\mathfrak{D}_\pm^{\min} = \bigvee_{n=0}^{\infty}\{R_{\mp i}^{\,n}(F_\pm)\mathfrak{N}_\pm\}\ .$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Самосопряженная дилатация S плотно заданного диссипативного оператора A с непустым множеством регулярных точек $(-i \in \rho(A))$ является минимальной тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{D}_\pm = \bigvee_{n=0}^{\infty}\{R_{\mp i}^{\,n}(F_\pm)\mathfrak{N}_\pm\}\ .$$

Следствие 2. *Самосопряженная дилатация S плотно заданного диссипативного оператора A с непустым множеством регулярных точек $(-i \in \rho(A))$ является минимальной тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{D}_\pm \ominus R_{\mp i}^{\,n}(F_\pm)\mathfrak{N}_\pm) = \{0\}\,.$$

Отметим, что минимальность самосопряженной дилатации из п. 4.1 обеспечивается по теореме 2 полнотой систем вектор-функций $\left\{e^{\mp t}\,\frac{t^n}{n!}\,q_\pm \,|\, q_\pm \in \mathfrak{Q}_\pm\right\}_{n\geqslant 0}$ в $L_2(\mathbf{R}_\pm;\mathfrak{Q}_\pm)$.

Аналогично, минимальность самосопряженной дилатации из п. 4.2 обеспечивается по теореме 2 в пространствах $l_2(\mathbf{Z}_\pm;\mathfrak{Q}_\pm)$ полнотой систем финитных векторов:

$$\{2^{-n}(g_+, -ng_+, C_n^2 g_+, \dots, (-1)^{n-1}ng_+, (-1)^n g_+, 0, \dots)\,|\,g_+ \in \mathfrak{Q}_+\}_{n\geqslant 1} \cup$$
$$\cup\ \{(g_+, 0, 0, \dots,\,|\,g_+ \in \mathfrak{Q}_+)\}\ \text{в}\ l_2(\mathbf{Z}_+;\mathfrak{Q}_+)$$

и

$$\{2^{-n}(\dots,0,(-1)^n g_-,(-1)^{n-1}ng_-,\dots,C_n^2 g_-,-ng_-,g_-)|g_-\in\mathfrak{Q}_-\}_{n\geqslant 1}$$
$$\cup\{(\dots,0,0,g_-\,|\,g_-\in\mathfrak{Q}_-)\}\text{ в } l_2(\mathbf{Z}_-;\mathfrak{Q}_-).$$

В заключение выражаем глубокую благодарность рецензентам за полезные замечания и конструктивную критику.

Список литературы

1. М. А. Наймарк, *Спектральные функции симметрического оператора.* — Изв. АН СССР, **4**, No. 3, 277–318 (1940).
2. S.-Nagy B. *Sur les contractions de l'espace de Hilbert.* — Acta Sci. Math., **15**, 87–92 (1953).
3. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, М., Наука, (1980).
4. Н. К. Никольский, С. В. Хрущев, *Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций.* — Труды Математ. института АН СССР, **176**, 97–210 (1974).
5. Б. С. Павлов, *Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов.* — Матем. программир. и смежн. вопр. Теория операторов в линейных пространствах, **30**, No. 1, 59–72 (1981).
6. Б. С. Павлов, *Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям.* — Мат. сб. **102**(**144**), No. 4, 511–536 (1977).
7. В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, ХНУ, Харьков (2003).
8. А. В. Кужель, Ю. Л. Кудряшов, *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов.* — ДАН СССР **253**, No. 4, 812–815 (1980).
9. Ю. Л. Кудряшов, *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов.* — Теория функций, функц. анализ и их прил. **37**, 51–54 (1982).
10. А. В. Кужель, *Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов.* — Теория функций, функц. анализ и их прил. **37**, 54–62 (1982).
11. Ю. Л. Кудряшов, *Изоморфизм двух представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора.* — Ученые записи ТНУ им. В. И. Вернадского **23**(**62**), No. 3, 32–38 (2011).
12. Ю. Л. Кудряшов, *Изоморфизм спектральных и трансляционных представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора.* — Таврический вестник информатики и математики **38**, No. 1, 40–47 (2018).
13. В. И. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, К., Наукова думка (1984).
14. V. M. Bruk, *On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the indefinite-dimensional case.* — J. Math. Phisics, Analysis, Geometry **10**, No. 2, 163–188 (2018).

15. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Non-self-adjoint extensions of a Hermitian operator and their characteristic functions.* — J. Math. Sci., **97**, No. 5, 4461–4499 (1999).
16. Ю. Л. Кудряшов, *Минимальность самосопряженной дилатации диссипативного оператора.* — Динамические системы, No. 3, 94–98 (2014).
17. А. М. Петров, *Спектральные проекторы диссипативных операторов.* — Динамические системы, No. 6, 109–114 (1987).
18. П. Лакс, Р. Филлипс, *Теория рассеяния*, М., Мир (1971).
19. М. М. Маламуд, С. М. Маламуд, *Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве.* — Алгебра и анализ, **15**, No. 3, 1–77 (2003).
20. V. Mogilevskii, *Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers.* — Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 12 (2006), no. 3, pp. 258–280.
21. А. М. Кочубей, *О расширениях симметрических операторов и симетрических бинарных отношений.* — Мат. заметки, No. 17, 41–48 (1975).
22. M. Brown, M. Marletta, S. Naboko, I. Wood, *Boundary triplets and M-functions for self-adjoint operators with applications elliptic PDEs and block operator matrices*, `arXiv:0704.2562v3 [math.SP]` 19 Oct 2007.
23. M. Brown, M. Marletta, S. Naboko, I. Wood, *The functional model for maximal dissipative operators: an approach in the spirit of operator knots.* — Trans. Amer. Math. Soc. **373**, 4145–4187 (2020).
24. V. Ryzhov, *Functional model of a class non-selfadjoint extension of symmetric operators*, Operator theory, analysis and mathematical physics, 117–158, Oper.Theory Adv.Appl., 174, Birkhuser, Basel, 2007.
25. В. И. Васюнин, Н. К. Никольский, *Квазиортогональные разложения по дополнительным метрикам и оценки однолистных функций.* — Алгебра и анализ, **2**, No. 4, 1–81 (1990).
26. В. И. Васюнин, Н. К. Никольский, *Операторные меры и коэффициенты однолистных функций.* — Алгебра и анализ, **3**, No. 6, 1–75 (1991).

Tretyakov D. V., Kudryashov Yu. L. On a general approach to construction of a selfadjoint dilation for a dissipative operator.

A general approach is presented to the construction of a selfadjoint dilation for a density defined dissipative operator with nonempty set of regular points. The construction involves the boundary pairs for maximal symmetric operators. Some partial cases are considered. A minimality criterion for the resulting dilation is proved.

КФУ им. В. И. Вернадского,
Таврическая академия,
пр. Вернадского 4, 259007 Симферополь, Россия
E-mail: dvttvd@mail.ru
E-mail: kudryashov_2889@mail.ru

Поступило 1 апреля 2021 г.