Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 503, 2021 г.

В. В. Капустин

ПЯТЬ МОДЕЛЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА

В статье [1] изучалась каноническая система на отрицательной полуоси с диагональным гамильтонианом

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{-2t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2t}}{-2t} \end{pmatrix}.$$

Каноническая система есть уравнение

$$J\dot{f}(t) = zH(t)f(t),$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$. С канонической системой связана цепочка пространств де Бранжа, и определенный стандартным образом унитарный оператор отображает подпространства гильбертова пространства канонической системы на пространства де Бранжа, см. ниже. Цель этой заметки – построение факторизации упомянутого унитарного оператора в виде суперпозиции четырех промежуточных унитарных операторов; это дает три промежуточные модели.

В статье [1] было показано, что эта каноническая система на интервале $(-\infty, -2\pi)$ связана с дзета-функцией Римана ζ. А именно, как следует из леммы 8 в [1], пространство де Бранжа, структурная функция которого есть $K_s(2\pi)$ при

$$s = s(z) = \frac{1 - iz}{2},$$

где K_s – модифицированная функция Бесселя, содержит функцию $\frac{\xi(\frac{1}{2} - iz)}{p(z)}$, где ξ – кси-функция Римана, $\xi(s) = \frac{1}{2}\, s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, а p – произвольный многочлен степени 3 (или выше), нули которого являются нулями функции из числителя.

Ключевые слова: кси-функция Римана, пространство де Бранжа, дифференциальный оператор канонической системы.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00565-а.

§1. Результаты

Наша первая модель рассматривается в гильбертовом пространстве канонической системы, которое представляет собой весовое пространство пар функций с гамильтонианом H в качестве веса. А именно, первое модельное пространство имеет вид

$$\left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} : \ h_+ f_+, \ h_- f_- \in L^2(-\infty, 0) \right\}$$

при

$$h_+(t) = \frac{e^t}{\sqrt{-2t}}, \qquad h_-(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{-2t}}$$

(квадраты функций $h_\pm$ совпадают с диагональными элементами гамильтониана). В пространстве канонической системы отметим цепочку подпространств $\mathfrak{H}_a$, где число $a > 0$ является параметром, состоящих из всех пар функций, обращающихся в ноль на интервале $(-a, 0)$.

Для $t < 0$ определим

$$A(t,z) = \sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\, e^{-t} \Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t) \Big),$$
$$B(t,z) = -i \sqrt{\frac{-t}{2\pi}}\, e^{t} \cdot \Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t) \Big),$$

где K_s – модифицированная функция Бесселя, $s = \frac{1-iz}{2}$. С каждым элементом $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_a$ свяжем целую функцию F,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-a} \left(H(t) f(t), \begin{pmatrix} A(t,\bar z) \\ B(t,\bar z) \end{pmatrix} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-a} \Big(f_+(t)\, A(t,z)\, h_+^2(t) + f_-(t)\, B(t,z)\, h_-^2(t) \Big)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-a} \Big(\Big(K_s(-t) + K_{s-1}(-t) \Big)\, h_+(t)\, f_+(t) \\ &\qquad\qquad - i \Big(K_s(-t) - K_{s-1}(-t) \Big)\, h_-(t)\, f_-(t) \Big)\, dt. \end{aligned}$$

Как следует из результатов статьи [1], вектор-функция $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ является решением рассматриваемой канонической системы, а преобразование $f \mapsto F$ является изометрическим отображением пространств $\mathfrak{H}_a$ на пространства де Бранжа $\mathcal{H}_a$ со структурными функциями

$$\mathcal{E}_a(z) = A(-a,z) + iB(-a,z) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \Big((e^a + e^{-a})\, K_s(a) + (e^a - e^{-a})\, K_{s-1}(a) \Big)$$
$$= \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot (1 - |\beta|^2)^{-1/2} \cdot \Big(K_s(a) + \beta K_{s-1}(a) \Big)$$

при $\beta = \beta(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$. Целая функция $\mathcal{E}$ является структурной функцией некоторого пространства де Бранжа, если она принадлежит классу Эрмита–Билера, что означает, что $|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$, когда z лежит в верхней полуплоскости. Пространство де Бранжа со структурной функцией $\mathcal{E}$ состоит из всех целых функций F, для которых функции $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^\sharp}{\mathcal{E}}$ принадлежат пространству Харди H^2 в верхней полуплоскости, где $F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$; нормы этих функций в H^2 совпадают, и они определяют норму функции F в пространстве де Бранжа.

Можно проверить, что при каждом $a > 0$ пространство $\mathcal{H}_a$ совпадает (включая равенство норм) с пространством де Бранжа со структурной функцией $\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot K_s(a)$. В частности, в случае $a = 2\pi$, связанном с дзета-функцией, получаем структурную функцию $2K_s(2\pi)$.

Цепочка пространств де Бранжа $\mathcal{H}_a$, $a > 0$, будет рассматриваться в качестве нашей пятой модели.

Каждое из пространств $\mathcal{E}_a$ допускает естественное изометрическое вложение в L^2-пространство на вещественной прямой, в котором плотно объединение образов всех $\mathcal{E}_a$. В нашем случае это L^2-пространство относительно абсолютно непрерывной меры, плотность которой относительно меры Лебега на вещественной оси представляет собой предел функций $|\mathcal{E}_a|^{-2}$ при $a \searrow 0$. Поскольку $K_s(a)$ ведут себя как $\frac{\Gamma(s)}{2} \cdot \big(\frac{2}{a}\big)^s$ при $a \searrow 0$, для весовой функции при вещественных z (и тогда $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$; напомним, что $s = \frac{1 - iz}{2}$) получаем выражение

$$\lim |\mathcal{E}_a(z)|^{-2} = \lim \frac{\pi}{2a} \cdot |K_s(a)|^{-2} = \lim \frac{\pi}{2a} \cdot \left| \frac{\Gamma(s)}{2} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right|^{-2} = \pi \cdot |\Gamma(s)|^{-2}$$
$$= \frac{\pi}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s)} = \sin(\pi s) = \frac{1}{2i}\big(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}\big) = \frac{1}{2i}\Big(e^{\frac{\pi}{2}(i+z)} - e^{-\frac{\pi}{2}(i+z)}\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(i\,e^{\frac{\pi z}{2}} + i\,e^{-\frac{\pi z}{2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}\Big) = \cosh\frac{\pi z}{2}.$$

Весовое пространство на прямой может рассматриваться как образ пространства канонической системы на всей отрицательной полуоси. Существование объемлющего L^2-пространства – общий факт теории канонических систем; он представляется важным в контексте нашей работы, однако он не будет использоваться в дальнейшем.

Пространства де Бранжа $\mathcal{H}_a$, $a > 0$, инвариантны относительно преобразования $F \mapsto F(-z)$. Четное (нечетное) подпространство пространства $\mathcal{H}_a$ есть подпространство, содержащее все четные (соответственно нечетные) функции из $\mathcal{H}_a$. Эти подпространства взаимно ортогональны и их прямая сумма совпадает со всем пространством $\mathcal{H}_a$. В терминах отображения $f \mapsto F$ функция $F \in \mathcal{H}_a$ является четной тогда и только тогда, когда $f_- \equiv 0$, и F – нечётная тогда и только тогда, когда $f_+ \equiv 0$.

Отображение $f \mapsto F$ будет представлено как суперпозиция четырех возникающих естественным образом унитарных операторов. Формулы, используемые при факторизации, в дальнейшем будут использоваться для построения элемента гильбертова пространства канонической системы, соответствующего модифицированной подходящим образом дзета-функции.

Построим отображения

$$f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \eta_- \end{pmatrix} \mapsto F,$$

где промежуточные элементы выглядят следующим образом.

Первое унитарное преобразование представляет собой переход к безвесовым пространствам, в терминах которых получается наша вторая модель. Умножая функции $f_\pm$ соответственно на $h_\pm$, получаем функции из безвесового L^2-пространства на отрицательной полуоси. Также перенесем конструкцию на положительную полуось $\mathbb{R}_+$; а именно, для $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ из пространства канонической системы определим $u = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$, где $u_+, u_- \in L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$u_\pm(t) = f_\pm(-t)\,h_\pm(-t), \qquad t > 0.$$

Цепочка подпространств теперь характеризуется свойством, что функции $u_\pm$ обращаются в ноль на $(0,a)$, $a>0$. Тогда формула для значений функции F переписывается в терминах функций $u_\pm$ как

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^\infty \Big(\Big(K_s(t)+K_{s-1}(t)\Big)\,u_+(t)-i\,\Big(K_s(t)-K_{s-1}(t)\Big)\,u_-(t)\Big)\,dt.$$

Далее, в §3 будет показано, что последняя формула может быть преобразована в следующую:

$$F(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \left[v_+\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)-iv_-\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]x^{s-1}\,dx,\ (*)$$

где функции $v_\pm$ получаются применением преобразования Лапласа к функциям $u_\pm$:

$$v_\pm(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^{+\infty} u_\pm(t)\,e^{-tp}\,dt.$$

Преобразование Лапласа изометрически отображает безвесовое L^2-пространство на положительной полуоси на пространство Харди H^2 в полуплоскости $\{\operatorname{Re} p>0\}$. Таким образом получаем третью модель на прямой сумме двух таких пространств H^2. Цепочка подпространств теперь образована прямыми суммами пар подпространств $e^{-ap}\cdot H^2$, $a>0$.

Отображение $v\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\,v\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$ изометрически переводит класс H^2 в полуплоскости $\{x:\operatorname{Re} x>0\}$ в себя, и его образом является класс всех функций η, для которых $\eta(x)=\eta(1/x)$. Это получается из следующего вычисления, устанавливающего равенство L^2-норм относительно меры Лебега на мнимой оси. В нем используется то, что для любого вещественного числа q существуют вещественные числа $y_\pm$, удовлетворяющие уравнению $\frac{y-\frac{1}{y}}{2}=q$; тогда $y_+y_-=-1$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,v\left(\frac{iy+\frac{1}{iy}}{2}\right)\right|^2 dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|v\left(i\,\frac{y-\frac{1}{y}}{2}\right)\right|^2 dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\left|v\left(i\,\frac{y_--\frac{1}{y_-}}{2}\right)\right|^2 dy_-+\int\limits_0^{+\infty}\left|v\left(i\,\frac{y_+-\frac{1}{y_+}}{2}\right)\right|^2 dy_+\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \left(\frac{dq}{dy_-}\right)^{-1} dq + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \left(\frac{dq}{dy_+}\right)^{-1} dq$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \left(2\left(1+\frac{1}{y_-^2}\right)^{-1} + 2\left(1+\frac{1}{y_+^2}\right)^{-1}\right) dq$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \left(\frac{y_-^2}{y_-^2+1} + \frac{y_+^2}{y_+^2+1}\right) dq$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \, \frac{1+y_-^2+1+y_+^2}{(y_-^2+1)\,(y_+^2+1)}\, dq = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(iq)|^2 \, dq.$$

Третье преобразование определяется как

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \eta_- \end{pmatrix}, \qquad \eta_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v_\pm\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right),$$

причем пространство четвертой модели есть

$$\left\{ \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \eta_- \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} H^2 \\ H^2 \end{pmatrix} \,:\, \eta_\pm(x) = \eta_\pm(1/x) \right\}.$$

Подпространства соответствующей цепочки имеют вид $\begin{pmatrix} \mathfrak{K}_a \\ \mathfrak{K}_a \end{pmatrix}$, $a > 0$, где $\mathfrak{K}_a$ – подпространство пространства Харди H^2 в полуплоскости $\{\operatorname{Re} x > 0\}$, состоящие из всех функций $\eta \in \exp\left(\frac{a}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot H^2$, удовлетворяющих условию $\eta(x) = \eta\left(\frac{1}{x}\right)$. Окончательно получаем

$$F(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_a^\infty \left[\eta_+(x)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) - i\,\eta_-(x)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] x^{s-1}\, dx.$$

Теорема. *Отображения, переводящие $\eta \in \mathfrak{K}_a$ в функции*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \eta(x)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\, dx, \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \eta(x)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\, dx,$$

являются унитарными операторами из $\mathfrak{K}_a$ на четное и нечетное подпространства пространства $\mathcal{H}_a$ соответственно.

Этим результатом устанавливается унитарное соответствие между четвертой и пятой моделями.

Теорема доказывается следующим образом. Первая модель унитарно эквивалентна пятой. Также она унитарно эквивалентна второй, вторая – третьей, а третья – четвертой. Следовательно, четвертая модель унитарно эквивалентна пятой. Было бы интересно найти прямое доказательство.

§2. Операторы, связанные с моделями

Оператор канонической системы действует по формуле

$$(\mathcal{L}f)(t) = H(t)^{-1} J \dot{f}(t) = \begin{pmatrix} -h_+^{-2}(t)\dot{f}_-(t) \\ h_-^{-2}(t)\dot{f}_+(t) \end{pmatrix}$$

на парах достаточно гладких функций из пространства канонической системы. Будем рассматривать его действие на элементах подпространств из упоминавшейся цепочки, то есть на функциях, обращающихся в ноль на $(-a, 0)$ при некотором $a > 0$. Если f – гладкая функция на некотором луче $(-\infty, -a]$ и тождественно обращается в ноль на $(-a, 0)$, то в точке $-a$ возможен скачок, и действие оператора $\mathcal{L}$ на функцию f может быть описано той же самой формулой в терминах обобщенных функций; а именно, производные функций $f_\pm$ могут содержать скалярные кратные меры Дирака в $-a$. Переход к обобщенным функциям позволяет избежать рассмотрения граничных условий в точке $-a$ при работе с канонической системой на луче с отрицательным правым концом.

Если применить отображение $f \mapsto F$ к элементу $\mathcal{L}f$, получим функцию

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \Big(\big(- h_+^{-2}(t)\dot{f}_-(t) \big)\, A(t,z)\, h_+(t)^2 + \big(h_-^{-2}(t)\dot{f}_+(t) \big)\, B(t,z)\, h_-^2(t) \Big)\, dt \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \Big(- \dot{f}_-(t)\, A(t,z) + \dot{f}_+(t)\, B(t,z) \Big)\, dt \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \Big(f_-(t)\, \dot{A}(t,z) - f_+(t)\, \dot{B}(t,z) \Big)\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \Big(f_-(t)\, z h_-^2(t) B(t,z) + z f_+(t)\, h_+^2(t) A(t,z) \Big)\, dt = z \cdot F(z).$$

Таким образом, умножение на z в пространстве де Бранжа соответствует оператору $\mathcal{L}$ в пространстве канонической системы.

Найдем формулы копий отображения $\mathcal{L}$ в определенных выше промежуточных пространствах. Взяв u_+, u_- из пространства второй модели, построим

$$f_+(t) = \frac{u_+(-t)}{h_+(t)} = \sqrt{-2t}\, e^{-t}\, u_+(-t), \quad f_-(t) = \frac{u_-(-t)}{h_-(t)} = \sqrt{-2t}\, e^{t}\, u_-(-t),$$
$$t \leqslant -a < 0.$$

Применяя оператор $\mathcal{L}$ к f с такими f_+, f_-, получим вектор-функцию

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_+^2(t)} \frac{d}{dt} \frac{u_-(-t)}{h_-(t)} \\ \frac{1}{h_-^2(t)} \frac{d}{dt} \frac{u_+(-t)}{h_+(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_-(t)\dot{u}_-(-t) + \dot{h}_-(t) u_-(-t)}{h_+^2(t)\, h_-^2(t)} \\ -\frac{h_+(t)\dot{u}_+(-t) + \dot{h}_+(t) u_+(-t)}{h_+^2(t)\, h_-^2(t)} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь в безвесовое пространство, получаем элемент

$$\begin{pmatrix} \frac{h_-(-t)\dot{u}_-(t) + \dot{h}_-(-t) u_-(t)}{h_+^2(-t)\, h_-^2(-t)} \cdot h_+(-t) \\ -\frac{h_+(-t)\dot{u}_+(t) + \dot{h}_+(-t) u_+(t)}{h_+^2(-t)\, h_-^2(-t)} \cdot h_-(-t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_+(-t)\, h_-(-t)} \left(\dot{u}_-(t) + \frac{\dot{h}_-(-t)}{h_-(-t)} u_-(t) \right) \\ \frac{-1}{h_+(-t)\, h_-(-t)} \left(\dot{u}_+(t) + \frac{\dot{h}_+(-t)}{h_+(-t)} u_+(t) \right) \end{pmatrix}.$$

В нашем случае при $h_+(t) = \frac{e^t}{\sqrt{-2t}}$, $h_-(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{-2t}}$ получаем формулу для копии оператора $\mathcal{L}$ на второй модели, а именно,

$$\begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \mapsto 2t \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_-(t) + \frac{\dot{h}_-(-t)}{h_-(-t)} u_-(t) \\ -\dot{u}_+(t) - \frac{\dot{h}_+(-t)}{h_+(-t)} u_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\, \dot{u}_-(t) + (1-2t)\, u_-(t) \\ -2t\, \dot{u}_+(t) - (2t+1)\, u_+(t) \end{pmatrix}.$$

Теперь покажем, что копия оператора $\mathcal{L}$ в терминах функций $v_\pm$ действует как

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2(p-1) v_-'(p) - v_-(p) \\ 2(p+1) v_+'(p) + v_+(p) \end{pmatrix}.$$

Было доказано, что в терминах $u_\pm$ копия $\mathcal{L}$ отображает пару u_+, u_- в пару $\widetilde{u}_+, \widetilde{u}_-$ при

$$\widetilde{u}_+(t) = (1-2t)\,u_-(t) + 2t\,\dot{u}_-(t) = 2\frac{d(t\,u_-(t))}{dt} - 2t\,u_-(t) - u_-(t),$$
$$\widetilde{u}_-(t) = -\,(2t+1)\,u_+(t) - 2t\,\dot{u}_+(t) = -2\frac{d(t\,u_+(t))}{dt} - 2t\,u_+(t) + u_+(t).$$

Имеем

$$v_\pm(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} u_\pm(t)\,e^{-tp}\,dt, \qquad v'_\pm(p) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} tu_\pm(t)\,e^{-tp}\,dt;$$

для преобразования Лапласа функции $\widetilde{u}_+$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \widetilde{u}_+(t)\,e^{-tp}\,dt$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(tu_-(t))}{dt}e^{-tp}\,dt - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} tu_-(t)e^{-tp}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} u_-(t)e^{-tp}\,dt$$
$$= \frac{2p}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} tu_-(t)\,e^{-tp}\,dt + 2v'_-(p) - v_-(p) = -2(p-1)v'_-(p) - v_-(p).$$

Аналогично, для преобразования Лапласа функции $\widetilde{u}_-$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \widetilde{u}_-(t)\,e^{-tp}\,dt$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(tu_+(t))}{dt}e^{-tp}\,dt - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} tu_+(t)e^{-tp}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} u_+(t)e^{-tp}\,dt$$
$$= -\frac{2p}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} tu_+(t)\,e^{-tp}\,dt + 2v'_+(p) + v_+(p) = 2(p+1)v'_+(p) + v_+(p),$$

как и требовалось.

Наконец, перепишем отображение $\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2(p-1)v'_-(p) - v_-(p) \\ 2(p+1)v'_+(p) + v_+(p) \end{pmatrix}$ в терминах функций $\eta_\pm$. Обозначим образ пары $\begin{pmatrix} \eta_+ \\ \eta_- \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} \widetilde{\eta}_+ \\ \widetilde{\eta}_- \end{pmatrix}$. Имеем

$$\widetilde{\eta}_+(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big(2(p-1)v'_-(p) + v_-(p)\Big), \;\; \widetilde{\eta}_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2(p+1)v'_+(p) + v_+(p)\Big)$$

при $p = \frac{x+\frac{1}{x}}{2}$. Напомним, что $\eta_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v_\pm(p)$. Поскольку

$$\eta'_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v'_\pm(p) \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

для первой компоненты получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}_+(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big(2(p-1)v'_-(p) + v_-(p)\Big) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2} - 1\right) \cdot 2\sqrt{2}\eta'_-(x)\, \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} + \sqrt{2}\eta_-(x)\right) \\ &= -2\eta'_-(x)\, \frac{x^2 - x}{x+1} - \eta_-(x). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\widetilde{\eta}_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2(p+1)v'_+(p) + v_+(p)\Big) = 2\eta'_+(x)\, \frac{x^2 + x}{x-1} + \eta_+(x).$$

Таким образом, в терминах функций $\eta_\pm$ копия отображения $\mathcal{L}$ действует как

$$(\eta_+, \eta_-) \mapsto \left(-2\eta'_-(x)\, \frac{x^2 - x}{x+1} - \eta_-(x),\; 2\eta'_+(x)\, \frac{x^2 + x}{x-1} + \eta_+(x)\right).$$

Напомним, что действие копий оператора $\mathcal{L}$ в построенных модельных пространствах соответствует умножению на z в пространстве де Бранжа. Для четвертой модели этот факт выражается соотношением

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Bigg[&\left(-2\eta'_-(x)\, \frac{x^2 - x}{x+1} - \eta_-(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &- i\, \left(2\eta'_+(x)\, \frac{x^2 + x}{x-1} + \eta_+(x)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \Bigg] x^{s-1}\, dx \end{aligned}$$

$$= z \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \left[\eta_+(x) \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) - i\,\eta_-(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] x^{s-1}\,dx,$$

где, как обычно, $s = \frac{1-iz}{2}$. Эта формула является следствием аналогичного факта для любой из построенных моделей и унитарной эквивалентности всех рассматриваемых моделей; ее также можно проверить непосредственным вычислением.

§3. Доказательство формулы $(*)$

Начнем со следующей хорошо известной формулы:

$$K_s(t) = \int\limits_0^\infty \exp(-t\cosh y)\cosh sy\,dy.$$

Используя обозначение $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ и применяя замену переменной $x = e^y$, получаем

$$K_s(t) = \int\limits_1^\infty \exp\left(-t\,\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)\,\frac{x^s + x^{-s}}{2}\,\frac{dx}{x}.$$

Следовательно,

$$K_s(t) + K_{1-s}(t) = \int\limits_1^\infty \exp\left(-t\,\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)\left(\frac{x^s + x^{-s}}{2} + \frac{x^{1-s} + x^{s-1}}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}\big(x+1\big)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{1-s}\left(\frac{1}{x}+1\right)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}\big(x+1\big)\,\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \exp\left(-t\frac{\widetilde{x}+\frac{1}{\widetilde{x}}}{2}\right)\widetilde{x}^{s-1}\big(\widetilde{x}+1\big)\,\frac{d\widetilde{x}}{\widetilde{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}\big(x+1\big)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx,$$

где была применена подстановка $\widetilde{x} = \frac{1}{x}$. Аналогично,

$$K_s(t) - K_{1-s}(t) = \int_1^\infty \exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(\frac{x^s+x^{-s}}{2} - \frac{x^{1-s}+x^{s-1}}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}(x-1)\,\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{1-s}\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}(x-1)\,\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_0^1 \exp\left(-t\frac{\widetilde{x}+\frac{1}{\widetilde{x}}}{2}\right) \widetilde{x}^{s-1}(\widetilde{x}-1)\,\frac{d\widetilde{x}}{\widetilde{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) x^{s-1}(x-1)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left(-t\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx.$$

Имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\Big\{\Big(K_s(t)+K_{s-1}(t)\Big)\cdot u_+(t) - i\cdot\Big(K_s(t)-K_{s-1}(t)\Big)\cdot u_-(t)\Big\}\,dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^\infty \exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx\cdot u_+(t)\right.$$

$$\left. - i\cdot\int_0^\infty \exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx\cdot u_-(t)\right\}dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^{+\infty} u_+(t)\,\exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\,dt\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx$$

$$- \frac{i}{4\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^{+\infty} u_-(t)\,\exp\left(-t\,\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\,dt\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left\{v_+\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) - iv_-\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\} x^{s-1}\,dx,$$

что и требовалось. □

Список литературы

1. В. В. Капустин, *Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора.* — Алгебра и анализ **33**, No. 4, 107–124 (2021).

Kapustin V. V. Five Hilbert space models related to the Riemann zeta function.

In a recent work of the author, a de Branges space was constructed, as well as an operator on it whose spectrum coincides with the set of nontrivial zeros of the Riemann zeta function after a rotation of the complex plane. Also the canonical system related to the de Branges space in question was constructed. In this paper, a natural factorization is exhibited for the unitary operator that realizes the unitary correspondence between the Hilbert space of the canonical system and the de Branges space, as the superposition of four unitary operators.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 19 мая 2021 г.