

В. М. Каплицкий

**ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ
СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ**

ВВЕДЕНИЕ

Исследование качественных свойств решений однородных интегральных уравнений

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) \varphi(y) d\mu(y),$$

где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, а интегральный оператор в правой части уравнения является ограниченным оператором в некотором функциональном банаховом пространстве E , вложенном в пространство всех измеримых на Ω функций, представляет значительный интерес для широкого круга задач, которые сводятся к таким уравнениям. Поскольку построение точных решений или явных асимптотических разложений решений возможно лишь в очень специальных случаях, для уравнений в неограниченных областях возникает проблема описания поведения собственных функций на бесконечности. В работе предложен общий подход к доказательству вложения собственного подпространства в весовое пространство, определяемое весом $e^{\delta S(x)}$, где неотрицательная функция S удовлетворяют некоторым естественным условиям, из которых наиболее существенным является условие сублинейности:

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y).$$

Ключевые слова: интегральный оператор, нётеров оператор, собственная функция, весовые оценки, поточечные оценки.

Приведены и условия, достаточные для наличия обычной поточечной оценки, в которую входит функция $S(x)$. Используемый в работе метод состоит в привлечении известной теоремы о полуустойчивости дефектных чисел аналитической нётеровой оператор-функции ([1]), которая применяется к аналитической оператор-функции

$$T(\lambda) = U^{-1}(\lambda)TU(\lambda), \quad T = I - K,$$

где $U(\lambda)$ – оператор умножения на $e^{i\lambda S(x)}$. Использование этой теоремы позволяет обосновать локальное постоянство спектра и размерностей собственных подпространств оператор-функции $T(\lambda)$, что и приводит к весовой оценке всех собственных функций. Поточечная оценка получается из весовой при некоторых естественных дополнительных предположениях об образе оператора K . Задачи о поведении собственных функций дифференциальных или интегральных операторов представляют значительный интерес для математической физики (см., например, [2, гл. XIII, п. 11], [3, 4]). Описанный подход к задаче о весовой оценке собственных функций интегрального оператора был предложен в предыдущей работе автора [4], однако в работе [4] он был сформулирован не в полной общности. В частности, на функцию S накладывалось ещё одно условие (условие достаточно быстрого роста функции S на бесконечности), которое, как оказалось, является излишним. Настоящая работа восполняет эти недостатки, поскольку применяемый метод доказательства не требует какого-либо условия роста функции $S(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Помимо этого в работе получены результаты о поточечных оценках собственных функций и исследован случай, когда вводимые в рассмотрение мажорантные операторы K_θ (см. далее параграф 2) компактны. Как показывают примеры, в этом случае поточечные оценки собственных функций являются наилучшими (т.е. точными по порядку).

§1. ТЕОРЕМА О ПОЛУУСТОЙЧИВОСТИ ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЕЛ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ.

Пусть E и F – банаховы пространства. Через $L(E, F)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов из E в F . Оператор $T \in L(E, F)$, у которого образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны, называется оператором Нётера (Ф-оператором).

Для нётерова оператора обычным образом вводятся понятия d -характеристики и индекса (см., например, [1]). Нётеров оператор с нулевым индексом будем называть оператором Фредгольма. Заметим, что в большинстве современных работ операторы Нётера называют операторами Фредгольма. Точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется Φ -точкой оператор-функции $A(\lambda)$, если оператор $A(\lambda_0)$ является нётеровым (Φ -оператором). Множество Φ -точек оператор-функции $A(\lambda)$ называется областью нётеровости оператор-функции $A(\lambda)$. Областью нётеровости оператора A называется область нётеровости оператор-функции $A(\lambda) = A - \lambda I$. Область нётеровости аналитической оператор-функции $A(\lambda)$ обозначается через $\Phi_{A(\lambda)}$, область нётеровости оператора A обозначается через Φ_A . В работе [1] доказана важная теорема о полустойчивости дефектных чисел аналитической оператор-функции со значениями во множестве нётеровых операторов и различные её следствия. Здесь мы приведём некоторые из этих результатов в удобной для нас форме и дадим их приложения к весовым оценкам собственных функций интегральных операторов. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, B – банахово пространство и $A(\lambda): G \rightarrow \mathcal{L}(B)$ – аналитическая оператор-функция со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов в B .

Теорема 1.1 ([1]). *Пусть $A(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция в области G , и пусть для каждой точки $\lambda \in G$ оператор $A(\lambda)$ является Φ -оператором. Тогда для любой точки $\lambda_0 \in G$ найдется неотрицательное целое число k и проколотый круг*

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$$

такие, что $\alpha(\lambda) = \dim \ker A(\lambda) = k$ при $\lambda \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(\lambda_0)$.

Указанное свойство дефектного числа $\alpha(\lambda)$ называется полустойчивостью. Следующая теорема описывает структуру множества точек области G , в которых $\alpha(\lambda) \neq k$.

Теорема 1.2 ([1]). *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда всюду в области G , за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, функция $\alpha(\lambda)$ имеет постоянное значение $\alpha(\lambda) = k$. В упомянутых изолированных точках имеет место неравенство: $\alpha(\lambda) > k$.*

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть (Ω, Σ, μ) – некоторое пространство с σ -конечной мерой, $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – пространство всех комплекснозначных измеримых на Ω функций (точнее, классов эквивалентных функций). Банахово пространство $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ называется идеальным банаховым пространством, если из условий $|f(x)| \leq |g(x)|$ при почти всех $x \in \Omega$, где $f(x)$ – измеримая функция, а $g \in E$, вытекает, что $f \in E$ и $\|f\|_E \leq \|g\|_E$. Везде далее мы будем рассматривать случай, когда множество Ω является областью в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1. $S(x) \geq 0$,
2. $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$,
3. $S(-x) = S(x)$.

Если $w(x)$ – некоторая неотрицательная функция (вес), то через $E(w)$ будем обозначать пространство с нормой:

$$\|\varphi\|_{E(w)} = \|w\varphi\|_E.$$

Пусть

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) d\mu(y), \quad \varphi \in E,$$

$$(K_{\theta}\varphi)(x) = \int_{\Omega} |k(x, y)|e^{\theta S(x-y)}\varphi(y) d\mu(y), \quad \varphi \in E.$$

Теорема 2.1. Пусть $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – комплексное идеальное банахово пространство, $k(x, y): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция и функция $S(x)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Пусть для любого $\theta \in (0, \theta_0)$ мажорантный интегральный оператор K_{θ} ограничен в E . Пусть оператор-функция $T(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) определена формулой:

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda),$$

где

$$(U(\lambda)\varphi)(x) = e^{i\lambda S(x)}\varphi(x).$$

Тогда эта оператор-функция допускает аналитическое продолжение до оператор-функции, аналитической в полосе $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \theta_0$.

Доказательство. Докажем, что оператор-функция

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda),$$

где $(U(\lambda)\varphi)(x) = e^{i\lambda S(x)}\varphi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, продолжается до аналитической оператор-функции в полосе $|\Im \lambda| < \theta_0$. Пусть $K(\lambda) = U^{-1}(\lambda)KU(\lambda)$. Тогда $K(\lambda)$ – интегральный оператор с ядром

$$k(x, y; \lambda) = k(x, y)e^{-i\lambda(S(x)-S(y))}.$$

Если $|\Im \lambda| < \alpha < \theta_0$, то

$$|k(x, y; \lambda)| \leq |k(x, y)|e^{\alpha \max\{S(x)-S(y), S(y)-S(x)\}} \leq |k(x, y)|e^{\alpha S(x-y)}.$$

Пусть $\psi(x) = |K(\lambda)\varphi(x)|$. Тогда $\psi(x) \leq (K_\alpha|\varphi|)(x)$ почти всюду, откуда

$$\|K(\lambda)\varphi\|_E \leq \|K_\alpha|\varphi|\|_E \leq C\|\varphi\|_E,$$

что следует из определения идеального банахова пространства. Покажем, что для любого λ_0 , принадлежащего полосе $|\Im \lambda| < \theta_0$, найдутся операторы $A_n \in L(E, E)$ и круг $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ такой, что

$$K(\lambda) = \sum_{n \geq 0} A_n(\lambda - \lambda_0)^n, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \quad (2.1)$$

где ряд сходится в топологии пространства $L(E, E)$. Имеем

$$k(x, y; \lambda) = \sum_{n \geq 0} k(x, y)e^{-i\lambda_0(S(x)-S(y))} \frac{i^n(S(y)-S(x))^n}{n!} (\lambda - \lambda_0)^n.$$

Положим

$$(A_n\varphi)(x) = \frac{i^n}{n!} \int_{\Omega} k(x, y)e^{-i\lambda_0(S(x)-S(y))} (S(y)-S(x))^n \varphi(y) d\mu(y).$$

Зафиксируем любую постоянную q такую, что $0 < q < 1$. Из неравенства

$$\frac{\alpha^n}{n!} t^n \leq e^{\alpha t} \quad (\alpha > 0, t > 0)$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{|\lambda - \lambda_0|^n}{n!} \left| e^{-i\lambda_0(S(x)-S(y))} (S(y)-S(x))^n \right| \\ & \leq q^n e^{|\Im \lambda_0||S(x)-S(y)|} \frac{q^{-n}|\lambda - \lambda_0|^n}{n!} |S(x)-S(y)|^n \\ & \leq q^n e^{(|\Im \lambda_0|+q^{-1}|\lambda-\lambda_0|)|S(x)-S(y)|} \leq q^n e^{(|\Im \lambda_0|+q^{-1}|\lambda-\lambda_0|)S(x-y)}. \end{aligned}$$

В этих оценках мы использовали неравенство:

$$|S(x)-S(y)| \leq S(x-y).$$

Докажем, что ряд $\sum_{n \geq 0} A_n(\lambda - \lambda_0)^n \varphi$ сходится абсолютно при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} |\lambda - \lambda_0|^n \|A_n \varphi\|_E \\ & \leq \sum_{n \geq 0} q^n \left\| \int_{\Omega} |k(x, y)| e^{(|\Im \lambda_0| + q^{-1} |\lambda - \lambda_0|) S(x-y)} |\varphi(y)| d\mu(y) \right\|_E. \end{aligned}$$

При достаточно малом ε выполнено условие $\theta = |\Im \lambda_0| + q^{-1} \varepsilon < \theta_0$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} |\lambda - \lambda_0|^n \|A_n \varphi\|_E & \leq \sum_{n \geq 0} q^n \|K_{\theta} |\varphi|\|_E \\ & \leq \frac{C_{\theta}}{1-q} \|\varphi\|_E = \frac{C_{\theta}}{1-q} \|\varphi\|_E < +\infty. \end{aligned}$$

Ввиду полноты E отсюда следует, что ряд (2.1) сходится в круге $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, т.е. оператор-функция $K(\lambda)$ аналитична в полосе $|\Im \lambda| < \theta_0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.2. Пусть $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – комплексное идеальное банахово пространство, $k(x, y): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция и функция $S(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Пусть для любого $\theta \in (0, \theta_0)$ мажорантный интегральный оператор K_{θ} ограничен в E . Тогда, если оператор $T = I - K$ – нётеров, то найдется $\delta > 0$ такое, что оператор-функция $T(\lambda)$ является нётеровой оператор-функцией в полосе $|\Im(\lambda)| < \delta$. При этом для любой собственной функции φ оператора K , соответствующей собственному значению единица, справедливо включение: $e^{\delta S(x)} \varphi(x) \in E$.

Доказательство. Пусть

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda) K U(\lambda) = I - K(\lambda).$$

Тогда $T(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция в полосе $|\Im \lambda| < \theta_0$. При $\lambda = 0$ имеем

$$T(0) = I - K(0) = I - K,$$

поэтому, в силу условий теоремы, оператор $T(0)$ – нётеров. Так как функция $T(\lambda)$ непрерывна в полосе $|\Im \lambda| < \theta_0$, то отсюда следует, что

операторы $T(\lambda)$ нётеровы при всех достаточно малых λ , т.е. при $|\lambda| < \varepsilon_0$. Ввиду очевидного равенства

$$T(\lambda + \xi) = U^{-1}(\xi)T(\lambda)U(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

оператор $T(\lambda + \xi)$ нётеров при $|\lambda| < \varepsilon_0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $T(\lambda)$ – аналитическая в полосе $|\Im \lambda| < \varepsilon_0$ нётерова оператор-функция. По теореме 1.2 существует $k \in \mathbb{Z}^+$, такое, что

$$\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda) = k, \quad \text{при } 0 < |\lambda| < \varepsilon_1,$$

где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Так как при вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны, то

$$\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda) = \dim \ker T(0) = k$$

при всех λ таких, что $0 < |\lambda| < \varepsilon_1$.

Если $\Im \lambda \geq 0$, то оператор $U(\lambda)$ ограничен, поскольку функция $e^{i\lambda S(x)}$ ограничена при $\Im \lambda \geq 0$. При этом из определения $T(\lambda)$ следует равенство:

$$T(0)U(\lambda) = U(\lambda)T(\lambda), \quad \Im \lambda \geq 0. \quad (2.2)$$

Если $T(\lambda)\varphi_\lambda = 0$ при $\Im \lambda \geq 0$, то из равенства (2.2) следует, что $T(0)\varphi = 0$, где $\varphi = U(\lambda)\varphi_\lambda$. Положим $\lambda = i\delta$, $0 < \delta < \varepsilon_1$. Тогда

$$\varphi = U(i\delta)\varphi_{i\delta} = e^{-\delta S(x)}\varphi_{i\delta} = e^{-\delta S(x)}\psi, \quad (2.3)$$

где $\psi \in \ker T(i\delta) \subset E$. Так как $\dim \ker T(0) = \dim \ker T(i\delta)$, то из равенства (2.3) следует, что $\ker T(0) = \{e^{-\delta S(x)}\psi : \psi \in \ker T(i\delta)\}$. Таким образом, если $\varphi \in \ker T(0) = \ker(I - K)$, то $e^{\delta S(x)}\varphi \in E$.

Теорема доказана. $\square$

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о наилучшей постоянной $\delta > 0$ такой, что $\ker(I - K) \subset E(e^{\delta S(x)})$. Введем следующие характеристики оператор-функции $T(\lambda)$:

$$\theta^* = \sup\{\theta > 0 : K_\theta \in L(E, E)\}, \quad (2.4)$$

и

$$\delta^* = \sup\{0 < \delta < \theta^* : \Pi_\delta \subset \Phi_{T(\lambda)}\}, \quad (2.5)$$

где Π_δ – полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\Im \lambda| < \delta\}$, а $\Phi_{T(\lambda)}$ – область нётеровости оператор-функции $T(\lambda)$.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо вложение:

$$\ker(I - K) \subset E(e^{(\delta^* - \varepsilon)S(x)}).$$

Доказательство. Пусть $\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda)$. По теореме 1.2 существует $k \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\alpha(\lambda) = k$ везде в полосе Π_{δ^*} , где δ^* определено формулой (2.5), за исключением, быть может, множества F , состоящего из изолированных точек. При вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны, поэтому $\alpha(\lambda) = k = \dim \ker T(0)$ при $\lambda \in \Pi_{\delta^*} \setminus F$. Так как множество F состоит из изолированных точек, то на любом интервале $(i(\delta^* - \varepsilon), i\delta^*)$ найдется точка $i\delta$ такая, что $\alpha(i\delta) = k$. Из равенства размерностей $\ker T(i\delta)$ и $\ker T(0)$ выводится вложение: $\ker(I - K) \subset E(e^{\delta S(x)})$. Таким образом, в качестве δ можно взять любое число, удовлетворяющее условию $0 < \delta < \delta^*$.

Теорема доказана. $\square$

Вообще говоря, $\delta^* \leq \theta^*$. В некоторых случаях можно доказать, что

$$\delta^* = \theta^*,$$

т.е. ширина полосы нётеровости совпадает с шириной полосы аналитичности.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и пространство E является комплексной линейной оболочкой вещественного идеального банахова пространства X такого, что пространство X и сопряженное пространство X' имеют порядково непрерывную норму. Пусть мажорантные операторы K_θ компактны при всех $0 < \theta < \theta^*$. Тогда

$$\delta^* = \theta^*.$$

Доказательство. Разложим вещественную и мнимую часть ядра оператора $K(\lambda)$ на положительную и отрицательную части. Возникающие при этом функции будут мажорироваться модулем функции $k(x, y; \lambda)$. После этого мы получим представление оператора $K(\lambda)$ в виде линейной комбинации (с комплексными коэффициентами) четырех положительных (в X) операторов $A_j = A_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, 4$) таких, что $A_j(\lambda) \leq K_\theta$ ($j = 1, \dots, 4$) при $|\operatorname{Im} \lambda| < \theta$. В идеальных банаховых пространствах с указанными в условиях теоремы свойствами справедливо утверждение: если положительный оператор мажорируется компактным, то он компактен (теорема Доддса-Фремлина, см. [5]). Операторы

K_θ компактны в $E = X + iX$, а тогда и в X , поэтому операторы A_j компактны в X , а тогда они компактны и в E , что легко вывести из определения комплексной линейной оболочки вещественного банахова пространства. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим любое ограниченное множество M в пространстве E . Пусть множество $M_1 \subset X$ состоит из функций x таких, что $x = \operatorname{Re} y$, где $y \in M$, а множество $M_2 \subset X$ состоит из функций x таких, что $x = \operatorname{Im} y$, где $y \in M$. Тогда $M \subset M_1 + iM_2$. Из свойств нормы в комплексном идеальном банаховом пространстве следует, что M_i ($i = 1, 2$) – ограниченные множества в пространстве X . Пусть $A: E \rightarrow E$, причём $A: X \rightarrow X$ и A компактен в X . Пусть $\{x_n\}$ – последовательность функций из $A(M)$ и $x_n = Ay_n$, $y_n \in M$. Тогда $y_n = y'_n + iy''_n$, где $y'_n \in M_1$, $y''_n \in M_2$. Так как множества $A(M_1)$ и $A(M_2)$ предкомпактны в X , то из последовательности $x'_n = Ay'_n$ можно выделить сходящуюся в X , а тогда и в E , подпоследовательность $x'_{k(n)}$, а из последовательности $x''_{k(n)} = Ay''_{k(n)}$ можно выделить сходящуюся в X , а тогда и в E , подпоследовательность $x''_{k(l(n))}$. Пусть $s(n) = k(l(n))$. Так как $x_{s(n)} = x'_{s(n)} + ix''_{s(n)}$, то последовательность $x_{s(n)}$ сходится в E , а значит оператор A компактен. Таким образом, операторы A_j ($j = 1, \dots, 4$) компактны в E . Отсюда следует, что оператор $K(\lambda)$ компактен как сумма четырех компактных операторов, а значит оператор $T(\lambda) = I - K(\lambda)$ является нётеровым. Таким образом, ширина полосы аналитичности совпадает с шириной полосы нётеровости. Теорема доказана. $\square$

Теорема применима, например, в случае $E = L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$). Предельные случаи $p = 1$ и $p = \infty$ требуют дополнительного исследования.

Перейдем к вопросу о том, когда от весовых оценок собственных функций можно перейти к поточечным.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и мажорантные операторы K_θ действуют из E в $L_\infty(\Omega)$. Тогда для любой собственной функции φ оператора K , соответствующей собственному значению единица, и для любого $\epsilon > 0$ существует константа $C_\epsilon > 0$ такая, что справедлива поточечная оценка:

$$|\varphi(x)| < C_\epsilon e^{-(\delta^* - \epsilon)S(x)}.$$

Доказательство. Пусть φ – собственная функция, соответствующая собственному значению единица. Тогда для любого $\epsilon > 0$ функция $\psi(x) = e^{(\delta^* - \epsilon)S(x)}\varphi(x)$ принадлежит пространству E . Поэтому

$$\varphi(x) = e^{-(\delta^* - \epsilon)S(x)} \int_{\Omega} k(x, y) e^{(\delta^* - \epsilon)(S(x) - S(y))} \psi(y) d\mu(y)$$

Поскольку $|S(x) - S(y)| \leq S(x - y)$, получаем, что

$$|\varphi(x)| \leq e^{-(\delta^* - \epsilon)S(x)} (K_{\delta^* - \epsilon} |\psi|)(x).$$

По условию теоремы, мажорантный оператор переводит E в $L_{\infty}(\Omega)$, значит функция $F(x) = (K_{\delta^* - \epsilon} |\psi|)(x)$ принадлежит пространству $L_{\infty}(\Omega)$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Как показывают примеры, оценки, даваемые доказанными теоремами, являются точными по порядку. Пример, подтверждающий точность оценки в случае компактности мажорантных операторов, также можно построить. Для этого достаточно рассмотреть одномерное интегральное уравнение, заданное оператором типа свертки:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x) k(x - y) a(y) \varphi(y) dy.$$

Если коэффициент $a(x)$ стремится к нулю на бесконечности, то оператор в правой части этого интегрального уравнения компактен в $L_p(\mathbb{R})$. Пусть функция $k(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, преобразование Фурье этой функции аналитично в полосе $|\operatorname{Im} z| < \alpha$ и не допускает аналитического продолжения ни в какую более широкую полосу. В этом случае все собственные функции допускают оценку:

$$|\varphi(x)| < C_{\epsilon} e^{-(\alpha - \epsilon)|x|}$$

и оценка является неулучшаемой. Подробное доказательство довольно громоздко и мы планируем привести его в другой работе.

Приведем основные примеры выбора функции S , с помощью которой вводятся мажорантные операторы.

Пример I (случай быстрого роста функции $S(x)$ на бесконечности). Пусть

$$S(x) = |x|^q,$$

где $|x|$ – норма вектора x , q – постоянная такая, что $0 \leq q \leq 1$. Эта функция, как легко видеть, сублинейна и удовлетворяет всем требуемым условиям.

Пример II (случай медленного роста функции $S(x)$ на бесконечности). Пусть

$$S(x) = \ln(1 + |x|),$$

где $|x|$ – норма вектора x . Эта функция сублинейна и удовлетворяет всем требуемым условиям.

Естественная область применения доказанных теорем – это оценки решений многомерных уравнений типа свёртки с переменными коэффициентами, т.е. уравнений вида:

$$\varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^n} a(x)k(x-y)b(y)\varphi(y) dy = 0.$$

К таким уравнениям сводятся многие задачи математической физики. Для того чтобы проиллюстрировать применения теорем, доказанных в статье, рассмотрим самый простой случай, когда k – непрерывная функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$, допускающая при больших x оценку:

$$|k(x)| \leq Ce^{-\alpha S(x)}.$$

Например, в случае функции S из примера II это означает, что:

$$|k(x)| \leq \frac{C}{|x|^\alpha}$$

при $|x| > R$, где $\alpha > n$ (это условие обеспечивает сходимость интеграла от $|k(x)|$ на бесконечности). Если функции $a(x)$ и $b(x)$ ограничены, то интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)k(x-y)b(y)\varphi(y) dy$$

ограничен в $E = L_p(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно видеть, что мажорантные операторы K_θ ограничены только при $\theta < \alpha - n$, и, соответственно $\theta^* = \alpha - n$. Кроме того, легко показать, что образ оператора K вложен в L_∞ . Известно, что если один из коэффициентов $a(x)$ или $b(x)$ стремится к нулю на бесконечности, то оператор K компактен. В силу теоремы 2.5 все собственные функции в этом случае для любого $\epsilon > 0$ допускают оценку:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C_\epsilon}{|x|^{\alpha-n-\epsilon}}.$$

Можно показать, что эта оценка является точной по порядку.

В заключение автор выражает признательность рецензенту за внимательный анализ первоначального варианта статьи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов*. — УМН **12**, No. 2 (1957), 44–118.
2. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. IV: Анализ операторов*, М., Мир, 1982.
3. В. М. Каплицкий, *Оценки скорости убывания собственных функций интегральных операторов в неограниченных областях и их применения в статистической механике*. XIV международная конференция “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования”, Цей, 03–08 июля 2017, тезисы докладов, с. 67–68.
4. В. М. Каплицкий, *Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях*. — Известия Российской академии наук, Серия математическая, **75**, No. 5 (2011), 65–92.
5. Ch. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, 2010.

Kaplitskii V. M. A note on asymptotic estimates for the rate of decay at infinity of the eigenfunctions of integral operators.

The article is devoted to the problem mentioned in the title. A class of integral operators that admit majorant operators, determined by a certain sublinear function $S(x)$, is introduced. It is shown that all eigenfunctions of operators from this class admit a universal estimate for the rate of decay at infinity in terms of $S(x)$. Applications of this result to integral equations typical for mathematical physics are discussed.

Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова 8а, 344090
г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: kaplitsky@donpac.ru

Поступило 21 июня 2021 г.