

О. Л. Виноградов

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В работе исследуется абсолютная монотонность и логарифмическая абсолютная монотонность одного семейства тригонометрических функций. Даются приложения абсолютной монотонности к точным неравенствам для производных и разностей тригонометрических многочленов и целых функций конечной степени.

§1. АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Далее $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества комплексных, вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $E = \langle a, b \rangle$ – невырожденный промежуток в $\mathbb{R}$. Запись вида “функция $f(z)$ ” понимается как сокращение записи “функция $z \mapsto f(z)$ ”.

Определение 1. Функция f называется *абсолютно монотонной* на промежутке E , если f непрерывна на E , бесконечно дифференцируема на $E \setminus \{b\}$ и $f^{(k)}(z) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $z \in E \setminus \{b\}$.

Как доказал С. Н. Бернштейн [1, §11], абсолютная монотонность функции f на $[a, b)$ равносильна тому, что f раскладывается на $[a, b)$ в степенной ряд с неотрицательными коэффициентами:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad c_k \geq 0, \quad z \in [a, b).$$

Многие часто встречающиеся абсолютно монотонные функции обладают более сильным свойством логарифмической абсолютной монотонности, причем последнее удобнее для проверки.

Определение 2. Функция f называется *логарифмически абсолютно монотонной* на промежутке E , если f непрерывна на E , дифференцируема на $E \setminus \{b\}$, $f > 0$ и функция $(\ln f)'$ абсолютно монотонна на $E \setminus \{b\}$.

Ключевые слова: абсолютно монотонные функции, неравенство Бернштейна.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 18-11-00055.

Множество функций, абсолютно монотонных на промежутке E , обозначим символом $AM(E)$, а логарифмически абсолютно монотонных – символом $LAM(E)$.

Замечание 1. *Логарифмически абсолютно монотонная функция f абсолютно монотонна. Обратное неверно.*

Доказательство. Поскольку по условию f непрерывна в точке b , можно считать, что $b \notin E$. Тогда $f = e^g$, где $g = \ln f$, $g' \in AM(E)$. По формуле Фаа ди Бруно для производных композиции (или просто по индукции) $f \in AM(E)$. Контрпримером к обратному утверждению может служить функция $f(z) = 1 + z$ на $[0, 1]$. $\square$

В [2] функция f называлась логарифмически абсолютно монотонной на (открытом) промежутке E , если $f > 0$ и $\ln f \in AM(E)$. Данное выше определение отличается тем, что функции разрешается принимать значения, меньшие 1; это не нарушает включения $LAM(E) \subset AM(E)$.

Оно аналогично определению логарифмически вполне монотонной функции; см., например, [3, глава 5], и мотивировано ролью, которую логарифмически абсолютно монотонные функции играют в теории вероятностей [4, глава 2]. Если $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ – распределение на $\mathbb{Z}_+$, то есть $p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, то функция $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ называется вероятностной производящей функцией распределения $\mathcal{P}$. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между распределениями на $\mathbb{Z}_+$ и абсолютно монотонными функциями P на $[0, 1]$, удовлетворяющими условию $P(1) = 1$. При этом логарифмически абсолютно монотонные функции соответствуют безгранично делимым распределениям.

Замечание 2. Если тейлоровское разложение функции f на промежутке $[0, b)$ имеет вид $f(z) = a_N z^N + \dots$, где $N \in \mathbb{N}$, $a_N > 0$, то абсолютная монотонность функций f и $z^{-N} f(z)$ равносильна. Поэтому для абсолютной монотонности функции f достаточно логарифмической абсолютной монотонности функции $z^{-N} f(z)$.

Замечание 3. Ясно, что произведение логарифмически абсолютно монотонных функций логарифмически абсолютно монотонно.

Как известно, функция тангенс раскладывается в степенной ряд с положительными коэффициентами:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_{2s-1} z^{2s-1}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Положительность коэффициентов τ_{2s-1} при всех $s \in \mathbb{N}$ легко следует по индукции из того, что функция $y = \operatorname{tg} z$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 1 + y^2$. Она также получается из формулы

$$\tau_{2s-1} = \frac{(-1)^{s-1} 4^s (4^s - 1) B_{2s}}{(2s)!}$$

и известного знакопереживания чисел Бернулли B_{2s} ; см., например, [5, п. 449]. Для выражения тейлоровских коэффициентов тангенса через числа Бернулли применялось тождество

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z. \quad (1)$$

Следующая формула содержится в [6, формулы 4.4.7.11 и 5.4.16.14]. Для полноты изложения приведем ее элементарное доказательство.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{z}{2^k}.$$

Доказательство. Заменяя z на $\frac{z}{2}$, перепишем (1) в виде

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

и применим n раз:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{z}{2^n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{z}{2^k}.$$

Остается устремить n к ∞ . □

§2. ПРИМЕРЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе, используя только лишь абсолютную монотонность тангенса и лемму 1, мы исследуем обычную и логарифмическую абсолютную монотонность функций f вида

$$f(z) = \frac{\cos \alpha_1 z \cdots \cos \alpha_M z \cdot \sin \beta_1 z \cdots \sin \beta_N z}{\cos \alpha'_1 z \cdots \cos \alpha'_{M'} z \cdot \sin \beta'_1 z \cdots \sin \beta'_{N'} z} z^{N'-N}. \quad (2)$$

Здесь $N, M, N', M' \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_j, \alpha'_j, \beta_j, \beta'_j \geq 0$. Примем соглашение, что при $\beta = 0$ множитель $\sin \beta z$ заменяется на z . Равенство нулю одного из чисел N, M, N', M' означает, что соответствующие множители отсутствуют. Функция f рассматривается на промежутке $[0, R)$, где $R > 0$ – ближайшая к нулю ее особая точка. Величина R зависит от параметров и не будет явно указываться.

Вычислим логарифмические производные сомножителей, применим лемму 1 и разложим тангенс в степенной ряд. Получим

$$\begin{aligned} (\ln \cos \alpha z)' &= -\alpha \operatorname{tg} \alpha z = -\sum_{s=1}^{\infty} \tau_{2s-1} \alpha^{2s} z^{2s-1}, \\ \left(\ln \frac{\sin \beta z}{z} \right)' &= \beta \operatorname{ctg} \beta z - \frac{1}{z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2^k} \operatorname{tg} \frac{\beta z}{2^k} \\ &= -\sum_{s=1}^{\infty} \tau_{2s-1} \beta^{2s} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2ks}} \right) z^{2s-1} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\tau_{2s-1}}{4^s - 1} \beta^{2s} z^{2s-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (\ln f(z))' &= \sum_{s=1}^{\infty} \tau_{2s-1} \left(-\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} + \sum_{j=1}^{M'} \alpha'_j{}^{2s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} + \frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^{N'} \beta'_j{}^{2s} \right) z^{2s-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tau_{2s-1} > 0$, получаем критерий логарифмической абсолютной монотонности функции f .

Теорема 1. *Функция f , заданная формулой (2), логарифмически абсолютно монотонна на $[0, R)$ тогда и только тогда, когда*

$$-\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} + \sum_{j=1}^{M'} \alpha'_j{}^{2s} - \frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} + \frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^{N'} \beta'_j{}^{2s} \geq 0, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Замечание 4. Условие (3) при $s = 1$ необходимо не только для логарифмической, но и для обычной абсолютной монотонности. Действительно, если $f(z) = c_0 + c_1 z^2 + \dots$, причем $c_0 > 0$, $c_1 \geq 0$, то $(\ln f(z))' = \frac{2c_1}{c_0} z + \dots$ и $\frac{2c_1}{c_0} \geq 0$.

Отметим еще, что в случае отсутствия синусов, то есть при $N = N' = 0$, лемма 1 не используется.

Упростим условие (3) в нескольких частных случаях.

$$1. f_1(z) = \frac{\cos \alpha_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha_M z}{\cos z}.$$

Условие (3) имеет вид $\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} \leq 1$. Легко видеть, что если оно выполнено при $s = 1$, то оно выполнено и при $s > 1$, поскольку в этом случае все α_j не превосходят единицы. По замечанию 4 критерии логарифмической и обычной абсолютной монотонности для f_1 совпадают: $\sum_{j=1}^M \alpha_j^2 \leq 1$.

В частности, функция $\frac{\cos^M \alpha z}{\cos z}$ логарифмически абсолютно монотонна при $\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$. При $M = 1$ этот результат хорошо известен.

$$2. f_2(z) = \frac{\sin \beta_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta_N z}{z^{N-1} \sin z}.$$

Условие (3), как и в примере 1, принимает вид $\sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} \leq 1$. По замечанию 4 критерии логарифмической и обычной абсолютной монотонности для f_2 совпадают: $\sum_{j=1}^N \beta_j^2 \leq 1$.

В частности, функция $\frac{\sin^N \beta z}{z^{N-1} \sin z}$ логарифмически абсолютно монотонна при $\beta \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$. При $N = 1$ этот результат хорошо известен.

$$3. f_3(z) = \frac{\sin \beta_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta_N z}{z^N \cos z}.$$

Условие (3) имеет вид $\frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} \leq 1$. Легко видеть, что если оно выполнено при $s = 1$, то оно выполнено и при $s > 1$, поскольку в этом случае все β_j строго меньше двух, а тогда

$$\sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} = 4^s \sum_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{2}\right)^{2s} \leq 4^s \sum_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2 \leq 4^s \cdot \frac{3}{4} \leq 4^s - 1.$$

По замечанию 4 критерии логарифмической и обычной абсолютной монотонности для f_3 совпадают: $\sum_{j=1}^N \beta_j^2 \leq 3$.

В частности, функция $\frac{\sin^N \beta z}{z^N \cos z}$ логарифмически абсолютно монотонна при $\beta \leq \sqrt{\frac{3}{N}}$. При $N = 1$ абсолютная монотонность этой функции была установлена в [7] довольно сложным способом, с помощью интегрального представления многочленов Эйлера. При $N = 3$ получаем, что функция $\frac{\sin^3 z}{z^3 \cos z}$ логарифмически абсолютно монотонна.

$$4. f_4(z) = \frac{z \cos \alpha_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha_M z}{\sin z}.$$

Критерий логарифмической абсолютной монотонности (3) записывается в виде

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} \leq \frac{1}{4^s - 1}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Отсюда получается достаточное условие $\sum_{j=1}^M \alpha_j^2 \leq \frac{1}{4}$ и необходимое (в том числе для абсолютной монотонности) $\sum_{j=1}^M \alpha_j^2 \leq \frac{1}{3}$. При $M = 1$ первое из них является и необходимым для абсолютной монотонности функции f_4 , поскольку иначе она меняет знак на $(0, \pi)$. Другими словами, функция $\frac{z \cos \alpha z}{\sin z}$ логарифмически абсолютно монотонна при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ и не является абсолютно монотонной при $\alpha > \frac{1}{2}$. Этот результат хорошо известен.

При $M \geq 2$ условие $\sum_{j=1}^M \alpha_j^2 \leq \frac{1}{4}$ уже не является необходимым. Например, логарифмическая абсолютная монотонность имеет место при $\alpha_j = 2^{-j}$. Последнее независимо следует из формулы

$$\prod_{j=1}^M \cos \frac{z}{2^j} = \frac{\sin z}{2^M \sin \frac{z}{2^M}} \quad (5)$$

и результата для $M = 0$.

При $M \geq 2$ граница множества, задаваемого системой (4), состоит из частей поверхностей тел, задаваемых неравенствами (4) при различных $s \in \mathbb{N}$, и частей поверхности $\max |\alpha_j| = \frac{1}{2}$. Уже при $M = 2$ в этом семействе встречаются функции, абсолютно монотонные, но не логарифмически. Доказательство этого факта использует свойства многочленов Бернулли и будет проведено в §3.

Рассмотрим частный случай $f_{41}(z) = \frac{z \cos^M \alpha z}{\sin z}$, $M \geq 2$. Перепишем (4) в виде $\alpha \leq (M(4^s - 1))^{-\frac{1}{2s}} = x_s$ и докажем, что минимум величины x_s достигается при $s = 1$. Ясно, что достаточно доказать это для $M = 2$. Тогда $x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $x_2 = 30^{-\frac{1}{4}} > x_1$, а при $s \geq 3$ будет $x_s > 2^{-\frac{2s+1}{2s}} \geq 2^{-\frac{7}{6}} > x_1$. Таким образом, критерии логарифмической и обычной абсолютной монотонности для f_{41} совпадают: $\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3M}}$.

При $M = 3$ получаем, что функция $\frac{z \cos^3 \frac{z}{3}}{\sin z}$ логарифмически абсолютно монотонна.

В следующих трех случаях ответ получается не только из условия (3), но и из уже разобранных примеров.

$$5. f_5(z) = \frac{\cos z}{\cos \alpha_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha_M z}.$$

Условие (3) принимает вид $\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} \geq 1$, что равносильно условию $\max_{1 \leq j \leq M} \alpha_j \geq 1$.

$$6. f_6(z) = \frac{z^{N-1} \sin z}{\sin \beta_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta_N z}.$$

Условие (3), как и в примере 5, принимает вид $\sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} \geq 1$, что равносильно условию $\max_{1 \leq j \leq N} \beta_j \geq 1$.

$$7. f_7(z) = \frac{z^N \cos z}{\sin \beta_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta_N z}.$$

Условие (3) принимает вид $\frac{1}{4^s - 1} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2s} \geq 1$, что равносильно условию $\max_{1 \leq j \leq N} \beta_j \geq 2$.

Достаточность условий в примерах 5–7 также следует из логарифмической абсолютной монотонности функций $\frac{\cos \alpha z}{\cos z}$, $\frac{\sin \alpha z}{\sin z}$ при $\alpha \leq 1$ и $\frac{\cos \alpha z}{\sin z}$ при $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Необходимость этих условий не только для логарифмической, но и для обычной абсолютной монотонности функций f_5 , f_6 и f_7 очевидна, поскольку без них эти функции меняют знак на $[0, R)$.

$$8. f_8(z) = \frac{\sin z}{z \cos \alpha_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha_M z}.$$

Условие (3) принимает вид

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j^{2s} \geq \frac{1}{4^s - 1}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Например, логарифмическая абсолютная монотонность имеет место при $\alpha_j = 2^{-j}$ ($1 \leq j \leq M-1$), $\alpha_M = 2^{1-M}$. Последнее независимо следует из формулы (5) и логарифмической абсолютной монотонности тангенса. Отсюда получаются необходимые условия $\max_{1 \leq j \leq M} \alpha_j \geq \frac{1}{2}$

и $\sum_{j=1}^M \alpha_j^2 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Оба необходимы и для обычной абсолютной монотонности: первое – по неотрицательности функции на $[0, R)$, а второе – по замечанию 4. При $M = 1$ второе из них, то есть условие $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, является и достаточным для логарифмической абсолютной монотонности функции f_8 . Это совпадает с частным случаем примера 4.

Рассмотрим частный случай $f_{81}(z) = \frac{\sin z}{z \cos^M \alpha z}$, $M \geq 2$.

Перепишем условие (6) в виде $\alpha \geq (M(4^s - 1))^{-\frac{1}{2s}} = y_s$. Тогда $\lim_{s \rightarrow \infty} y_s = \frac{1}{2}$. Неравенство $y_s \leq \frac{1}{2}$ равносильно неравенству $M(4^s - 1) \geq 4^s$, что очевидно. Таким образом, критерии логарифмической и обычной абсолютной монотонности для f_{81} совпадают: $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Достаточность еще проще следует из тождества $\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}$ и логарифмической абсолютной монотонности функций $\frac{\cos \alpha z}{\cos z}$ и $\frac{\sin \alpha z}{\cos z}$ при $\alpha \leq 1$.

Если $f \in AM[0, b)$, то степенной ряд функции f сходится по крайней мере на $\langle -b, b \rangle$. В этом случае доопределим функцию f на $\langle -b, 0 \rangle$ как сумму степенного ряда. В следующей лемме, если $p < 0$ или $q < 0$, используется это соглашение.

Лемма 2. Пусть $f \in LAM[0, b)$. Тогда функции f^t ($t > 0$), $\frac{f(\beta z)}{f(\alpha z)}$ ($\beta > \alpha > 0$), $\frac{f^{\frac{1}{\beta}}(\beta z)}{f^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha z)}$ ($\beta > \alpha > 0$), $\left(\frac{f(qz)}{f(pz)}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ ($p, q \in \mathbb{R}$, $p + q \geq 0$; при $p = q$ функция определяется по непрерывности) тоже логарифмически абсолютно монотонны на промежутках того же вида.

Доказательство. Докажем последнее утверждение. Не умаляя общности, можно считать промежутки открытыми справа. Пусть

$$(\ln f)'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad b_k \geq 0.$$

Тогда

$$\left(\ln \left(\frac{f(qz)}{f(pz)} \right)^{\frac{1}{q-p}} \right)' = \frac{q(\ln f)'(qz) - p(\ln f)'(pz)}{q-p} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{q^{k+1} - p^{k+1}}{q-p} z^k.$$

При $p + q \geq 0$ все дроби $\frac{q^{k+1} - p^{k+1}}{q-p}$ неотрицательны. Второе и третье утверждения доказываются аналогично, а первое очевидно из формулы $\ln f^t = t \ln f$. $\square$

Например, по лемме 2 логарифмическая абсолютная монотонность функций $\frac{z}{\sin z}$ и $\frac{\sin^3 z}{z^3 \cos z}$ влечет таковую для функций

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{2z}{\sin 2z} : \frac{z}{\sin z} \quad \text{и} \quad \frac{\cos^4 \frac{z}{2}}{\cos z} = \frac{\sin^3 z}{z^3 \cos z} : \frac{\sin^3 \frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^3 \cos \frac{z}{2}}.$$

В [8] доказана логарифмическая абсолютная монотонность функции $\left(\frac{q \sin pz}{p \sin qz} \right)^{\frac{1}{p-q}}$ при $p + q > 0$. Этот результат получается применением леммы 2 к функции $\frac{z}{\sin z}$. Содержательные обращения утверждений леммы 2 см. в [4].

§3. ПРИМЕР ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, АБСОЛЮТНО МОНОТОННОЙ, НО НЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ

Подберем параметры α и β , при которых функция

$$f(z) = \frac{z \cos \alpha z \cos \beta z}{\sin z}$$

абсолютно монотонна на $[0, \pi)$, но не логарифмически.

Пользуясь известным разложением ([9, формула 6.3.2.3]; см. также [7])

$$\frac{z \cos \alpha z}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} B_{2n} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) z^{2n},$$

разложим f в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \frac{z \cos \alpha z \cos \beta z}{\sin z} &= \frac{z(\cos(\alpha - \beta)z + \cos(\alpha + \beta)z)}{2 \sin z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)! \cdot 2} \left(B_{2n} \left(\frac{1+\alpha-\beta}{2} \right) + B_{2n} \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2} \right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициент c_0 равен 1, поэтому далее считаем, что $n \in \mathbb{N}$.

Параметры α и β подберем на интервале $(0, \frac{1}{2})$ так, чтобы обнулить коэффициенты при z^4 и z^6 . Напомним, что

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \quad B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Сократив на ненулевые коэффициенты, составим систему

$$\begin{cases} f_4(\alpha, \beta) = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \frac{7}{15} = 0, \\ f_6(\alpha, \beta) = \alpha^6 + 15\alpha^4\beta^2 + 15\alpha^2\beta^4 + \beta^6 - \\ - 5\alpha^4 - 30\alpha^2\beta^2 - 5\beta^4 + 7\alpha^2 + 7\beta^2 - \frac{31}{21} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что система имеет решение. Решая первое уравнение относительно β^2 и выбирая меньший корень, получаем

$$\beta^2 = \beta^2(\alpha) = 1 - 3\alpha^2 - 2\sqrt{\frac{2}{15} - \alpha^2 + 2\alpha^4}.$$

В частности, β убывает по α , $\beta^2(\frac{1}{2}) = \alpha_0^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{30}} < \frac{1}{4}$ и, в силу симметрии, $\beta^2(\alpha_0) = \frac{1}{4}$. Обозначим через α_* корень уравнения $f_4(\alpha, \alpha) = 0$. Тогда $\alpha_*^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{15}}$ и $\beta(\alpha_*) = \alpha_*$. Подставляя $\beta = \beta(\alpha)$ во второе уравнение, находим $f_6(\alpha_0, \beta(\alpha_0)) > 0$, $f_6(\alpha_*, \beta(\alpha_*)) < 0$. Поэтому уравнение $f_6(\alpha, \beta(\alpha)) = 0$ имеет корень на (α_0, α_*) , и, следовательно, система имеет решение на $(0, \frac{1}{2})^2$.

Проверим, что получившаяся функция абсолютно монотонна. Для этого докажем, что если $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$ и два соседних коэффициента в разложении (7) равны нулю, то остальные положительны. С помощью интегрального представления многочленов Бернулли, см. [10, формула 1.13.20],

$$(-1)^{n-1} B_{2n}(x) = 2n \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x - e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch} 2\pi t - \cos 2\pi x} t^{2n-1} dt, \quad x \in [0, 1],$$

получим

$$\frac{(-1)^n}{2n} \left(B_{2n} \left(\frac{1+\alpha-\beta}{2} \right) + B_{2n} \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2} \right) \right) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) t^{2n-1} dt,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{\cos \pi(\alpha - \beta) + e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch} 2\pi t + \cos \pi(\alpha - \beta)} + \frac{\cos \pi(\alpha + \beta) + e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch} 2\pi t + \cos \pi(\alpha + \beta)}.$$

По интегральному варианту правила знаков Декарта [11, отдел 5, задачи 80, 81] число нулей функции

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)t^p dt, \quad p > -1,$$

с учетом кратности не превосходит числа перемен знака функции φ . Это утверждение легко доказывается по индукции с помощью теоремы Ролля.

Докажем, что функция φ имеет не более двух перемен знака на $(0, +\infty)$. Обозначим для краткости $2\pi t = s$, $\pi\alpha = u$, $\pi\beta = v$. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{(\cos(u-v)+e^{-s})(\operatorname{ch} s + \cos(u+v)) + (\cos(u+v)+e^{-s})(\operatorname{ch} s + \cos(u-v))}{(\operatorname{ch} s + \cos(u-v))(\operatorname{ch} s + \cos(u+v))}.$$

Знаменатель дроби положителен, а числитель можно представить в виде $e^s P(e^{-s})$, где P – кубический многочлен с коэффициентами, зависящими от u и v . Так как $P(0) = \cos u \cos v > 0$ и $P(1) > 0$, многочлен P имеет не более двух перемен знака на $(0, 1)$.

Таким образом, Φ имеет не более двух нулей на $(-1, +\infty)$ с учетом кратности. Кроме того, $\Phi(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow -1+$. Поэтому если $\Phi(p) = 0$ при $p = 2m - 1$ и $p = 2m + 1$, то $\Phi(p) > 0$ при $-1 < p < 2m - 1$ и $p > 2m + 1$. Следовательно, коэффициенты c_{2n} при $n \neq m, m + 1$ положительны.

Остается заметить, что функция f с тейлоровским разложением вида $f(z) = 1 + c_2 z^2 + c_8 z^8 + \dots$, где $c_2 \neq 0$, не может быть логарифмически абсолютно монотонной, поскольку в разложении $\ln f(z) = c_2 z^2 - \frac{c_2^2}{2} z^4 + \dots$ коэффициент при z^4 отрицателен.

§4. ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕРАВЕНСТВАМ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

Далее H_n – множество вещественных или комплексных тригонометрических многочленов степени не выше n , P – полунорма на H_n , инвариантная относительно сдвига, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt$ – коэффициенты Фурье функции f . Операторы разности и усреднения с шагом $h \in \mathbb{R}$ определяются равенствами

$$\delta_h f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

$$\square_h f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right),$$

δ_h^r и $\square_h^r$ при $r \in \mathbb{Z}_+$ — r -е степени операторов δ_h и $\square_h$. Напомним, что $c_k(f^{(r)}) = (ik)^r c_k(f)$,

$$c_k(\delta_h^r f) = \left(2i \sin \frac{kh}{2}\right)^r c_k(f), \quad c_k(\square_h^r f) = \left(\cos \frac{kh}{2}\right)^r c_k(f).$$

В работах [7, 12] был развит метод получения точных неравенств для производных и разностей тригонометрических многочленов и целых функций конечной степени. Этот метод восходит к тождеству М. Рисса, выражающему производную тригонометрического многочлена в виде линейной комбинации его равноотстоящих сдвигов. Ключевую роль в этом методе играет знакопереживание коэффициентов Фурье некоторых функций. В случае четной неотрицательной функции для этого достаточно ее выпуклости на $[0, \pi]$. Так, неравенство М. Рисса

$$P(T') \leq \frac{n}{2 \sin \frac{nh}{2}} P(\delta_h T), \quad 0 < h < \frac{2\pi}{n},$$

для $T \in H_n$ является следствием выпуклости функции $\frac{z}{\sin z}$ на $(-\pi, \pi)$. Свойство абсолютной монотонности позволяет усиливать неравенства. Сформулируем нужный нам результат из [7].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, операторы U и V задаются на H_n равенствами:

$$UT(x) = \sum_{k=-n}^n \lambda_k c_k(T) e^{ikx}, \quad VT(x) = \sum_{k=-n}^n \mu_k c_k(T) e^{ikx},$$

где $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}$. Пусть еще $\lambda_k = g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mu_k$, где функция g непрерывна, четна, неотрицательна и выпукла вниз на $[-\pi, \pi]$. Тогда для любого $T \in H_n$ имеем

$$P(UT) \leq g(\pi) P(VT),$$

причем для функций $T(x) = ae^{inx} + be^{-inx}$ неравенство обращается в равенство.

Не стремясь к общности формулировки, ограничимся двумя новыми примерами, иллюстрирующими способ применения абсолютной монотонности к доказательству и усилению неравенств.

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $0 < h \leq v < \frac{\pi}{n}$. Тогда

$$P(h^{-3}\delta_h^3 T - \square_v T^{(3)}) \leq \frac{1}{n^2} \left(\left(\frac{\sin \frac{nh}{2}}{nh/2} \right)^3 \frac{1}{\cos \frac{nv}{2}} - 1 \right) P(\square_v T^{(5)}), \quad (8)$$

$$P(h^{-3}\delta_h^3 T) \leq \left(\frac{\sin \frac{nh}{2}}{nh/2} \right)^3 \frac{1}{\cos \frac{nv}{2}} P(\square_v T^{(3)}). \quad (9)$$

Доказательство. Докажем оценку (8). Положим

$$\lambda_k = \left(\frac{2i}{h} \sin \frac{kh}{2} \right)^3 - (ik)^3 \cos \frac{kv}{2}, \quad \mu_k = -(ik)^5 \cos \frac{kv}{2},$$

$g\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$ (значение $g(0)$ далее будет определено по непрерывности). Тогда можно положить

$$g(z) = \frac{\left(\frac{2i}{h} \sin \frac{nhz}{2\pi} \right)^3 - \left(\frac{inz}{\pi} \right)^3 \cos \frac{nvz}{2\pi}}{-\left(\frac{inz}{\pi} \right)^5 \cos \frac{nvz}{2\pi}} = \frac{\pi^2}{n^2 z^2} \left(\left(\frac{\sin \beta z}{\beta z} \right)^3 \frac{1}{\cos \alpha z} - 1 \right),$$

где $\alpha = \frac{nv}{2\pi}$, $\beta = \frac{nh}{2\pi}$, $0 < \beta \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Функция $g_0(z) = \left(\frac{\sin \beta z}{\beta z} \right)^3 \frac{1}{\cos \alpha z}$ абсолютно монотонна на $[0, \pi]$ (см. пример 3 из §2), $g_0(0) = 1$ и $g'_0(0) = 0$. Поэтому и $g \in AM[0, \pi]$. Ввиду четности функция g выпукла на $[-\pi, \pi]$. Остается подставить значение $g(\pi)$.

Неравенство (9) доказывается аналогично. Кроме того, оно следует из (8), если применить к функции $G = \square_v T^{(3)}$ неравенство Бернштейна $P(G'') \leq n^2 P(G)$ и воспользоваться неравенством треугольника. $\square$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $0 \leq 3u \leq h < \frac{2\pi}{n}$. Тогда

$$P(\square_u^3 T' - h^{-1} \delta_h T) \leq \frac{1}{n^2 h} \left(\frac{nh \cos^3 \frac{nu}{2}}{2 \sin \frac{nh}{2}} - 1 \right) P(\delta_h T''), \quad (10)$$

$$P(\square_u^3 T') \leq \frac{n \cos^3 \frac{nu}{2}}{2 \sin \frac{nh}{2}} P(\delta_h T). \quad (11)$$

Доказательство. Неравенство (10) доказывается тем же способом, что и (8). При этом используется абсолютная монотонность функции $g_0(z) = \frac{\beta z \cos^3 \alpha z}{\sin \beta z}$ на $[0, \pi]$, где $\alpha = \frac{nu}{2\pi}$, $\beta = \frac{nh}{2\pi}$, $0 \leq 3\alpha \leq \beta < 1$ (см. пример 4 из §3).

Неравенство (11) доказывается аналогично или выводится из (10) применением неравенства Бернштейна и неравенства треугольника. $\square$

Замечание 5. Неравенства (8)–(11) обращаются в равенства на функциях $T(x) = ae^{inx} + be^{-inx}$. Аналогичные точные неравенства с заменой параметра $n \in \mathbb{N}$ на параметр $\sigma > 0$ верны для целых функций степени не выше σ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ и некоторых полунормированных пространствах. Доказательство сохраняется; технические подробности см. в [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Н. Бернштейн, *Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений*, Собрание сочинений в 4-х томах, Т. 1. М., Изд. АН СССР, 1952, 285–320.
2. B.-N. Guo, F. Qi, *A property of logarithmically absolutely monotonic functions and the logarithmically complete monotonicity of a power-exponential function.* — U.P.B. Sci. Bull., Series A **72**, No. 2 (2010), 21–30.
3. R. L. Schilling, R. Song, Z. Vondraček, *Bernstein functions*, Berlin, De Gruyter, 2010.
4. F. W. Steutel, K. van Harn, *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, New York, Marcel Dekker, 2004.
5. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2*, М., Физматгиз, 1959.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции*, М., Физматлит, 2002.
7. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на тригонометрических многочленах.* — Пробл. мат. анализа **21** (2000), 68–109.
8. Z.-H. Yang, Y.-M. Chu, *Monotonicity and absolute monotonicity for the two-parameter hyperbolic and trigonometric functions with applications.* — J. of inequalities and applications **200** (2016).
9. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы*, М., Физматлит, 2003.
10. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, М., Наука, 1965.
11. Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа. Т.2*, М., Наука, 1978.
12. О. Л. Виноградов, *Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на классах целых функций конечной степени.* — Сиб. мат. ж. **48**, No. 3 (2007), 538–555.

Vinogradov O. L. Logarithmically absolutely monotone trigonometric functions.

We study absolute monotonicity and logarithmic absolute monotonicity for functions

$$f(z) = \frac{\cos \alpha_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha_M z \cdot \sin \beta_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta_N z}{\cos \alpha'_1 z \cdot \dots \cdot \cos \alpha'_{M'} z \cdot \sin \beta'_1 z \cdot \dots \cdot \sin \beta'_{N'} z} z^{N'-N}.$$

Here $N, M, N', M' \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_j, \alpha'_j, \beta_j, \beta'_j \geq 0$; if $\beta = 0$, then the factor $\sin \beta z$ is replaced by z ; if N, M, N' , or M' equals zero, then the corresponding factors are absent. A criterion of logarithmic absolute monotonicity for f is obtained.

We give some applications of absolute monotonicity to sharp inequalities for derivatives and differences of trigonometric polynomials and entire functions of exponential type.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр., д.28
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 14 июня 2021 г.