

А. Б. Александров

**ОБ ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВОЙ НОРМЕ
ФУНКЦИИ z^n НА КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ
ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\text{Lip}(\mathfrak{F})$ обозначает пространство всех липшицевых функций, заданных на подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. множество всех функций $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$|f(z) - f(w)| \leq C|z - w| \quad (1.1)$$

для некоторой константы $C = C(f)$ и для всех $z, w \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\|f\|_{\text{Lip}(\mathfrak{F})}$ наименьшую из констант $C \geq 0$, удовлетворяющих условию (1.1).

Непрерывная функция f на множестве $\mathfrak{F}$ называется *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(N_1) - f(N_2)\| \leq C\|N_1 - N_2\| \quad (1.2)$$

для любых нормальных операторов N_1 и N_2 в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таких, что $\sigma(N_1), \sigma(N_2) \subset \mathfrak{F}$, где $\|T\|$ и $\sigma(T)$ обозначают соответственно операторную норму и спектр оператора T , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество всех операторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\text{OL}(\mathfrak{F})$. Пусть $\|f\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})}$ обозначает наименьшую из констант $C \geq 0$, удовлетворяющих условию (1.2).

Если функция f задана на более широком множестве, чем $\mathfrak{F}$, то для краткости мы будем писать $f \in \text{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})}$ вместо $f|_{\mathfrak{F}} \in \text{OL}(\mathfrak{F})$ и $\|f|_{\mathfrak{F}}\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})}$. Мы будем писать $\|f\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})} = +\infty$, если $f \notin \text{OL}(\mathfrak{F})$. Эти же соглашения будут действовать и для пространства $\text{Lip}(\mathfrak{F})$.

Ясно, что $\text{OL}(\mathfrak{F}) \subset \text{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|\cdot\|_{\text{Lip}(\mathfrak{F})} \leq \|\cdot\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})}$. Известно, что равенство $\text{OL}(\mathfrak{F}) = \text{Lip}(\mathfrak{F})$ выполняется только для конечных множеств $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда No. 18-11-00053, <https://rscf.ru/project/18-11-00053/>.

Мы не требуем замкнутости множества $\mathfrak{F}$, хотя случай произвольного множества $\mathfrak{F}$ по существу сводится к случаю замкнутого множества $\mathfrak{F}$. Это связано с тем, что любая функция $f \in \text{Lip}(\mathfrak{F})$ продолжается единственным образом до липшицевой функции на замыкание множества $\text{clos } \mathfrak{F}$. Таким образом, пространство $\text{Lip}(\mathfrak{F})$ отождествляется естественным образом с пространством $\text{Lip}(\text{clos } \mathfrak{F})$, а пространство $\text{OL}(\mathfrak{F})$ – с пространством $\text{OL}(\text{clos } \mathfrak{F})$.

В основном мы будем рассматривать случай, когда $\mathfrak{F} \subset \mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ обозначает единичную окружность, т.е. $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В этом случае операторы N_1 и N_2 в формуле (1.2) являются унитарными.

Некоторые результаты этой статьи относятся и к случаю, когда $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}$. Тогда соответствующие нормальные операторы N_1 и N_2 являются самосопряжёнными.

Более подробную информацию об операторно липшицевых функциях можно найти в обзоре [2].

Хорошо известно, что $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T})} = \|z^n\|_{\text{Lip}(\mathbb{T})} = |n|$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T})} \geq \|z^n\|_{\text{Lip}(\mathbb{T})} = |n|$. Остаётся доказать, что $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T})} \leq |n|$. Случай отрицательного n легко сводится к случаю положительного n , поскольку $z^n = z^{-n}$ при $z \in \mathbb{T}$. Для положительного n нужное нам неравенство вытекает из следующего тождества

$$U^n - V^n = \sum_{k=1}^n U^{n-k}(U - V)V^{k-1}$$

для любых унитарных операторов U и V , см. [1], где рассмотрены и другие примеры функций, у которых операторно липшицева норма совпадает с обычной липшицевой нормой. Аналогично для любого бесконечного подмножества $\mathfrak{F}$ окружности $\mathbb{T}$ имеют место следующие равенства: $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})} = \|z^n\|_{\text{Lip}(\mathfrak{F})} = |n|$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\|z^n\|_{\text{Lip}(\mathfrak{F})} = |n|$ для любого бесконечного множества $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{T}$, и воспользоваться очевидными неравенствами $\|z^n\|_{\text{Lip}(\mathfrak{F})} \leq \|z^n\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})} \leq \|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T})} = |n|$.

Пусть Λ – непустое конечное подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда ясно, что $\|z^n\|_{\text{Lip}(\Lambda)} < |n|$, если $|n| \geq 2$.

Для операторно липшицевой нормы это, вообще говоря, неверно.

Мы докажем, что неравенство $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)} < |n|$ выполняется в том и только в том случае, когда $|\Lambda| < 2|n|$, где $|\Lambda|$ обозначает число элементов множества Λ . Таким образом, $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)} = |n|$ в том и только в том случае, когда $|\Lambda| \geq 2|n|$ (теорема 3.1).

Нам понадобится описание операторно липшицевых функций в терминах мультипликаторов Шура.

Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ – произвольные множества. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ пространство всех матриц $A = \{a(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$, задающих ограниченный оператор из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. Пусть $\|\{a(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}\|$ обозначает норму соответствующего оператора из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. С каждой парой матриц A и B вида $A = \{a(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$ и $B = \{b(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$ можно связать их произведение Шура $A \star B \stackrel{\text{def}}{=} \{a(s, t)b(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$. Матрица $M = \{m(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$ называется *мультипликатором Шура* пространства $\mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$, если $M \star A \in \mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ для любой матрицы $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. Пусть $\mathfrak{M}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ обозначает пространство всех мультипликаторов Шура пространства $\mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. Положим

$$\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|M \star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T}), \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})} \leq 1\}.$$

С каждой матрицей $M = \{m(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$ мы связываем также следующую величину:

$$\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S} \times \mathcal{T})} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|M \star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T}), \|A\| \leq 1, a(t, t) = 0 \text{ при всех } t \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ – множество всех матриц $M = \{m(s, t)\}_{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}}$ таких, что $\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S} \times \mathcal{T})} < +\infty$.

Обычно мы будем писать $\|M\|_{\mathfrak{M}}$ и $\|M\|_{\mathfrak{M}_0}$ вместо $\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})}$ и $\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S} \times \mathcal{T})}$ соответственно, когда понятно, о каких множествах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ идёт речь.

С каждой функцией f , заданной на множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$, мы связываем функцию $\mathfrak{D}_0 f : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\mathfrak{D}_0 f)(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{если } z \neq w, \\ 0, & \text{если } z = w. \end{cases}$$

Мы будем использовать следующее хорошо известное описание операторно липшицевых функций, см., например, теорему 3.3.2 в обзоре [2].

Теорема 1.1. Пусть f – непрерывная функция на подмножестве $\mathfrak{F}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что множество $\mathfrak{F}$ является подмножеством прямой или окружности. Тогда $f \in \text{OL}(\mathfrak{F})$ в

том и только в том случае, когда $\mathfrak{D}_0 f \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$, при этом имеет место равенство $\|f\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}_0 f\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})}$.

Нам понадобится ещё одно хорошо известное утверждение, относящееся к операторно липшицевым функциям, см., например, теорему 3.1.2 в обзоре [2].

Теорема 1.2. Пусть $f \in \text{OL}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ – подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, лежащее на окружности или прямой. Предположим, что N – нормальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причём $\sigma(N) \subset \mathfrak{F}$. Тогда

$$\|f(N)R - Rf(N)\| \leq \|f\|_{\text{OL}(\mathfrak{F})} \|NR - RN\|$$

для любого оператора R , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

§2. ОЦЕНКИ НОРМ НЕКОТОРЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ШУРА

Пусть $\mathcal{T}_n$ обозначает пространство всех комплексных тригонометрических полиномов на единичной окружности $\mathbb{T}$ степени не выше n , где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Другими словами, $\mathcal{T}_n$ – это пространство всех комплексных функций на единичной окружности $\mathbb{T}$, принадлежащих линейной оболочке семейства функций $\{z^k\}_{k=-n}^n$ на окружности $\mathbb{T}$. Ясно, что семейство $\{z^k\}_{k=-n}^n$ является базисом пространства $\mathcal{T}_n$ и $\dim \mathcal{T}_n = 2n + 1$.

Мы приведём здесь в удобном для нас виде некоторые простейшие свойства тригонометрических полиномов. Заметим, что функция $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathcal{T}_n$ в том и только в том случае, когда существует многочлен P такой что $\deg P \leq 2n$ и $f(z) = z^{-n}P(z)$ для всех $z \in \mathbb{T}$. Отсюда мгновенно вытекает следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{T}$, причём $|\Lambda| = 2n - 1$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда отображение $f \mapsto f|_{\Lambda}$ является линейным изоморфизмом пространства $\mathcal{T}_{n-1}$ на пространство $\ell^\infty(\Lambda)$.

Пусть Λ – конечное подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$. Две различные точки ζ и ξ множества Λ будем называть соседними, если существует дуга J окружности $\mathbb{T}$ такая, что $J \cap \Lambda = \{\zeta, \xi\}$.

Лемма 2.2. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{T}$, причём $|\Lambda| = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует ненулевая вещественная мера μ на Λ такая, что $\int_{\Lambda} f d\mu = 0$

для всех $f \in \mathcal{T}_{n-1}$. Мера μ определяется однозначно с точностью до ненулевого вещественного множителя. Кроме того, она обладает следующим свойством: $\mu(\{\zeta\})\mu(\{\xi\}) < 0$ для любых соседних точек ζ и ξ множества Λ .

Доказательство. Обозначим через M_Λ пространство всех мер μ на Λ таких, что $\int_{\mathbb{T}} f d\mu = 0$ для всех $f \in \mathcal{T}_{n-1}$. Из леммы 2.1 следует, что $\dim\{f|_\Lambda : f \in \mathcal{T}_{n-1}\} = 2n - 1$. Следовательно, $\dim M_\Lambda = 1$. Заметим, что $\overline{\mathcal{T}_{n-1}} = \mathcal{T}_{n-1}$. Таким образом, $\overline{M(\Lambda)} = M(\Lambda)$. Отсюда следует, что пространство M_Λ содержит ненулевую вещественную меру.

Таким образом, мы доказали, что существует ненулевая вещественная мера μ на Λ такая, что $\int_{\Lambda} f d\mu = 0$ для всех $f \in \mathcal{T}_{n-1}$. Такая мера единственна с точностью до ненулевого вещественного множителя, поскольку $\dim M_\Lambda = 1$.

Заметим ещё, что из леммы 2.1 следует, что $\mu(\{\zeta\}) \neq 0$ для любой точки $\zeta \in \Lambda$ и для любой ненулевой меры $\mu \in M_\Lambda$.

Остаётся доказать, что $\mu(\{\zeta\})\mu(\{\xi\}) < 0$ для соседних точек ζ и ξ множества Λ . Возьмём ненулевой вещественный тригонометрический многочлен $f \in \mathcal{T}_{n-1}$ такой, что $f(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{\zeta, \xi\}$. Ясно, что $\{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0\} = \Lambda \setminus \{\zeta, \xi\}$, поскольку ненулевой тригонометрический полином $f \in \mathcal{T}_{n-1}$ не может иметь больше, чем $2n - 2$ корня. Таким образом, $0 = \int_{\Lambda} f d\mu = f(\zeta)\mu(\{\zeta\}) + f(\xi)\mu(\{\xi\})$. Возьмём дугу J окружности $\mathbb{T}$ такую, что $J \cap \Lambda = \{\zeta, \xi\}$. Ясно, что функция f знакопостоянна на дуге J . В частности, $f(\zeta)f(\xi) > 0$. Следовательно, $\mu(\{\zeta\})\mu(\{\xi\}) < 0$. $\square$

Пусть Λ – подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$, состоящее из $2n$ элементов. Множество Λ можно разбить на два n -элементных множества Λ_1 и Λ_2 таким образом, чтобы точки ζ и ξ не были соседними точками множества Λ для любых $\zeta, \xi \in \Lambda_1$ и для любых $\zeta, \xi \in \Lambda_2$. Такое разбиение множества Λ будем называть стандартным разбиением на два n -элементных множества.

Теорема 2.3. Пусть Λ – подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$, состоящее из $2n$ элементов, где $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим стандартное разбиение множества Λ на два n -элементных множества Λ_1 и Λ_2 .

Тогда

$$\left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta \in \Lambda_1, \xi \in \Lambda_2} \right\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)} = n.$$

Доказательство. Занумеруем точки множеств Λ_1 и Λ_2 последовательностями $\{z_k\}_{k=1}^n$ и $\{w_k\}_{k=1}^n$ соответственно. Из леммы 2.2 следует, что существуют две последовательности положительных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n \beta_k^2 = 1$$

и

$$\sum_{k=1}^n z_k^m \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n w_k^m \beta_k^2 \quad (2.1)$$

для всех целых m таких, что $|m| < n$.

Положим

$$M = \left\{ \frac{z_j^n - w_k^n}{z_j - w_k} \right\}_{1 \leq j, k \leq n}.$$

Нам нужно доказать, что $\|M\|_{\mathfrak{M}} = n$.

Матрица M представима в виде $M = \sum_{l=0}^{n-1} M_l$, где

$$M_l = \{z_j^{n-1-l} w_k^l\}_{1 \leq j, k \leq n}.$$

Ясно, что

$$\|M\|_{\mathfrak{M}} \leq \sum_{l=0}^{n-1} \|M_l\|_{\mathfrak{M}} = n.$$

Докажем теперь противоположное неравенство.

Пусть U и V обозначают диагональные матрицы размеров $n \times n$ с диагональными элементами $z_1, z_2, \dots, z_n$ и $w_1, w_2, \dots, w_n$ соответственно.

Заметим, что

$$M \star X = \sum_{l=0}^{n-1} M_l \star X = \sum_{l=0}^{n-1} U^{n-1-l} X V^l.$$

$$\text{Положим } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ и } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Из равенств (2.1) вытекает, что $(V^j \beta, V^k \beta) = (U^j \alpha, U^k \alpha)$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq j, k < n$. Отсюда и из того, что каждая из двух систем векторов $\{U^j \alpha\}_{j=0}^{n-1}$ и $\{V^j \beta\}_{j=0}^{n-1}$ полна в $\mathbb{C}^n$, вытекает, что существует унитарная матрица X размеров $n \times n$ такая, что $X(V^j \beta) = U^j \alpha$ при всех $j \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq j < n$.

Имеем:

$$(M \star X) \beta = \sum_{l=0}^{n-1} U^l X V^{n-1-l} \beta = \sum_{l=0}^{n-1} U^l U^{n-1-l} \alpha = n U^{n-1} \alpha.$$

Отсюда следует, что $\|M \star X\| \geq n$. Следовательно, $\|M\|_{\mathfrak{M}} \geq n$. $\square$

Следствие 2.4. Пусть Λ – подмножество окружности $\mathbb{T}$, состоящее по крайней мере из $2n$ элементов, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta, \xi \in \Lambda} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\Lambda \times \Lambda)} = n.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta, \xi \in \Lambda} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\Lambda \times \Lambda)} \leq \left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta, \xi \in \mathbb{T}} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{T} \times \mathbb{T})} = \|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T})} = n.$$

Оценку снизу достаточно получить в случае, когда Λ состоит из $2n$ элементов. Для такого множества Λ имеем:

$$\left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta, \xi \in \Lambda} \right\|_{\mathfrak{M}_0(\Lambda \times \Lambda)} \geq \left\| \left\{ \frac{\zeta^n - \xi^n}{\zeta - \xi} \right\}_{\zeta \in \Lambda_1, \xi \in \Lambda_2} \right\|_{\mathfrak{M}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)} = n,$$

где Λ_1 и Λ_2 обозначают то же, что в теореме 2.3. $\square$

Теорема 2.5. Пусть $\{z_j\}_{j=1}^{2n-1}$ – последовательность точек единичной окружности $\mathbb{T}$ такая, что $z_j \neq z_k$ при $j \neq k$, где $n \in \mathbb{N}$. Положим $W \stackrel{\text{def}}{=} \{w_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq 2n-1}$, где

$$w_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{z_j^n - z_k^n}{z_j - z_k}, & \text{если } j \neq k, \\ n z_j^{n-1}, & \text{если } j = k. \end{cases}$$

Тогда $\|W\|_{\mathfrak{M}_0} < n$.

Доказательство. Можно считать, что $n > 1$. Пусть U – диагональная матрица размеров $(2n-1) \times (2n-1)$ с диагональными элементами $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$. Тогда $W = \sum_{l=0}^{n-1} W_l$, где $W_l = \{z_j^{n-1-l} z_k^l\}_{1 \leq j, k \leq 2n-1}$.

Ясно, что $\|W\|_{\mathfrak{M}_0} \leq n$.

Предположим, что $\|W\|_{\mathfrak{M}_0} = n$. Тогда существует матрица $X = \{x_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq 2n-1}$ такая, что $x_{jj} = 0$ для всех j , $1 \leq j \leq 2n-1$, $\|X\| = 1$ и $\|W \star X\| \geq n$. Заметим, что $W \star X = \sum_{l=0}^{n-1} U^{n-1-l} X U^l$. Возьмём вектор $e \in \mathbb{C}^{2n-1}$ такой, что $\|e\| = 1$ и $\|(W \star X)e\| \geq n$. Тогда

$$n \leq \|(W \star X)e\| = \left\| \sum_{l=0}^{n-1} U^{n-1-l} X U^l e \right\| \leq \sum_{l=0}^{n-1} \|U^{n-1-l} X U^l e\| \leq n.$$

Отсюда следует, что $U^{n-1-l} X U^l e = U^{n-1} X e$ для всех $l \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq l \leq n-1$, т.е. $X U^l e = U^l X e$ для всех $l \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq l \leq n-1$. Заметим, что равенство $\|Xx\| = \|x\|$ для $x \in \mathbb{C}^{2n-1}$ выполняется в том и только в том случае, когда $x \in \text{Ker}(I - X^* X)$. Здесь и далее мы отождествляем матрицу с соответствующим линейным оператором на $\mathbb{C}^{2n-1}$. В частности, I обозначает тождественный оператор на $\mathbb{C}^{2n-1}$. Пусть $\mathfrak{L}$ обозначает линейную оболочку последовательности векторов $\{U^l e\}_{l=0}^{n-1}$. Мы доказали, что сужение оператора X на подпространство $\mathfrak{L}$ является изометрическим оператором. Следовательно,

$$(X U^l e, X U^m e) = (U^l e, U^m e) \quad (2.2)$$

для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq l, m \leq n-1$.

$$\text{Пусть } e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ и } X e = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X \begin{pmatrix} z_1^l \alpha_1 \\ z_2^l \alpha_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1}^l \alpha_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^l \beta_1 \\ z_2^l \beta_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1}^l \beta_{2n-1} \end{pmatrix}$$

для всех l , $0 \leq l < n$. Следовательно, равенство (2.2) влечёт:

$$\sum_{j=1}^{2n-1} z_j^{l-m} |\beta_j|^2 = \sum_{j=1}^{2n-1} z_j^{l-m} |\alpha_j|^2$$

для всех $l, m \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leq l, m \leq n-1$. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{2n-1} f(z_j) (|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2) = 0$$

для всех $f \in \mathcal{T}_{n-1}$. Отсюда и из леммы 2.1 получаем, что $|\alpha_j|^2 = |\beta_j|^2$ для всех $j \in \mathbb{N}, j \leq 2n-1$.

Положим

$$\tau_j = \begin{cases} \beta_j^{-1} \alpha_j, & \text{если } \beta_j \neq 0, \\ 1, & \text{если } \beta_j = 0. \end{cases}$$

Обозначим через D_τ диагональную матрицу размеров $(2n-1) \times (2n-1)$ с диагональными элементами $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n-1}$. Положим $X_\tau = D_\tau X$. Тогда

$$X_\tau \begin{pmatrix} z_1^k \alpha_1 \\ z_2^k \alpha_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1}^k \alpha_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^k \alpha_1 \\ z_2^k \alpha_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1}^k \alpha_{2n-1} \end{pmatrix}$$

для всех k , $0 \leq k < n$.

Пусть $J = \{j \in \mathbb{N} : j \leq 2n-1, \alpha_j \neq 0\}$. Рассмотрим сначала случай, когда $|J| \geq n$. Тогда $\dim \text{Ker}(X_\tau - I) \geq n$ и мы получаем противоречие, поскольку

$$0 = \text{trace } X = \text{trace } X_\tau \geq n - (n-1) \|X_\tau\| = 1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $|J| < n$. Заметим, что $|J| > 0$, поскольку $\sum_{j=1}^{2n-1} |\alpha_j|^2 = 1$. Рассмотрим матрицу $\{\tau_j x_{jk}\}_{j,k \in J}$. Ясно, что эта матрица единичная. Следовательно, $\tau_j x_{jj} = 1$ для всех $j \in J$ и мы приходим к противоречию, поскольку $x_{jj} = 0$ для всех j , $1 \leq j \leq 2n-1$. $\square$

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВОЙ НОРМЫ
 $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)}$ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОДМНОЖЕСТВ Λ
 ОКРУЖНОСТИ $\mathbb{T}$

Из теоремы 1.1, следствия 2.4 и теоремы 2.5 мгновенно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{T}$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда следующие два утверждения равносильны:

- i) $|\Lambda| \geq 2n$,
- ii) $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)} = n$.

Эта теорема позволяет вычислить норму $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)}$ в случае, когда $\Lambda \subset \mathbb{T}$ и множество Λ является множеством вершин правильного N -угольника.

Не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda \ni 1$. В этом случае $\Lambda = \mathbb{T}_N$, если только $|\Lambda| \geq 3$, где $\mathbb{T}_N$ обозначает множество всех корней N -ой степени из единицы.

Заметим, что для нас представляет интерес только случай, когда $|\Lambda| \geq 4$, поскольку нетрудно проверить, что $\|f\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \|f\|_{\text{Lip}(\Lambda)}$ для любой функции f на любом множестве Λ , $\Lambda \subset \mathbb{C}$, если $|\Lambda| \leq 3$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $X \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\text{dist}(a, X)$ расстояние от точки a до множества X , т. е. $\text{dist}(a, X) = \inf\{|x - a| : x \in X\}$.

Теорема 3.2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T}_N)} = \text{dist}(n, N\mathbb{Z})$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Заметим, что каждая из функций $n \mapsto \|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T}_N)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) и $n \mapsto \text{dist}(n, N\mathbb{Z})$ ($n \in \mathbb{Z}$) чётна и имеет период N . Таким образом, достаточно ограничиться случаем, когда $0 \leq 2n \leq N$. В этом случае нужное нам равенство следует из теоремы 3.1. $\square$

Рассмотрим ещё один случай, когда легко можно явно вычислить норму $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)}$.

Теорема 3.3. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{T}$. Предположим, что $|\Lambda| = n+1$ и $\Lambda \supset \mathbb{T}_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|z^n\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \|z^n\|_{\text{Lip}(\Lambda)}$.

Нам понадобится следующая элементарная лемма, которую мы приводим здесь без доказательства.

Лемма 3.4. Пусть $T = \{t_{jk}\}_{0 \leq j, k \leq n}$. Предположим, что $t_{00} = 0$ и $t_{jk} = 0$, если $\min(j, k) \geq 1$. Тогда

$$\|T\| = \max \left(\left(\sum_{j=1}^n |t_{j0}|^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{k=1}^n |t_{0k}|^2 \right)^{1/2} \right).$$

Следствие 3.5. Пусть $M = \{m_{jk}\}_{0 \leq j, k \leq n}$. Предположим, что $m_{00} = 0$ и $m_{jk} = 0$, если $\min(j, k) \geq 1$. Тогда $\|M\|_{\mathfrak{M}_0} = \max_{0 \leq j, k \leq n} |m_{jk}|$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_{jk}\}_{0 \leq j, k \leq n}$. Применяя лемму 3.4 к матрице $M \star X$, получаем

$$\begin{aligned} \|M \star X\| &= \max \left(\left(\sum_{j=1}^n |m_{j0}|^2 |x_{j0}|^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{k=1}^n |m_{0k}|^2 |x_{0k}|^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \left(\max_{0 \leq j, k \leq n} |m_{jk}| \right) \cdot \max \left(\left(\sum_{j=1}^n |x_{j0}|^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{k=1}^n |x_{0k}|^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|M\|_{\mathfrak{M}_0} \leq \|M\|_{\mathfrak{M}} \leq \max_{0 \leq j, k \leq n} |m_{jk}|.$$

Противоположное неравенство очевидно, поскольку

$$\|M\|_{\mathfrak{M}_0} \geq \max_{0 \leq j, k \leq n, j \neq k} |m_{jk}| = \max_{0 \leq j, k \leq n} |m_{jk}|. \quad \square$$

Вместо того, чтобы доказывать теорему 3.3, мы докажем следующее более общее утверждение, которое можно рассматривать как дополнение к статье [1], поскольку оно даёт ещё один класс функций, для которого операторно липшицева норма совпадает с обычной липшицевой нормой.

Теорема 3.6. Пусть f – функция, заданная на подмножестве Λ , $\Lambda \subset \mathbb{C}$, лежащем на окружности или на прямой. Предположим, что $|f(\Lambda)| = 2$ и существует число $a \in \mathbb{C}$ такое, что $|f^{-1}(a)| = 1$. Тогда $\|f\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \|f\|_{\text{Lip}(\Lambda)}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай конечного множества Λ . Пусть $f(\Lambda) = \{a, b\}$ и $f^{-1}(a) = \zeta_0$. Занумеруем точки множества $\Lambda \setminus \{\zeta_0\}$ последовательностью $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$. Положим $m_{jk} = \mathfrak{D}_0 f(\zeta_j, \zeta_k)$, где $0 \leq j, k \leq n$. Рассмотрим матрицу $M = \{m_{jk}\}_{0 \leq j, k \leq n}$. Заметим,

что $m_{00} = 0$ и $m_{jk} = 0$, если $\min(j, k) \geq 1$. Ясно, что $\|f\|_{\text{Lip}(\Lambda)} = \max_{0 \leq j, k \leq n} |m_{jk}|$. Кроме того, $\|f\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \|M\|_{\mathfrak{M}_0}$ в силу теоремы 1.1. Остается сослаться на следствие 3.5. $\square$

§4. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)}$ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ Λ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Хорошо известно, что $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{R})} = |s|$ для любого $s \in \mathbb{R}$, см., например, [2].

Пусть Λ – произвольное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда имеют место следующие очевидные тождества:

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda+c)} \quad (4.1)$$

для любых чисел $s, c \in \mathbb{R}$ и

$$\|e^{isa x}\|_{\text{OL}(\Lambda)} = |a| \cdot \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\Lambda)} \quad (4.2)$$

для любых чисел $s, a \in \mathbb{R}$.

Заметим ещё, что если

$$\inf\{|\alpha - \beta| : \alpha, \beta \in \Lambda; \alpha \neq \beta\} = 0, \quad (4.3)$$

то $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} = |s|$ для любого числа $s \in \mathbb{R}$. Действительно, условие (4.3) влечёт: $\|e^{isx}\|_{\text{Lip}(\Lambda)} = |s|$. Таким образом, $|s| = \|e^{isx}\|_{\text{Lip}(\Lambda)} \leq \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} \leq \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{R})} = |s|$.

В частности, $\|e^{isx}\|_{\text{Lip}(\Lambda)} = |s|$ для любого $s \in \mathbb{R}$, если множество Λ не является замкнутым.

В этом параграфе мы вычислим норму $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)}$ в случае, когда множество Λ является множеством значений бесконечной арифметической прогрессии.

Обозначим через $M(\mathbb{T})$ пространство всех (конечных) комплексных борелевских мер на единичной окружности $\mathbb{T}$. Пусть $\hat{\mu}(n)$ обозначает n -й коэффициент Фурье меры $\mu \in M(\mathbb{T})$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Следующее утверждение хорошо известно, см., например, [3].

Теорема 4.1. Пусть $\mu \in M(\mathbb{T})$. Тогда

$$\|\{\hat{\mu}(m - n)\}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z}^2)} = \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}.$$

Нам понадобится ещё одно (скорее всего известное) утверждение, которое является простым следствием теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Пусть $\mu \in M(\mathbb{T})$. Тогда

$$\|\{\widehat{\mu}(m-n)\}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|\mu - c\mathbf{m}\|_{M(\mathbb{T})},$$

где $\mathbf{m}$ обозначает нормированную меру Лебега на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Доказательство. Неравенство

$$\|\{\widehat{\mu}(m-n)\}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \|\mu - c\mathbf{m}\|_{M(\mathbb{T})}$$

легко вытекает из теоремы 4.1. Докажем противоположное неравенство. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, причём $|f| \leq 1$ всюду и $\widehat{f}(0) = 0$. Тогда $\|\{\widehat{f}(m-n)\}\| \leq 1$. Следовательно, $\|\{\widehat{\mu}(m-n)\}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} \geq \|\{\widehat{f}(m-n)\widehat{\mu}(m-n)\}\|$ или, что то же самое, $\|\{\widehat{\mu}(m-n)\}\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} \geq \|f * \mu\|_{C(\mathbb{T})}$. Остаётся заметить, что $\|f * \mu\|_{C(\mathbb{T})} \geq \left| \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) d\mu(\zeta) \right|$ и

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} f d\mu \right| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_{C(\mathbb{T})} \leq 1, \widehat{f}(0) = 0 \right\} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|\mu - c\mathbf{m}\|_{M(\mathbb{T})}. \quad \square$$

Следующую теорему можно рассматривать как версию теоремы 3.2 для подмножеств вещественной прямой.

Теорема 4.3. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})} = \text{dist}(s, 2\pi\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Каждая из функций $s \mapsto \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})}$ ($s \in \mathbb{R}$) и $s \mapsto \text{dist}(s, 2\pi\mathbb{Z})$ ($s \in \mathbb{R}$) является чётной и 2π -периодической. Таким образом, достаточно доказать, что $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})} = s$ при $s \in [0, \pi]$.

В силу теоремы 1.1 имеем:

$$\begin{aligned} \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})} &= \|(\mathfrak{D}_0 e^{isx})(m, n)\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} = \|e^{-isn}(\mathfrak{D}_0 e^{isx})(m, n)\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)} \\ &= \|\Psi_s(m-n)\|_{\mathfrak{M}_0(\mathbb{Z}^2)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\Psi_s(k) = \begin{cases} \frac{e^{iks} - 1}{k}, & \text{если } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Разлагая функцию $i(\pi - t)$ в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi)$, получим

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{n} = i(\pi - t) \quad (0 < t < 2\pi)$$

и

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{n} = i(3\pi - t) \quad (2\pi < t < 4\pi).$$

Следовательно,

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{isn} e^{int}}{n} = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in(t+s)}}{n} = \begin{cases} i(\pi - s - t), & \text{если } 0 < t < 2\pi - s, \\ i(3\pi - s - t), & \text{если } 2\pi - s < t < 2\pi. \end{cases}$$

Таким образом,

$$h_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \neq 0} \frac{(e^{isn} - 1)e^{int}}{n} = \begin{cases} -is, & \text{если } 0 < t < 2\pi - s, \\ i(2\pi - s), & \text{если } 2\pi - s < t < 2\pi. \end{cases}$$

Следовательно, $\widehat{h}_s(n) = \Psi_s(n)$. Теперь из теоремы 4.2 и тождества (4.4) следует, что

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_s(t) - c| dt.$$

Остаётся заметить, что

$$\inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_s(t) - c| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_s(t) + is| dt = s,$$

если $s \in [0, \pi]$. □

Теперь мы можем вычислить норму $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)}$ в случае, когда бесконечное множество Λ , $\Lambda \subset \mathbb{R}$, является множеством значений произвольной арифметической прогрессии.

Теорема 4.4. Пусть $s, a, c \in \mathbb{R}$, причём $a \neq 0$. Тогда

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{Z}+c)} = \frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}) = \text{dist}(s, 2\pi a^{-1}\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{Z}+c)} = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{Z})} = \frac{1}{|a|} \|e^{isa x}\|_{\text{OL}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}). \quad \square$$

Следствие 4.5. Пусть $s, a, c \in \mathbb{R}$, причём $a \neq 0$. Тогда

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N}+c)} = \frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}) = \text{dist}(s, 2\pi a^{-1}\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Можно считать, что $c = 0$. Заметим, что

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N}-an)} = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N})}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N}-an)} = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{Z})}. \quad \square$$

Следствие 4.6. Пусть $\Lambda \subset a\mathbb{Z} + c$, где $a, c \in \mathbb{R}$, причём $a \neq 0$. Предположим, что для любого натурального числа n существует число $\lambda \in \Lambda$ такое, что $\lambda + ka \in \Lambda$ для всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $k \leq n$. Тогда

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} = \frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}) = \text{dist}(s, 2\pi a^{-1}\mathbb{Z})$$

при всех $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} \geq \frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}).$$

Положим $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$. Существует число $\lambda \in \Lambda$ такое, что $\lambda + a\mathbb{N}_n \subset \Lambda$. Ясно, что $\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} \geq \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\lambda + a\mathbb{N}_n)} = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N}_n)}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Остаётся заметить, что

$$\frac{1}{|a|} \text{dist}(as, 2\pi\mathbb{Z}) = \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|e^{isx}\|_{\text{OL}(a\mathbb{N}_n)} \leq \|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)}. \quad \square$$

Замечание 1. Пусть Λ – конечное подмножество множества $\mathbb{R}$. Тогда

$$\|e^{isx}\|_{\text{OL}(\Lambda)} < |s|$$

для любого ненулевого числа $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $s = 1$. Предположим, что $\|e^{ix}\|_{\text{OL}(\Lambda)} = 1$. Занумеруем точки множества Λ конечной последовательностью $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$. Положим $f(x) = e^{ix}$. Рассмотрим матрицу $W = \{w_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n} = \{(\mathfrak{D}_0 f)(\lambda_j, \lambda_k)\}_{1 \leq j, k \leq n}$. В силу теоремы 1.1

имеет место равенство $\|W\|_{\mathfrak{M}_0} = 1$. Следовательно, существует матрица $X = \{x_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$ такая, что $x_{jj} = 0$ для всех j , $1 \leq j \leq n$, $\|X\| = 1$ и $\|W \star X\| = 1$. Пусть A обозначает диагональную матрицу с последовательностью диагональных элементов $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$. Рассмотрим матрицу $R = \{r_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$, где

$$r_{jk} = \begin{cases} \frac{x_{jk}}{\lambda_j - \lambda_k}, & \text{если } 1 \leq j, k \leq n, \ j \neq k \\ 0, & \text{если } 1 \leq j, k \leq n, \ j = k. \end{cases}$$

Тогда

$$X = \{\lambda_j - \lambda_k\}_{1 \leq j, k \leq n} \star R = AR - RA$$

и

$$W \star X = \{f(\lambda_j) - f(\lambda_k)\}_{1 \leq j, k \leq n} \star R = f(A)R - Rf(A) = e^{iA}R - Re^{iA}.$$

Таким образом, мы построили матрицы A и R такие, что $A^* = A$, $\sigma(A) = \Lambda$, $\|AR - RA\| = 1$ и $\|e^{iA}R - Re^{iA}\| = 1$.

Положим $U = e^{i(n^{-1}A)}$. Из теоремы 1.2 следует, что

$$\begin{aligned} \|UR - RU\| &= \|e^{i(n^{-1}A)}R - Re^{i(n^{-1}A)}\| \\ &\leq \|e^{i(n^{-1}x)}\|_{\text{OL}(\mathbb{R})} \|AR - RA\| = n^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя ещё раз теорему 1.2, получим

$$\begin{aligned} 1 &= \|e^{iA}R - Re^{iA}\| = \|U^n R - RU^n\| \\ &\leq \|z^n\|_{\text{OL}(\sigma(U))} \|UR - RU\| \leq n^{-1} \|z^n\|_{\text{OL}(\sigma(U))} \leq 1, \end{aligned}$$

т. е. $\|z^n\|_{\text{OL}(\sigma(U))} = n$, что противоречит теореме 3.1, поскольку множество $\sigma(U)$ состоит из не более, чем n элементов. $\square$

Замечание 2. Теорема 4.4 даёт ещё одно доказательство теоремы 3.2. Рассмотрим функции $f, g : \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}_N$, заданные следующим образом: $f(x) = e^{ix}$, $g(x) = e^{inx}$. Тогда $f^n = g$. Ясно, что $\|g\|_{\text{OL}(\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z})} \leq \|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T}_N)} \|f\|_{\text{OL}(\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z})}$. Можно считать, что $N \geq 2$. Тогда $\|f\|_{\text{OL}(\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z})} = 1$ и $\|g\|_{\text{OL}(\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z})} = \text{dist}(n, N\mathbb{Z})$ в силу теоремы 4.4. Следовательно, $\|z^n\|_{\text{OL}(\mathbb{T}_N)} \geq \text{dist}(n, N\mathbb{Z})$. Противоположное неравенство очевидно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Б. Александров, *Несколько замечаний об операторно липшицевых функциях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 26–47.
2. А. Б. Александров, В. В. Пеллер, *Операторно липшицевы функции*. — УМН **71**, вып. 4(430) (2016), 3–106.
3. G. Bennett, *Schur multipliers*. — Duke Math, J. **44** (1977), 603–639.

Aleksandrov A. B. On the operator Lipschitz norm of the functions z^n on a finite subset of the unit circle.

The paper contains some remarks concerning of the behavior of the operator Lipschitz norm of the functions z^n on subsets of the unit circle. In particular, it is shown that the operator Lipschitz norm of the restriction of z^n to a subset Λ of the unit circle is equal to $|n|$ if and only if Λ contains at least $2|n|$ points.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 19 июля 2021 г.