Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 502, 2021 г.

В. Г. Журавлев

СИММЕТРИИ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

В [1] были изучены локальные свойства ядерных разбиений $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ произвольной размерности d. Знание локальных свойств разбиений $\mathcal{T}$ важно для приложений таких разбиений к многомерным цепным дробям [2–5]. Ядерные разбиения $\mathcal{T}$ представляют собою многомерное обобщение одномерных разбиений Фибоначчи [6,7] и двумерных разбиений Рози [8–10].

В настоящей статье исследуются свойства симметрии ядерных разбиений $\mathcal{T}$. Основными ее результатами являются следующие утверждения.

1. Разбиения $\mathcal{T}$ трансляционно квазиинвариантны (shift-invariant) относительно канонического сдвига S тора $\mathbb{T}^d$ (предложение 12.1) – это фундаментальное свойство ядерных разбиений. Действие сдвига S на разбиение $\mathcal{T}$ сводится к перекладыванию его ядра $\mathbf{Kr} \subset \mathcal{T}$, состоящего из $d+1$ параллелепипеда.

2. Ядерное разбиение $\mathcal{T}$ имеет 2^d центральных симметрий (теорема 12.1).

Давно в разных научных направлениях (математика, физика, биология, экономика и др.) замечен общий принцип, связывающий наличие симметрий со свойствами оптимальности. Как только что было указано, ядерные разбиения $\mathcal{T}$ обладают богатой структурой симметрий. Данный феномен первоначально был обнаружен [11] у разбиений $\mathcal{T}$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Что касается оптимизации, то она в полной мере проявилась несколько ранее в приложениях ядерных разбиений $\mathcal{T}$ к многомерным цепным дробям [2–4]. Оказалось, что ядро $\mathbf{Kr}$ разбиения $\mathcal{T}$ определяет квазинорму – функционал Минковского – для наилучших однородных приближений цепными дробями, а цепные дроби в данном случае – это вершины многогранников, образующих разбиение $\mathcal{T}$. Более того,

Ключевые слова: ядерные разбиения тора, классификация, симметрии, комбинаторика, локальные правила.

исследованные в настоящей работе многогранные звезды $\mathrm{St}(x_n)$ разбиений $\mathcal{T}$ представляют собою естественный геометрический язык для описания неоднородных приближений.

Материал статьи излагается в следующей последовательности.

§1. Звезды и их производные.

§2. Индуцированные разбиения тора.

§3. Производные звезды и производные разбиения тора произвольного порядка.

§4. Орбиты параллелепипедов и зведы.

§5. Невырожденные разбиения тора.

§6. Симметрии многогранных звезд и координационные интервалы

§7. Лучевые звезды.

§8. Графы разбиения тора и координационные графы.

§9. Локальные графы и локализация вершин.

§10. Симметрии графов разбиений

§11. Локальные графы и многогранные звезды.

§12. Симметрии разбиений.

В работе используется метод квантования звезд [1], а также использована двойственность между локальными графами ядерного разбиения $\mathcal{T}$ и его многогранными звездами.

§1. Звезды и их производные

1.1. Центрированный унимодулярный симплекс. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0),\ e_1 = (1, \dots, 0),\ \dots,\ e_d = (0, \dots, 1) \tag{1.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть, как обычно, $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ обозначает *унимодулярную группу порядка* $d+1$, состоящую из целочисленных квадратных $(d+1)\times(d+1)$-матриц с определителем ± 1. Выделим в группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$, образованную матрицами вида $U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где

$V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и L – произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{1.2}$$

при этом α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_d\end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\textit{числа}\ \ 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\ \ \textit{линейно независимы над кольцом}\ \ \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Предложение 1.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in (\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}, \tag{1.4}$$

где $(\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}$ обозначает внутреннюю часть симплекса $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. см. [12]. □

1.2. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Пусть v_0, $v_1, \dots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{1.5}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1. Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \dots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}};\quad \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{1.6}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем *звездой*, если для всех дополнительных (1.5) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.6) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d;\ \lambda_0 + \dots + \lambda_d \leqslant 1,\ \lambda_0, \dots, \lambda_d \geqslant 0\}, \quad (1.7)$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.7). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \quad (1.8)$$

1.3. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \quad (1.9)$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\mathrm{int}} \cap X_2^{\mathrm{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит плоскости $H_{\sigma'}$ из (1.6), где σ' – дополнительное сочетание (1.5) для σ. Пусть

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \text{ или } v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (1.10)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H^{\pm}_{\sigma'}$, и пусть $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v. Тогда при этом условии множество векторов

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.11)$$

снова образует звезду.

Если существуют звезды v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *нерывождена*. Таким образом, для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\ \sigma\ } v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}. \quad (1.12)$$

Звезду v^σ из (1.12) назовем *производной* (σ-*производной*) нерывожденой звезды v.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \tag{2.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \dots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \dots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L\colon\ x \mapsto x \bmod L \tag{2.2}$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d \tag{2.3}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T:\ \ S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.4}$$

на векторы $v_0, v_1, \dots, v_D$, связанные с базисом (2.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \ \text{ для } \ k = 1, \dots, d. \tag{2.5}$$

В формуле (2.4) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.3), где $k = 0, 1, \dots, d$.

Заметим, что при переходе (2.5) от векторов переклыдывания v_0, $v_1, \dots, v_d$ к базизу $l_1, \dots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.6}$$

В частности, из (2.5) и (2.6) вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha' \bmod L$ для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (2.4) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T:\ S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.7}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\bar{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.8}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.1), то объединение

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \cdots \cup \bar{T}_d \tag{2.9}$$

параллелепипедов (2.8) образует *параллелоэдр* [13,14] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \bar{T}[l] \tag{2.10}$$

с помощью параллельных переносов $\bar{T}[l] = \bar{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\bar{T}[l]$ из (2.10) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.9).

По i-*алгоритму* из [13] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\bar{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\mathrm{int}} = (\bar{T})^{\mathrm{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.9), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{l \in L} T[l] \tag{2.11}$$

в строгом смысле (1.9), т.е. в (2.11) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.11) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d / L$. В результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d, \tag{2.12}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$ в (2.4).

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d / \mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}:\ x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{2.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. Перекладывающаяся развертка T из (2.3) *вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.14}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является *$\mathcal{L}$-различимым*, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} T \bmod \mathcal{L}: \;\; x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{2.15}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.15) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.16}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2. Векторы перекладывания (2.4) имеют вид

$$v_k \equiv m_k\alpha \bmod \mathcal{L} \tag{2.17}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots,$ называемыми *порядками* векторов v_k.

3. Пусть

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \;\{S^j(T_k);\;\; j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.18}$$

обозначает *орбиту* подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (2.16) будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению считается, что орбиты (2.18) удовлетворяют условию

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{2.19}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$.

Далее нам потребуется, в дополнение к (2.18), определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \;\{S^j(T_k);\;\; j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.20}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из (2.13) *иррациональным*, т.е. будем считать, что

$$\text{\textit{числа} } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ \textit{линейно независимы над кольцом} } \mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Сумма

$$m = m_0 + m_1 + \cdots + m_d. \tag{2.22}$$

порядков m_k всех векторов v_k из (2.17) называется *порядком* разбиения тора $\mathcal{T}$.

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 в [2] следует, что сдвиг тора $S'\colon T \longrightarrow T$ из (2.7) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S\colon \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{2.23}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.24}$$

соответственно развертку T из (2.3), (2.12) и *индуцированное разбиение* тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [9,15]) *ядром* (*karyon*) разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$. Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{2.25}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{2.26}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (2.26) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_L$, а индуцированное отображение (2.25) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.1. *Определенная в* (2.12) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.14) *в тор* $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (2.24) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\text{Orb}^+(0, m) = \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \ldots, m-1\} \tag{2.27}$$

порядка m*, определенного в* (2.22).

Доказательство. см. [2]. □

Чтобы не вводить новые термины, число m из (2.22) будем также называть и *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 2.1.

2.7. Производные вкладывающихся звезд.

Определение 2.2. Пусть $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.24) тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.28}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Теорема 2.2. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *вкладывается* (2.28) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.21) *вектором* α. *Тогда любая ее* σ*-производная* $v^\sigma = \{v^\sigma_0, v^\sigma_1, \ldots, v^\sigma_d\}$ *для* $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.29}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

Доказательство. см. [2]. □

§3. Производные звезды и производные разбиения тора произвольного порядка

3.1. Тотальная дифференцируемость звезд. Рассмотрим $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ. Обозначим через

$$[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \tag{3.1}$$

первые n членов последовательности ξ_i, при этом считаем, что $[\xi]_0 = \varnothing$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим последовательность $[\xi]_n$-*производных*, полагая

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \tag{3.2}$$

где $v^{[\xi]_0} = v$. И более обще

$$v^{\xi} = \{v^{[\xi]_0}, v^{[\xi]_1}, v^{[\xi]_2}, \ldots\} \tag{3.3}$$

–бесконечная последовательность $[\xi]_n$-производных. Скажем, что звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ будет $[\xi]_n$-*дифференцируемой* (соответственно ξ-*дифференцируемой*), если существует ее производная (3.2) порядка n (соответственно – существуют производные из (3.3) всех порядков $n = 0, 1, 2, \ldots$) Если существуют производные v^{ξ} для всех дифференцирований $\xi \in \Xi$, то будем говорить, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *тотально дифференцируема*.

Далее, чтобы избежать случаев вырождения, сосредоточимся исключительно на иррациональных (1.3) векторах сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Для произвольных торов $\mathbb{T}^d_L$ определение иррациональности вектора сохраняется (2.21). Нужно лишь числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ рассматривать как координаты вектора α в произвольном базисе решетки L.

3.2. Производные разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_n}$ тора $\mathbb{T}^d$. Далее будем предполагать вектор α иррациональным (2.21). В предложении 1.1 вместо α выберем вектор $\alpha_- = -\alpha$. Тогда согласно (1.4) имеем

$$\alpha_- \in \triangle^{\mathrm{int}} \tag{3.4}$$

для некоторого унимодулярного симплекса $\triangle = \triangle^d_U = U\triangle^d_e$, центрированного точкой α_-. Выберем $\triangle$ в качестве базисного симплекса.

Обозначим через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ вершины симплекса $\triangle$. Указанным вектору α_- и симплексу $\triangle$ отвечает звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ с лучами

$$v_k = \varepsilon_k - \alpha_- = \alpha + \varepsilon_k \tag{3.5}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$, причем ε_k – такие точки решетки $\mathbb{Z}^d$, что их разности

$$l_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \ \ldots, \ l_d = \varepsilon_d - \varepsilon_0 \tag{3.6}$$

образуют базис решетки $\mathbb{Z}^d$. По теореме 4.1 из [1] звезда v будет бесконечно дифференцируемой.

Фиксируем звезду v с лучами (3.5), произвольную последовательность дифференцирований $\xi \in \Xi$ и порядок $n = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\} = v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, \ldots, v_d^{[\xi]_n}\} \tag{3.7}$$

– $[\xi]_n$-производную звезду для v. Используя определение (2.28) не трудно проверить, что звезда v вкладывается $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Поэтому по той же теореме 4.1 из [1] производная звезда $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ снова вкладывается

$$\mathbf{v} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{3.8}$$

в тор $\mathbb{T}^d$ относительно того же сдвига S.

В силу определения произвозной звезды (1.12) можем записать

$$\mathbf{v} = U_n v. \tag{3.9}$$

Здесь звезды $\mathbf{v}$ и v представлены в виде столбцов

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

и

$$U_n = U^{[\xi]_n} \tag{3.11}$$

– унимодулярная матрица размера $d + 1$, обладающая свойствами:

1) элементы матрицы U_n неотрицательны;

2) сумма элементов в каждой строке матрицы U_n положительна.

Так как согласно (3.5) имеем матричное представление

$$v = m\alpha + \varepsilon = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_d \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

и аналогично –

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}\alpha + \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_d \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

то из (3.9) и иррациональности (1.3) вектора α выводим формулы

$$\mathbf{m} = U_n m, \quad \mathbf{e} = U_n \varepsilon. \tag{3.14}$$

Если воспользоваться поэлементной записью, то из (3.14) следует, что звезда $\mathbf{v}$, определенная в (3.7), имеет лучи

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{m}_k \alpha + \mathbf{e}_k, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{m}_k$ – целые положительные коэффициенты и векторы $\mathbf{e}_k$ имеют целые координаты для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Отсюда получаем сравнения

$$\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \mod \mathbb{Z}^d. \tag{3.16}$$

Обозначим общую сумму коэффициентов в (3.15) через

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_d \tag{3.17}$$

и назовем ее *порядком* звезды $\mathbf{v}$.

3.3. Производная развертка ядра. Звезде $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7) соответствует перекладывающаяся развертка

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]_n} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbf{T}_d \tag{3.18}$$

малого тора

$$\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d / L \ \subset \ \mathbb{T}^d \tag{3.19}$$

с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$,…, $\mathbf{v}_d$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d]$ – полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом

$$l_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \ \dots, \ l_d = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_0. \tag{3.20}$$

Напомним, что параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (3.18) порождается векторами $\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \tag{3.21}$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$. Множество векторов

$$\mathrm{Sk}_k = \{\mathbf{v}_i; \quad i \in \mathcal{D}_k\} \tag{3.22}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$. Остов Sk_k порождает параллелепипед $\mathbf{T}_k$ и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Рассмотрим $[\xi]_n$-производное разбиение

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(v^{[\xi]_n}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) \tag{3.23}$$

тора $\mathbb{T}^d$, которое согласно (2.24) можно записать в развернутом виде

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d(\mathbf{v}). \tag{3.24}$$

Здесь

$$\mathcal{T}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \dots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 1}(\mathbf{T}_k) \tag{3.25}$$

– орбитное разбиение, составленное из S-сдвигов параллелепипеда $\mathbf{T}_k$ из развертки (3.18), или *орбита* параллелепипеда $\mathbf{T}_k$.

Производная развертка (3.18) является *ядром* (karyon)

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}(\mathbf{v})) \tag{3.26}$$

$[\xi]_n$-производного разбиения тора (3.23), поэтому такие разбиения называются *ядерными* (примеры других ядерных разбиений см. [15,16]). Само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ порождается звездой $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). По этой причине $\mathbf{v}$ будем называть *ядерной звездой*.

Определенное в (3.17) понятие порядка $\mathbf{m}$ звезды $\mathbf{v}$ перенесем как на само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$, так и на порождаемое звездой $\mathbf{v}$ разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. Наконец, определим еще конечную орбиту

$$\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d; \quad j = 0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\} \tag{3.27}$$

начальной точки $x_0 = 0$ на торе $\mathbb{T}^d$.

§4. Орбиты параллелепипедов и звезды

4.1. Вершины параллелепипедов. Согласно определениям (2.8) и (3.7) параллелепипед $\mathbf{T}_k$ имеет следующие *вершины*

$$\mathrm{Ver}_k = \mathrm{Ver}\,\mathbf{T}_k = \{\mathbf{v}_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (3.21), и

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v}_{i_1} + \dots + \mathbf{v}_{i_\iota}. \tag{4.2}$$

При этом в (4.1) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \varnothing$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем $\mathbf{v}_\varnothing = 0$. Таким образом, по определению $\iota =$

$0, 1, \dots, d$. Поэтому каждый параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (3.18) имеет число вершин

$$\sharp \mathrm{Ver}_k = 2^d. \tag{4.3}$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед $\mathbf{T}_k$ с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$.

Аналогично (2.20) определим *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) = \{S^j(\mathrm{Ver}_k);\ \ j \in \mathcal{M}_k\}. \tag{4.4}$$

всех вершин (4.1) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, где $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \dots, \mathbf{m}_k - 1\}$. Согласно (4.2) вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$ с мультииндексом $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_\iota\}$ имеет *порядок*

$$\mu_\mathbf{i} = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i} = \mathbf{m}_{i_1} + \dots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{4.5}$$

Если $\mathbf{i} = \varnothing$, то по соглашению порядок равен $\mu_\varnothing = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\varnothing = 0$. Из (4.5) следует, что вершина

$$\mathbf{v}_\mathbf{i}^j = S^j(\mathbf{v}_\mathbf{i})\ \in\ \mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) \tag{4.6}$$

будет иметь порядок

$$\mu_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i} + j = \mu_\mathbf{i} + j, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$ и $j \in \mathcal{M}_k$.

4.2. Многогранные звезды. Для любого порядка $n \in \mathcal{M}$, где

$$\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\}, \tag{4.8}$$

обозначим через

$$\mathrm{St}(n) = \{\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j;\ \ \mathbf{v}_\mathbf{i}^j = x_n\} \tag{4.9}$$

многогранную звезду в точке $x_n = S^n(0)$ орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27). Здесь

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}), \tag{4.10}$$

$\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$, $j \in \mathcal{M}_k$ и $k = 0, 1, \dots, d$. Таким образом, звезда $\mathrm{St}(n)$ состоит из всех параллелепипедов

$$\mathbf{T}_k^j = S^j(\mathbf{T}_k), \tag{4.11}$$

входящих в разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.24) и имеющих общую вершину $x_n \in \mathbb{T}^d$. В этом смысле ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.26) является *ядерной многогранной звездой*

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0). \tag{4.12}$$

Используя обозначение (4.7), многогранную звезду (4.9) можно также определить следующим эквивалентным образом

$$\mathrm{St}(n) = \{\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}};\ \ \mu^j_{\mathbf{i}} = n\}. \tag{4.13}$$

§5. Невырожденные разбиения тора

5.1. Спектр разбиения. Для любого подмножества $\mathbf{i}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$ определим *критическое значение*

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \dots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{5.1}$$

В частности, если $\mathbf{i} = \mathcal{D}$, то $\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_d$, и, следовательно,

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m} = \sharp\,\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) \tag{5.2}$$

равно (3.17) – порядку орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27). Множество

$$\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}\} \tag{5.3}$$

назовем *спектром* разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.24). Скажем, что спектр Λ и само разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *невырождены*, если

$$\lambda_{\mathbf{i}} \neq \lambda_{\mathbf{j}} \ \text{ при условии } \ \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \tag{5.4}$$

5.2. Невырожденные разбиения. Предположим, что спектр Λ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ невырожден, т.е. выполнено условие (5.4). Таким образом, в невырожденном случае имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{D} \supset \mathbf{i} \ \ \Leftrightarrow \ \ \lambda_{\mathbf{i}} \in \Lambda \tag{5.5}$$

и, значит, в спектре Λ число различных элементов $\sharp\Lambda = 2^{d+1}$. Поэтому для существования невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ необходимо, чтобы его порядок $\mathbf{m}$ удовлетворял неравенству $\mathbf{m} \geqslant 2^{d+1}$.

Введем на подмножествах $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$ *линейный порядок*

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{j}, \ \text{ если } \ \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{j}}. \tag{5.6}$$

Расположим критические значения $\lambda_{\mathbf{i}}$ из спектра Λ в порядке их возрастания

$$\lambda_{\varnothing} = 0 \ < \ \dots \ < \ \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{i}'} \ < \ \dots \ < \ \lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}. \tag{5.7}$$

Здесь через $\mathbf{i}'$ обозначено подмножество из $\mathcal{D}$, непосредственно следующее за $\mathbf{i}$ относительно упорядочения (5.6). Последовательности (5.7) соответствует упорядоченная последовательность подмножеств $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$:

$$\varnothing \ \prec \ \dots \ \prec \ \mathbf{i} \prec \mathbf{i}' \ \prec \ \dots \ \prec \ \mathcal{D}. \tag{5.8}$$

В соответствии с упорядочением (5.7) спектра Λ множество $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\}$ можно разбить

$$\mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \Lambda_{\varnothing} \sqcup \dots \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}} \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}'} \sqcup \dots \tag{5.9}$$

на последовательные *координационные интервалы*

$$\Lambda_{\mathbf{i}} = \{\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}} + 1, \dots, \lambda_{\mathbf{i}'} - 1\} \tag{5.10}$$

с мультииндексами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$. Укажем, что в разбиении (5.9) условие строгого включения $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ равносильно ограничению $\mathbf{i} \prec \mathcal{D}$. Поэтому количество интервалов в разбиении (5.9) равно $\sharp\,\mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \sharp\Lambda - 1 = 2^{d+1} - 1$.

Теорема 5.1. *Определенные в* (3.24) *невырожденные разбиения тора* $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *обладают следующими свойствами.*

1. *Для любой вершины* $x_n = S^n(0)$ *орбиты* $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ *с номером* n *из* $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\}$ *многогранная звезда* $\mathrm{St}(n)$ *с вершиной* x_n*, определенная в* (4.9)*, состоит*

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant d} \; \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} \; \bigcup_{\substack{j \in \mathcal{M}_k \\ \mu_{\mathbf{i}}^j = n}} \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j \tag{5.11}$$

из многогранников $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$*, получающихся* S*-сдвигами отмеченных параллелепипедов* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$*, т.е. параллелепипедов* $\mathbf{T}_k$ *из* (3.18) *с выделенной вершиной* $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} \in \mathrm{Ver}_k$*. Различные многогранники* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j$ *в разбиении* (5.11) *не имеют общих внутренних точек.*

2. *Если номера* n*,* $m \in \mathcal{M}$ *принадлежат одному координационному интервалу* $\Lambda_{\mathbf{i}}$ *из* (5.10)*, то соответствующие многогранные звезды* $\mathrm{St}(n)$*,* $\mathrm{St}(m)$ *эквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(m), \tag{5.12}$$

т.е. одна звезда получается из другой параллельным сдвигом.

3. *Если же* $n \in \Lambda_{\mathbf{i}}$*,* $m \in \Lambda_{\mathbf{j}}$ *принадлежат различным координационным интервалам* $\Lambda_{\mathbf{i}} \neq \Lambda_{\mathbf{j}}$*, то отвечающие им звезды* $\mathrm{St}(n)$*,* $\mathrm{St}(m)$ *неэквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \nsim \mathrm{St}(m). \tag{5.13}$$

Доказательство. см. [1]. □

§6. Симметрии многогранных звезд и координационные интервалы

6.1. Типы многогранных звезд. Скажем, что многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$ и $\mathrm{St}(m)$ принадлежат одному *типу*, если они эквивалентны (5.12). По теореме 5.1 невырожденные разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ содержат

$$\sharp\,\mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1 \tag{6.1}$$

различных типов многогранных звезд, где через St_d обозначено множество всех типов. Каждому типу звезд отвечает свой интервал $\Lambda_{\mathbf{i}}$ в разбиении (5.9). Поэтому типы звезд разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ допускают следующую *параметризацию*

$$\mathrm{St}(\varnothing),\ \ldots,\ \mathrm{St}(\mathbf{i}),\ \mathrm{St}(\mathbf{i}'),\ \ldots \tag{6.2}$$

собственными подмножествами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$.

6.2. Симметрии многогранных звезд. На множестве многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$, определенных в (4.9), с номерами n из $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ зададим отображение

$$s\colon\ \mathrm{St}(n) \ \longrightarrow\ \mathrm{St}(\bar{n}), \tag{6.3}$$

полагая $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$.

Пусть $\mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ – многогранники, получающихся S-сдвигами отмеченных параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Здесь k пробегает множество индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, j принадлежит $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$ и $\mathbf{i}$ – произвольное подмножество из множества $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. На указанном множестве многогранников определим еще одно отображение

$$\mathfrak{s}\colon\ \mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}} \ \longrightarrow\ \mathbf{T}^{\bar{j}^{\,k}}_{k,\bar{\mathbf{i}}^{\,k}}, \tag{6.4}$$

где $\bar{j}^{\,k} = \mathbf{m}_k - 1 - j$ и $\bar{\mathbf{i}}^{\,k} = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{i}\}$.

Используя теорему 5.1, распространим отображение (6.4) на многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$. Согласно формуле (5.11) каждая звезда $\mathrm{St}(n)$ разбивается

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}} \tag{6.5}$$

определенным образом на многогранники $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$. Положим

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}) \tag{6.6}$$

с индексами k, $\mathbf{i}$, j, пробегающими те же множества, что и в разбиении (6.5).

Теорема 6.1. 1. *Отображение* (6.6) *определено корректно. Это означает, что* $\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n))$ *– снова многогранная звезда, а правая часть в равенстве* (6.6) *– ее разбиение на образующие многогранники* $\mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}})$.

2. *Для всех* $n \in \mathcal{M}$ *выполняется равенство*

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = s(\mathrm{St}(n)), \tag{6.7}$$

где s *– отображение* (6.3).

3. *Многогранная звезда* $\mathrm{St}(\bar{n}) = s\,(\mathrm{St}(n))$ *имеет разбиение*

$$\mathrm{St}(\bar{n}) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}} \tag{6.8}$$

с такими же индексами k, $\mathbf{i}$, j*, как и в разбиении* (6.5) *или более конкретно – в разбиении* (5.11)*. Здесь дополнения* $\bar{j}$, $\bar{\mathbf{i}}$ *определены в* (6.4).

Доказательство. см. [1]. □

6.3. Центральная симметрия многогранных звезд. Пусть $\mathrm{St}(n)$ – многогранная звезда (4.9) с центром в точке $x_n = S^n(0)$. Обозначим через $o(\mathrm{St}(n))$ звезду, получающуюся из звезды $\mathrm{St}(n)$ с помощью центральной симметрии с центром x_n.

Предложение 6.1. 1. *Для любого* $n \in \mathcal{M}$ *многогранные звезды* $\mathrm{St}(\bar{n})$, *где* $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, *и* $o(\mathrm{St}(n))$ *принадлежат одному типу:*

$$\mathrm{St}(\bar{n}) \sim o(\mathrm{St}(n)). \tag{6.9}$$

2. *Если* n *принадлежит инвариантному координационному интервалу* $\Lambda_{\mathbf{i}} = \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}$ *из* (5.10)*, то*

$$o(\mathrm{St}(n)) = \mathrm{St}(n), \tag{6.10}$$

т.е. звезды $\mathrm{St}(n)$ *являются центрально симметричными для всех* $n \in \Lambda_{\mathbf{i}}$.

Доказательство. см. [1]. □

§7. Лучевые звезды

7.1. Правило максимума для лучей. Каждой многогранной звезде $\mathrm{St}(n)$ с вершиной в точке x_n, определенной в (4.9), можно поставить в соответствие

$$\mathrm{cst}\colon\ \mathrm{St}(n) \longrightarrow \mathrm{st}(n) \tag{7.1}$$

лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Назовем cst *отображением сужения* (constriction map) многогранной звезды $\mathrm{St}(n)$ на лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Определение отображения cst состоит в следующем. Рассмотрим все ребра параллелепипедов $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}(n)$, выходящие из вершины x_n звезды $\mathrm{St}(n)$. Если за начало ребер выбрать точку x_n, то ребра принимают направления и становятся векторами $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$ из *симметризованной ядерной звезды*

$$\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}, \tag{7.2}$$

где $\mathbf{v}_k$ – лучи звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). Множество отмеченных векторов $\mathbf{w}_k$ образует лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ в (7.1).

Далее нам потребуется понятие *допустимого луча* $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, где $k = 0, 1, \ldots, d$, в точке x_n орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27) – это такой луч $\mathbf{w}_k$, что выполняются неравенства

$$0 \leqslant\ n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k\ \leqslant \mathbf{m} - 1. \tag{7.3}$$

Здесь $\mathrm{sign}(\mathbf{w}_k) = \pm 1$ – *знак* луча $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$.

Теорема 7.1. *Лучевая звезда* $\mathrm{st}(n)$ *из* (7.1) *состоит из всех допустимых* (7.3) *лучей* $\mathbf{w}_k$ *симметризованной звезды* $\mathbf{w}$.

Доказательство. см. [1]. □

По теореме 7.1, чтобы построить определенную в (7.1) лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ с вершиной в точке x_n достаточно знать номер этой звезды n и порядки $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{m}_1, \ldots,$ $\mathbf{m}_d$ всех лучей $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ из (3.26). Напомним (4.12), что само ядро является многогранной звездой $\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0)$ с вершиной $x_0 = 0$. Лучи же ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ образуют

$$\mathbf{t} = \mathbf{kr} = \mathrm{st}(0) \tag{7.4}$$

– *ядерную лучевую звезду*. Итак, зная ядерную звезду (7.4) можно построить все лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$, используя *правило максимума* – способе построения, представленном в теореме 7.1. В следующих разделах мы обсудим более детально указанное правило.

7.2. Симметрии лучевых звезд. Для лучевых звезд сохраним обозначение $o(\mathrm{st}(n))$ за звездой, получающейся из звезды $\mathrm{st}(n)$ с помощью центральной симметрии относительно ее центра $x_n = S^n(0)$.

Предложение 7.1. *Для любого $n \in \mathcal{M}$ лучевые звезды $\mathrm{st}(\bar{n})$, где $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, и $o(\mathrm{st}(n))$ принадлежат одному типу:*

$$\mathrm{st}(\bar{n}) \sim o(\mathrm{st}(n)). \tag{7.5}$$

Доказательство. см. [1]. □

7.3. Вложение звезд. Скажем, что лучевая звезда $\mathrm{st}(n)$ *вкладывается* в многогранную звезду $\mathrm{St}(m)$:

$$\mathrm{em}\colon\ \mathrm{st}(n)\ \hookrightarrow\ \mathrm{St}(m), \tag{7.6}$$

если выполняется эквивалентность $\mathrm{st}(n) \sim \mathrm{st}(m)$, где лучевая звезда $\mathrm{st}(m) = \mathrm{cst}(\mathrm{St}(m))$ является сужением (7.1) многогранной звезды $\mathrm{St}(m)$. Отображение вложения em можно рассматривать как многозначный аналог обратного отображения для отображения сужения cst.

§8. Графы разбиения тора и координационные графы

Обсуждаются локальные и общий графы разбиения тора $\mathcal{T}$. Выясняется, как, зная координационные окружения или эквидистантные сферы для некоторой точки, идентифицировать ее, т.е. найти расположение точки в разбиении $\mathcal{T}$.

8.1. Графы разбиения тора. По правилу максимума (7.3) в разбиении $\mathcal{T}$ из точки $x_n \in \mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ выходит луч $\mathbf{w}_k$ симметризованной звезды $\mathbf{w}$, если порядок $n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$ сдвинутой точки $x_n + \mathbf{w}_k$ принадлежит множеству всех возможных номеров $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$. Все такие $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ представляют собою множество допустимых лучей в точке x_n, образующих лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ с центром x_n. Следовательно, с помощью правила максимума мы можем в любой точке x_n, зная только ее номер n, построить лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$.

Таким образом, можно построить *ориентированный граф* $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G}_{\mathcal{T}}$ разбиения $\mathcal{T}$, *вершинами* которого являются точки x_n из

$$\overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}} = \mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) \tag{8.1}$$

– конечной орбиты (3.27), а *дугами* – лучи $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, соединяющие данные вершины и определяемые по правилу максимума (7.3). Более точно, вершины x_n и x_m графа $\overrightarrow{G}$ соединены ребром, если

$$|n-m| \in \mathbf{M}, \tag{8.2}$$

где

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_d\} \tag{8.3}$$

– *координационная звезда*, состоящая из порядков лучей (3.15) ядерной звезды $\mathbf{v}$. В (8.2) приведен *номерной критерий* соседства вершин графа $\overrightarrow{G}$. Ему эквивалентен *векторный критерий* соседства вершин x_n, x_m:

$$x_n - x_m \in \mathbf{w}. \tag{8.4}$$

Здесь справа указана симметризованная звезда (7.2).

По определению граф разбиения $\overrightarrow{G}$ естественным образом *вкладывается*

$$\mathrm{em}_{\mathbb{T}^d}\colon\ \overrightarrow{G} \ \hookrightarrow\ \mathbb{T}^d \tag{8.5}$$

в d-мерный тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Если же граф $\overrightarrow{G}$ начинать строить, скажем, с точки $x_0 = 0$ и при этом считать саму точку x_0 и лучевые векторы $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ взятыми из пространства $\mathbb{R}^d$, а это возможно согласно (3.7), то получаем еще одно вложение графа

$$\mathrm{em}_{\mathbb{R}^d}\colon\ \overrightarrow{G} \ \hookrightarrow\ \mathbb{R}^d. \tag{8.6}$$

Взаимоотношение между приведенными вложениями можно представить следующим образом. С одной стороны, вложение (8.6) – это некоторая развертка вложения $\mathrm{em}_{\mathbb{T}^d}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$. Обратно, вложение (8.5) получается *факторизацией*

$$\mathrm{em}_{\mathbb{T}^d} = \mathrm{em}_{\mathbb{R}^d}/\mathbb{Z}^d \tag{8.7}$$

вложения (8.6) по решетке $\mathbb{Z}^d$.

Кроме рассмотренных выше ориентированных графов $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G}_{\mathcal{T}}$, нас будут, главным образом, интересовать отвечающие им *неориентированные графы* $G = G_{\mathcal{T}}$. Новые графы G имеют теми же вершины $G^{\,\mathrm{ver}} = \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ и дуги $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, но дуги при этом заменяются *ребрами* – неориентированными дугами.

8.2. Координационный граф. Графу разбиения G поставим в соответствие

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon\ G \longrightarrow \mathcal{G} \tag{8.8}$$

координационный граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ следующим образом:

1) *каждая вершина* x_n *графа* G *отображается* $x_n \to n$ *в свой номер* $n \in \mathcal{M}$*;*

2) *если из вершины* x_n *выходит луч* $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ *в вершину* $x_m = x_n + \mathbf{w}_k$*, то из вершины* n *графа* $\mathcal{G}$ *выходит луч* $\mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$ *в вершину* $m = n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$.

Итак, по определению (8.8) вершинами координационного графа $\mathcal{G}$ являются числа из множества $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$, представляющих собою все номера n вершин x_n графа G, а ребрами графа $\mathcal{G}$ будут лучи из множества

$$\mathbf{M}^{\pm} = \{\mathbf{m}_0^{\pm}, \mathbf{m}_1^{\pm}, \ldots, \mathbf{m}_d^{\pm}\}, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{m}_k^{\pm} = \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k = \pm\mathbf{m}_k$. В (7.2) мы определили симметризованную звезду $\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}$ для ядерной звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). *Симметризованная координационная звезда* $\mathbf{M}^{\pm}$ определяется аналогично, но уже для координационной звезды $\mathbf{M}$ из (8.3).

Предложение 8.1. *Отображение* $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$ *из* (8.8) *графа разбиения* G *в координационный граф* $\mathcal{G}$ *определено корректно и является изоморфизмом указанных графов.*

Доказательство. 1. Корректность определения (8.8) вытекает из биекции

$$\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) \ni x_n \ \Leftrightarrow\ n \in \mathcal{M} \tag{8.10}$$

между множествами вершин графа разбиения G и координационного графа $\mathcal{G}$.

2. Заметим, что согласно (8.8) координационный граф $\mathcal{G}$ допускает независимое определение: вершинами графа $\mathcal{G}$ служит множество номеров $\mathcal{M}$, при этом вершины $n, m \in \mathcal{M}$ соединены *ребром* $n - m$, если выполняется условие

$$n - m \in \mathbf{M}^{\pm}. \tag{8.11}$$

Изоморфизм отображения графов $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$ следует из эквивалентности условий соседства вершин (8.2) и (8.11). □

Замечание 8.1. Отображение $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$ из (8.8) можно рассматривать как *проекцию* d-мерного графа G разбиения тора $\mathcal{T}$ в одномерный координационный граф $\mathcal{G}$.

Замечание 8.2. Как мы уже отмечали, граф $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G}_{\mathcal{T}}$ разбиения $\mathcal{T}$ является ориентированным графом, так как из каждой его вершины x_n выходят направленные ребра – лучи $\mathbf{w}_k$ симметризованной ядерной звезды $\mathbf{w}$. С помощью изоморфизма (8.8) ориентацию ребер в графе $\overrightarrow{G}$ можно перенести на ребра координационного графа $\mathcal{G}$, который после этого становится *ориентированным графом* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.

§9. Локальные графы и локализация вершин

9.1. Локальные графы разбиений тора. Выделим в графе разбиения G его *локальный подграф*

$$G(x_n, i) \ \subset \ G \tag{9.1}$$

радиуса $i = 0, 1, 2, \ldots$ с *центром* в вершине графа x_n. Локальные графы $G(x_n, i)$ начнем определять послойно. Если радиус $i = 0$, то $G(x_n, 0)$ – граф, состоящий из одной вершины x_n. Если же радиус $i = 1$, то у графа $G(x_n, 1)$ ребрами будут лучи звезды $\mathrm{st}(n)$ из (7.1), а вершинами – центральная точка x_n и все ее соседние точки $x_n + \mathbf{w}_k$, где $\mathbf{w}_k \in \mathrm{st}(n)$, образующие первое локальное окружение или 1-*слой* $eq(x_n, 1)$ для точки x_n. Иначе говоря, $eq(x_n, 1)$ состоит из всех вершин графа G, находящихся на расстоянии $i = 1$ от центра x_n, при этом *расстояние* между вершинами x_n, x_m графа G измеряется длинами геодезических, соединяющих указанные вершины. Условимся, что *геодезические* составляются из ребер графа G, причем при измерении расстояний ребра считаются неориентированными. Таким образом, $eq(x_n, 1)$ – это *эквидистанта* для точки x_n радиуса $i = 1$.

Переходим к определению локального графа $G(x_n, 2)$. Его вершинами будут вершины графа $G(x_n, 1)$ и все точки эквидистанты $eq(x_n, 2)$. Ребра же графа $G(x_n, 2)$ получаются дополнением к ребрам графа $G(x_n, 1)$ тех ребер графа G, которые соединяют вершины эквидистанты $eq(x_n, 1)$ с вершинами из $eq(x_n, 2)$.

Повторяя приведенную выше конструкцию, для произвольного радиуса i локальный граф $G(x_n, i)$ определяем по индукции:

$$\begin{aligned} &G^{\,\mathrm{ver}}(x_n, i) = G^{\,\mathrm{ver}}(x_n, i-1) \cup eq(x_n, i), \\ &G^{\,\mathrm{edg}}(x_n, i) = G^{\,\mathrm{edg}}(x_n, i-1) \cup \{eq(x_n, i-1), eq(x_n, i)\}^{\,\mathrm{edg}}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Здесь $G^{\,\mathrm{ver}}(x_n,i)$ и $G^{\,\mathrm{edg}}(x_n,i)$ обозначают соответственно *вершины* (vertices) и *ребра* (edges) графа $G(x_n,i)$, а $\{eq(x_n,i-1),eq(x_n,i)\}^{\,\mathrm{edg}}$ – ребера графа G, соединяющие вершины эквидистанты $eq(x_n,i-1)$ с вершинами из $eq(x_n,i)$. Отметим, что по определению множество $eq(x_n,i)$ – суть *эквидистантная сфера* радиуса i с центром в точке x_n.

С помощью конструкции (9.1)–(9.2) получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга графов:

$$G(x_n,0)\ \subset\ G(x_n,1)\ \subset\ \ldots\ \subset\ G(x_n,i)\ \subset\ \ldots\ \subset\ G. \tag{9.3}$$

Суть упомянутой конструкции состоит в *послойном росте* локальных графов $G(x_n,i)$. Это особенно отчетливо было видно на росте эквидистант $eq(x_n,i)$.

9.2. Стабилизация локальных графов. Поставим вопрос о стабилизации последовательности графов (9.3). Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что ребра графа G являются ребрами параллелепипедов $\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_1,\ldots,\mathbf{T}_d$, разбивающих тор $\mathbb{T}^d$ согласно (3.24), (3.25). Сам же тор $\mathbb{T}^d$ – связная область. Отсюда вытекает *связность* графа G разбиения тора $\mathbb{T}^d$. Поэтому последовательность (9.3) имеет вид

$$G(x_n,0)\subset G(x_n,1)\subset\ldots\subset G(x_n,i)\subset\ldots\subset G(x_n,r_G)\,=\,G. \tag{9.4}$$

Здесь все "$\subset$" означают строгие включения и $r_G=r_G(x_n)$ – *радиус роста*, точнее – *радиус остановки роста*, локальных графов $G(x_n,i)$ с центром x_n. При этом предполагается, что все локальные графы $G(x_n,i)$ и весь граф G вложены (8.5) в тор $\mathbb{T}^d$. Если воспользоваться терминологией теории графов (см., например, [17], [18]), то радиус роста $r_G(x_n)$ – это эксцентриситет вершины x_n графа G. Поэтому для радиуса роста $r_G(x_n)$ выполняется неравенство

$$r_G(x_n)\leqslant\delta_G, \tag{9.5}$$

где δ_G обозначает *диаметр* графа G – наибольшее геодезическое расстояние между двумя его вершинами.

9.3. Локальные координационные графы. Последовательности (9.3) локальных графов разбиения $G(x_n,i)$ можно поставить в соответствие некоторые *локальные координационные графы* $\mathcal{G}(n,i)$. С этой целью воспользуемся отображением $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon G\longrightarrow\mathcal{G}$ из (8.8), представляющем собою согласно предложению 8.1 изоморфизм графов G и $\mathcal{G}$. Нам потребуется не само отображение $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$, его *сужения*

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon\ G(x_n,i)\ \longrightarrow\ \mathcal{G}(n,i) \tag{9.6}$$

на локальные подграфы $G(x_n, i) \subset G$. Для новых отображений сохраним прежнее обозначение. Кроме того заметим, что суженные отображения остаются быть изоморфизмами графов $G(x_n, i)$ и $\mathcal{G}(n, i)$. Используя отображения (9.6), поставим последовательности локальных графов разбиения (9.3) в соответствие последовательность

$$\mathcal{G}(n,0) \ \subset \ \mathcal{G}(n,1) \ \subset \ \ldots \ \subset \ \mathcal{G}(n,i) \ \subset \ \ldots \ \subset \ \mathcal{G} \tag{9.7}$$

– локальных координационных графов $\mathcal{G}(n, i) \subset \mathcal{G}$.

Из связности полного графа $G = G_{\mathcal{T}}$ разбиения тора $\mathcal{T}$ следует, что множество вершин$\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}$ графа G совпадает

$$\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}} \ = \ \mathcal{M} \tag{9.8}$$

с множеством всех номеров $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ вершин разбиения $\mathcal{T}$. Но тогда последовательность координационных графов (9.7) также, как и последовательность исходных графов (9.4), *стабилизируется*

$$\mathcal{G}(n,0) \ \subset \ \mathcal{G}(n,1) \ \subset \ \ldots \ \subset \ \mathcal{G}(n,i) \ \subset \ \ldots \ \subset \ \ \mathcal{G}(n,r_G) \ = \mathcal{G} \tag{9.9}$$

на шаге $r_G = r_G(x_n)$, равного радиусу роста локальных графов $G(x_n, i)$. При этом последовательность (9.9) строго возрастающая и в силу (9.8) выполняется равенство

$$\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n, r_G) \ = \ \mathcal{M}. \tag{9.10}$$

9.4. Изоморфизм локальных графов. Локальные графы $G(x_n, i)$ и $G(x_m, i)$ *изоморфны* $G(x_n, i) \sim G(x_m, i)$, если один граф получается из другого параллельным сдвигом для графов, содержащихся в пространстве $\mathbb{R}^d$, и – сдвигом тора $\mathbb{T}^d$, когда графы вложены в тор $\mathbb{T}^d$. По построению локальные координационные графы считаются вложенными в $\mathbb{R}$. Поэтому *изоморфизм* $\mathcal{G}(n, i) \sim \mathcal{G}(m, i)$ графов $\mathcal{G}(n, i)$ и $\mathcal{G}(m, i)$ означает перевод одиного графа в другой с помощью сдвига прямой $\mathbb{R}$. Кроме общих понятий изоморфизмов, нам вначале потребуется их частные случаи – *центральные изоморфизмы* $G(x_n, i) \overset{c}{\sim} G(x_m, i)$ и $\mathcal{G}(n, i) \overset{c}{\sim} \mathcal{G}(m, i)$, при которых дополнительно требуется, чтобы центры графов переходили друг в друга.

Лемма 9.1. *Следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G(x_n, i) & \overset{\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(n, i) \\ \downarrow\overset{c}{\sim} & & \downarrow\overset{c}{\sim} \\ G(x_m, i) & \overset{\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(m, i) \end{array} \tag{9.11}$$

коммутативна, где $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$ *– отображение сужения* (9.6).

Доказательство. Следует из соотношения

$$x_n + n'\alpha \;\equiv\; x_{n+n'} \quad \mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^d \tag{9.12}$$

для точек $x_n = S^n(0)$, где S – сдвиг (2.13) тора $\mathbb{T}^d$. □

Локальные координационные графы $\mathcal{G}(n,i)$ конечны и одномерны. По определению (8.8) вершины этих графов содержатся

$$\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) \;\subseteq\; \mathcal{M} \tag{9.13}$$

в множестве номеров вершин разбиения $\mathcal{T}$. Поэтому для графов $\mathcal{G}(x_n,i)$ существуют

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}(n,i) \;&=\; \max\{m \,:\, m \in \mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i)\}, \\ \underline{\mathbf{m}}(n,i) \;&=\; \min\{m \,:\, m \in \mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i)\} \end{aligned} \tag{9.14}$$

крайние вершины, между которыми содержатся все другие вершины

$$\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) \;\subseteq\; \mathcal{I}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) \tag{9.15}$$

указанных графов, где

$$\mathcal{I}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) = \{\underline{\mathbf{m}}(n,i),\, \underline{\mathbf{m}}(n,i)+1, \ldots,\, \bar{\mathbf{m}}(n,i)\} \tag{9.16}$$

– *интервал* локального координационного графа $\mathcal{G}(n,i)$.

Предложение 9.1. *Локальный граф $G(x_m,i)$ центрально изоморфен $G(x_m,i) \overset{c}{\sim} G(x_n,i)$ графу $G(x_n,i)$ тогда и только тогда, когда номер m принадлежит интервалу*

$$\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,i) = \{n-\underline{\mathbf{m}}(n,i),\, n-\underline{\mathbf{m}}(n,i)+1, \ldots,\, n+(\mathbf{m}-1-\bar{\mathbf{m}}(n,i))\}. \tag{9.17}$$

Доказательство. Пусть графы $G(x_n,i)$ и $G(x_m,i)$ центрально изоморфны, т.е.

$$G(x_m,i) \equiv G(x_n,i) + (m-n)\alpha \quad \mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^d. \tag{9.18}$$

По лемме 9.1 условию (9.18) отвечает равенство координационных графов

$$\mathcal{G}(m,i) = \mathcal{G}(n,i) + (m-n). \tag{9.19}$$

Поскольку граф $\mathcal{G}(m,i)$ содержится в множестве $\mathcal{M}$, то из (9.19) следует, что граф $\mathcal{G}(n,i)$ допускает сдвиг на $m-n$, не выходя при этом за пределы множества $\mathcal{M}$. Это в силу (9.16) возможно только, если имеют место неравенства

$$\bar{\mathbf{m}}(n,i) + (m-n) \leqslant \mathbf{m} - 1, \quad \underline{\mathbf{m}}(n,i) + (m-n) \geqslant 0, \tag{9.20}$$

из которых вытекает включение m в интервал $\mathcal{I}^{\,\mathrm{ver}}(n,i)$ из (9.16).

Обратно, предполагая выполненным включение $m \in \mathcal{I}^{\mathrm{ver}}(n,i)$, приходим к неравенствам (9.20), затем от них переходим к равенству (9.19), из которого и леммы 9.1 получаем соотношение (9.18). $\square$

9.5. Интервалы локализации центров локальных графов. Определению центральный изоморфизм графов $G(x_m,i) \overset{c}{\sim} G(x_n,i)$ означает, что с точностью до сдвига $G(x_m,i)$ и $G(x_n,i)$ – один и тот же граф $G(x,i)$ со свободным центром $x = x_{n'}$ из множества вершин разбиения тора $\mathcal{T}$.

Вопрос: *насколько локальный граф $G(x,i)$, являющийся подграфом всего графа G, выделяет свой центр x среди всех вершин G^{ver} графа G?*

Ответ, содержащийся в предложении 9.1, состоит в том, что номер n' центральной вершины $x = x_{n'}$ графа $G(x,i)$ должен содержаться в некотором интервале $\mathcal{I}^{\mathrm{ver}}(n',i)$ из множества номеров $\mathcal{M}$, при этом в качестве номера n' можно выбрать, например, $n' = n$ или m.

По этой причине интервалы $\mathcal{I}^{\mathrm{loc}}(n',i)$ вида (9.17) будем называть *интервалами локализации* центров локальных графов.

9.6. Автоморфизмы графов. Далее под *автоморфизмом* графа на торе $\mathbb{T}^d$ будем понимать некоторый сдвиг этого тора, задающий биекцию графа на себя. Так как вершины x_n рассматриваемых нами глобальных G и локальных графов $G(x_n,i)$ принадлежат орбите $\mathrm{Orb}(0,\mathbf{m})$ из (2.27), то можем считать, что автоморфизмы тора $\mathbb{T}^d$ имеют вид

$$\mathrm{aut}_m\colon\ x \ \mapsto\ x + x_m \mod \mathbb{Z}^d, \tag{9.21}$$

где $x_m = m\alpha$ для $m \in \mathbb{Z}$.

Предложение 9.2. *Граф G разбиения тора $\mathcal{T}$ и его локальные подграфы $G(x_n,i) \subset G$ не имеют нетривиальных автоморфизмов.*

Доказательство. Коммутативную диаграмму из леммы 9.1, сохраняя ее доказательство, можно расширить до диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G(x_n,i) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{G}(n,i) \\ \downarrow \mathrm{aut}_m & & \downarrow \mathrm{aut}_m \\ G(x_m,i) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{G}(m,i). \end{array} \tag{9.22}$$

Здесь левая вертикальная стрелка означает автоморфизм (9.21), а правая стрелка в силу соотношения (9.12) – автоморфизм

$$\mathrm{aut}_m\colon\ n \ \mapsto\ n + m \tag{9.23}$$

локального координационного графа $\mathcal{G}(n,i)$. Следовательно, если допустить существование автоморфизма aut_m у графа $G(x_n,i)$, то ввиду диаграммы (9.22) он будеть индуцировать биекцию

$$\mathrm{aut}_m\colon\ \mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) \ \overset{\longrightarrow}{\sim}\ \mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i) \tag{9.24}$$

на множестве вершин $\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i)$ координационного графа $\mathcal{G}(n,i)$. По определению $\mathcal{G}^{\,\mathrm{ver}}(n,i)$ являются конечными подмножествами на прямой $\mathbb{R}$. Но такие подмножества не допускают нетривиальные сдвиги, переводящие их в себя. Поэтому автоморфизм aut_m в (9.24) тривиальный, т.е. $m=0$.

Приведенное рассуждение подходит и для полного графа разбиения G, поскольку в силу (9.9) его координационный граф $\mathcal{G}$ является частным случаем $\mathcal{G}=\mathcal{G}(n,r_G)$ локальных координационных графов $\mathcal{G}(n,i)$. □

9.7. Радиус локализации центра локальных графов.

Предложение 9.3. *Пусть $r_G(x_n)$ – радиус роста из* (9.4) *локальных графов $G(x_n,i)$ с центром x_n и $\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,i)$ – интервалы локализации центров* (9.17) *графов $G(x_n,i)$. Тогда существует такой радиус*

$$\varrho_G(x_n) \leqslant r_G(x_n), \tag{9.25}$$

что будут выполняться равенства

$$\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,i)=\{n\} \tag{9.26}$$

для всех радиусов $i \geqslant \varrho_G(x_n)$.

Доказательство. Последовательности (9.9) вложенных координационных графов $\mathcal{G}(n,i)$ отвечает ассоциированная с ними последовательность

$$\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,0)\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,1)\ \supset\ \ldots\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,i)\ \supset\ \ldots\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,r_G) \tag{9.27}$$

интервалов локализации (9.17). Так как $\mathcal{G}(n,r_G)=\mathcal{G}$ по (9.9), то согласно определению (9.17) имеем $\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,0)=\mathcal{M}$ и $\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,r_G)=\{n\}$. Отсюда и (9.27) получаем еще одну последовательность

$$\mathcal{M}\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,1)\ \supset\ \ldots\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,i)\ \supset\ \ldots\ \supset\ \mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n,r_G)=\{n\}, \tag{9.28}$$

из которой следует утверждение предложения. □

Радиус $\varrho_G(x_n)$ из неравенства (9.25) назовем *радиусом локализации* вершины x_n. Объяснение состоит в следующем.

По предложению 9.1 два локальных графа $G(x_n, i)$ и $G(x_m, i)$ центрально изоморфны $G(x_n, i) \overset{c}{\sim} G(x_m, i)$ тогда и только тогда, когда номер m принадлежит интервалу локализации $\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n, i)$. Если при этом дополнительно предположить, что радиус $i \geqslant \varrho_G(x_n)$, то в силу (9.26) можем записать $\mathcal{I}^{\,\mathrm{loc}}(n, i) = \{n\}$. Но тогда отсюда будет следовать равенство номеров $m = n$ и, значит, у графов $G(x_n, i)$, $G(x_m, i)$ совпадают их вершины $x_n = x_m$. Последнее равносильно равенству графов $G(x_n, i) = G(x_m, i)$. Итак, мы доказали:

$$G(x_n, i) \overset{c}{\sim} G(x_m, i) \;\Rightarrow\; G(x_n, i) = G(x_m, i), \tag{9.29}$$

если $i \geqslant \varrho_G(x_n)$. Импликация (9.29) означает, что локальные подграфы $G(x, i)$ радиусов $i \geqslant \varrho_G(x)$ из графа разбиения G однозначно определяют свою центральную вершину x, т.е. локализуют ее. Если воспользоваться (9.5) и (9.25), то радиус локализации $\varrho_G(x_n)$ можно оценить

$$\varrho_G(x_n) \leqslant \delta_G \tag{9.30}$$

через диаметр δ_G графа разбиения G.

Радиусы роста $r_G(x_n)$ и локализации $\varrho_G(x_n)$ назовем *критическими радиусами* вершины x_n разбиения тора $\mathcal{T}$.

§10. Симметрии графов разбиений

10.1. Симметрии маршрутов в графах: комбинаторика. Пусть

$$\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_t}\}^{\rightarrowtail} \tag{10.1}$$

– некоторый *маршрут* в ориентированном графе $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G}_{\mathcal{T}}$ разбиения $\mathcal{T}$, т.е. последовательность произвольных смежных вершин $x_{n_s} \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$, соединенных

$$x_{n_{s+1}} = x_{n_s} + \mathbf{w}_{k_s} \tag{10.2}$$

для $s = 1, \dots, t-1$ дугами-лучами $\mathbf{w}_{k_s} \in \mathbf{w}$. С помощью отображения (8.8) маршруту $\langle x_{n_1}, x_{n_s}\rangle$ можно поставить в соответствие *координационный маршрут*

$$\langle n_1, n_t\rangle^{\rightarrowtail} = \{n_1, n_2, \dots, n_t\}^{\rightarrowtail} \tag{10.3}$$

в координационном графе $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\mathcal{M}}$. Маршрут (10.3) состоит из номеров $n_s \in \mathcal{M}$, соединенных

$$n_{s+1} = n_s + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_{k_s})\,\mathbf{m}_{k_s} \tag{10.4}$$

лучами $\pm\mathbf{m}_{k_s} = \operatorname{sign}(\mathbf{w}_{k_s})\,\mathbf{m}_{k_s}$, принадлежащими симметризованной координационной звезде $\mathbf{M}^{\pm}$ из (8.9). Согласно предложению 8.1 по координационному маршруту $\langle n_1, n_t\rangle^{\rightarrowtail}$ однозначно восстанавливается исходный машрут $\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$.

Помимо ориентированных маршрутов (10.1) и (10.3) в графе $\overrightarrow{G}$, далее мы будем также рассмотривать отвечающие им *неориентированные маршруты* $\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle$ и $\langle n_1, x_t\rangle$ соответственно в графе G и координационном графе $\mathcal{G}$.

На множестве маршрутов (10.1) зададим отображение

$$s\colon\ \langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail} \ \longrightarrow\ \langle x_{\bar n_1}, x_{\bar n_t}\rangle^{\rightarrowtail} \tag{10.5}$$

следующим образом. Если записать маршрут $\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$ в развернутом виде

$$x_{n_1} \ \overset{\mathbf{w}_{k_1}}{\longrightarrow}\ x_{n_2} \ \overset{\mathbf{w}_{k_2}}{\longrightarrow}\ \ldots \ \overset{\mathbf{w}_{k_{t-1}}}{\longrightarrow}\ x_{n_t}, \tag{10.6}$$

то его s-образ $\langle x_{\bar n_1}, x_{\bar n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$ будет иметь вид

$$x_{\bar n_1} \ \overset{-\mathbf{w}_{k_1}}{\longrightarrow}\ x_{\bar n_2} \ \overset{-\mathbf{w}_{k_2}}{\longrightarrow}\ \ldots \ \overset{-\mathbf{w}_{k_{t-1}}}{\longrightarrow}\ x_{\bar n_t}, \tag{10.7}$$

где $\bar n_s = \mathbf{m}-1-n_s$. Перенесем отображение (10.5) на координационные маршруты:

$$s\colon\ \langle n_1, n_t\rangle^{\rightarrowtail} \ \longrightarrow\ \langle \bar n_1, \bar n_t\rangle^{\rightarrowtail}. \tag{10.8}$$

В этом случае маршрут

$$n_1 \ \overset{\pm\mathbf{m}_{k_1}}{\longrightarrow}\ n_2 \ \overset{\pm\mathbf{m}_{k_2}}{\longrightarrow}\ \ldots \ \overset{\pm\mathbf{m}_{k_{t-1}}}{\longrightarrow}\ n_t \tag{10.9}$$

отображается на

$$\bar n_1 \ \overset{\mp\mathbf{m}_{k_1}}{\longrightarrow}\ \bar n_2 \ \overset{\mp\mathbf{m}_{k_2}}{\longrightarrow}\ \ldots \ \overset{\mp\mathbf{m}_{k_{t-1}}}{\longrightarrow}\ \bar n_t. \tag{10.10}$$

Здесь использовали сокращения $\mp\mathbf{m}_{k_s} = -(\pm\mathbf{m}_{k_s})$ для лучей из (10.4).

Лемма 10.1. *Допустим, что* $\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$ *– некоторый маршрут в ориентированном графе* $\overrightarrow{G}$. *Тогда его* s*-образ* $\langle x_{\bar n_1}, x_{\bar n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$, *определенный в* (10.7), *снова будет маршрутом в графе* $\overrightarrow{G}$.

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом

$$\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\mathcal{M}}\colon\ \overrightarrow{G} \ \longrightarrow\ \overrightarrow{\mathcal{G}} \tag{10.11}$$

– аналогом для ориентированных графов изоморфизма $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}\colon G \longrightarrow \mathcal{G}$ из (8.8); и вместо маршрутов $\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrowtail}$ доказательство леммы проведем для отвечающих им координационным маршрутам $\langle n_1, n_t\rangle^{\rightarrowtail}$.

Из равенства (10.4) получаем

$$\begin{aligned}\bar{n}_{s+1} &= \overline{n_s \pm \mathbf{m}_{k_s}} = \overline{n_s + \operatorname{sign}(\mathbf{w}_{k_s})\,\mathbf{m}_{k_s}} \\ &= \mathbf{m} - 1 - n_s - \operatorname{sign}(\mathbf{w}_{k_s})\,\mathbf{m}_{k_s} = \bar{n}_s - \operatorname{sign}(\mathbf{w}_{k_s})\,\mathbf{m}_{k_s},\end{aligned} \tag{10.12}$$

откуда вытекает

$$\bar{n}_{s+1} = \bar{n}_s \mp \mathbf{m}_{k_s}. \tag{10.13}$$

Отображение $n \to \bar{n}$ задает для координационного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ биекцию на его множестве вершин

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} \;=\; \mathcal{M}, \tag{10.14}$$

совпадающего согласно (9.8) с множеством номеров $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ вершин разбиения $\mathcal{T}$. Следовательно, номера $\bar{n}_{s+1}$, $\bar{n}_s \in \mathcal{M}$. Отсюда, равенств (10.13), (10.14) и правила максимума, представленном в теореме 7.1, заключаем, что указанные номера соединены ребром $\mp\,\mathbf{m}_{k_s}$ в координационном графе $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. А тогда по определению (10.8)–(10.10) маршрут $\langle \bar{n}_1, \bar{n}_t \rangle^{\mapsto}$ содержится в графе $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, что вместе с изоморфизмомом (10.11) доказывает лемму. $\square$

10.2. Симметрии маршрутов в графах: геометрия. Сначала рассмотрим следующее отображение тора

$$\mathfrak{s}\colon\ \mathbb{T}^d \;\longrightarrow\; \mathbb{T}^d, \tag{10.15}$$

полагая

$$\mathfrak{s}(x) \equiv -x + x_{\mathbf{m}-1} \mod \mathbb{Z}^d. \tag{10.16}$$

Лемма 10.2. *Определенное в* (10.15) *отображение* $\mathfrak{s}$ *представляет собою центральную симметрию*

$$\mathfrak{s} = \mathrm{o}_c \tag{10.17}$$

тора $\mathbb{T}^d$, *центром которой* $c = c_{\mathbf{e}}$ *может быть любая точка из множества*

$$C_{\mathbf{m}-1} = \{c_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{e};\ \ \mathbf{e} \in E\}, \tag{10.18}$$

где $E = (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d$ *– аддитивная подгруппа тора* $\mathbb{T}^d$ *порядка* $\sharp E = 2^d$. *Таким образом, выполняется сравнение*

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}(x) \equiv \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}'}}(x) \mod \mathbb{Z}^d \tag{10.19}$$

для любых $x \in \mathbb{T}^d$ *и любых центров симметрии* $c_{\mathbf{e}}$, $c_{\mathbf{e}'}$, *где* $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}' \in E$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{l}$ – любой вектор решетки $\mathbb{Z}^d$. Тогда по определению (10.16) отображения $\mathfrak{s}$ имеем

$$\mathfrak{s}(x) \equiv -x + x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{l} \equiv -(x-c) + c \mod \mathbb{Z}^d. \tag{10.20}$$

Здесь использовали сокращение $c = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1} + \frac{1}{2}\mathbf{l}$. Поскольку $\frac{1}{2}\mathbf{l} \equiv \mathbf{e} \mod \mathbb{Z}^d$ для некоторого $\mathbf{e} \in E$, то $c \equiv c_{\mathbf{e}} \mod \mathbb{Z}^d$ и, значит, можем записать

$$\mathfrak{s}(x) \equiv -(x - c_{\mathbf{e}}) + c_{\mathbf{e}} \mod \mathbb{Z}^d. \tag{10.21}$$

Теперь, после того как отображение $\mathfrak{s}$ представлено в форме (10.21), видно, что $\mathfrak{s}$ представляет собою центральную симметрию $\mathfrak{s} = \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$ тора $\mathbb{T}^d$ с центром $c_{\mathbf{e}}$ из множества (10.18). При этом, перебирая лишь векторы $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ с координатами 0 и 1, можем получить все векторы $\mathbf{e} \in E$. Поскольку значение $\mathfrak{s}(x)$ в (10.20) не зависит от выбора вектора $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, то отсюда выводим сравнение (10.19). □

На данном этапе будем в согласии с (8.5) считать, что граф разбиения $\overrightarrow{G}$ вложен $\overrightarrow{G} \subset \mathbb{T}^d$ в d-мерный тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Выясним, как отображение тора $\mathfrak{s}$ действует на вершины $x_n \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ графа $\overrightarrow{G}$. По определению (10.16) имеет

$$\mathfrak{s}(x_n) \equiv -x_n + x_{\mathbf{m}-1} \equiv x_{\mathbf{m}-1-n} \equiv x_{\bar{n}} \mod \mathbb{Z}^d. \tag{10.22}$$

Это означает совпадение

$$\mathfrak{s}(x_n) = s(x_n) \tag{10.23}$$

отображения $\mathfrak{s}$ с ранее введенным в (10.5) отображением s на множестве вершин $\overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$. Более того, используя линейность отображения $\mathfrak{s}$, сравнение (10.22) и равенство $\mathbf{w}_{k_{s+1}} = x_{n_{s+1}} - x_{n_s}$, можем записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\mathbf{w}_{k_{s+1}}) &\equiv \mathfrak{s}(x_{n_{s+1}}) - \mathfrak{s}(x_{n_s}) \equiv x_{\bar{n}_{s+1}} - x_{\bar{n}_s} \\ &\equiv x_{n_s - n_{s+1}} \equiv x_{n_s} - x_{n_{s+1}} \mod \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \tag{10.24}$$

т.е.

$$\mathfrak{s}(\mathbf{w}_{k_{s+1}}) \equiv -\mathbf{w}_{k_{s+1}} \mod \mathbb{Z}^d. \tag{10.25}$$

Сопоставляя равенство (10.23) и сравнение (10.25) видим, что отображения $\mathfrak{s}$ и s совпадают

$$\mathfrak{s}(\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrow}) = s(\langle x_{n_1}, x_{n_t}\rangle^{\rightarrow}) \tag{10.26}$$

и на множестве маршрутов (10.1) в графе $\overrightarrow{G}$.

10.3. Симметрии графа разбиения тора.

Теорема 10.1. *Пусть ориентированный граф* $\overrightarrow{G}$ *вложен в тор* $\mathbb{T}^d$ *и* s *– отображение* (10.5)*, определенное на множестве маршрутов* (10.1) *в графе* $\overrightarrow{G}$*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение* s *можно так продолжить с множества маршрутов графа* $\overrightarrow{G} \subset \mathbb{T}^d$ *на весь тор* $\mathbb{T}^d$*, что* s *будет*

$$s = \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} \tag{10.27}$$

– центральной симметрией (10.17) *тора* $\mathbb{T}^d$ *с центром* $c_{\mathbf{e}}$ *в любой из точек множества* $C_{\mathbf{m}-1}$ *из* (10.18).

2. *Отображение*

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}\colon\ \overrightarrow{G}\ \longrightarrow\ \overrightarrow{G} \tag{10.28}$$

является автоморфизм графа $\overrightarrow{G}$.

3. *Граф* $\overrightarrow{G}$ *центрально симметричен. Он имеет* $\sharp C_{\mathbf{m}-1} = 2^d$ *различных центров симметрии* $c_{\mathbf{e}} \in C_{\mathbf{m}-1}$.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из равенства (10.26) и леммы 10.2.

2. Из леммы 10.1 и равенства (10.27) следует замкнутость (10.28) графа $\overrightarrow{G}$ относительно симметрии $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$. Поскольку данное отображение является автоморфизмом тора $\mathbb{T}^d$, то отображение (10.28) есть автоморфизм графа $\overrightarrow{G}$.

3. Третье утверждение следует из леммы 10.2 и пункта 2. □

10.4. Симметрия координационного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. Обозначим через $[\mathcal{M}] = [0, \mathbf{m}-1]$ вещественный интервал, соответствующий натуральному интервалу $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}-1\}$, т.е. по определению интервал $[\mathcal{M}]$ состоит из всех вещественных чисел $0 \leqslant x \leqslant \mathbf{m}-1$. Пусть

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathfrak{o}_{\mathfrak{c}}} \mathbb{R}\colon\ n \mapsto\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{c}}(n) = -n + \mathbf{m} - 1. \tag{10.29}$$

Так определенное отображение $\mathfrak{o}_{\mathfrak{c}}$ является центральной симметрией прямой $\mathbb{R}$ с центром симметрии $\mathfrak{c} = \frac{\mathbf{m}-1}{2}$. При этом интервал $[\mathcal{M}] \subset \mathbb{R}$ – инвариантное подмножество

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{c}}\, [\mathcal{M}] = [\mathcal{M}] \tag{10.30}$$

отображения (10.29).

Перенесем отображение $\mathfrak{o}_{\mathfrak{c}}$ на координационный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. Данный граф имеет вершины из множества $M \subset [\mathcal{M}]$, поэтому можем считать, что данный граф вложен в интервал $[\mathcal{M}]$. Поскольку сам интервал $[\mathcal{M}]$ содержится в $\mathbb{R}$, то можем полагать, что граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ вложен

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} \subset [\mathcal{M}] \subset \mathbb{R} \tag{10.31}$$

в прямую $\mathbb{R}$; и тем самым на этом графе определено отображение $\mathfrak{o}_\mathfrak{c}$ из (10.29).

Предложение 10.1. *Пусть координационный граф* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *вложен* (10.31) *в прямую* $\mathbb{R}$ *и* $\mathfrak{o}_\mathfrak{c}$ *– ее центральная симметрия* (10.29)*. При этих условиях выполняются следующие утверждения.*

1. *Отображение*

$$\mathfrak{o}_\mathfrak{c}\colon\ \overrightarrow{\mathcal{G}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{G}} \tag{10.32}$$

является автоморфизм координационного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$*.*

2. *Граф* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *центрально симметричен с центром симметрии* $\mathfrak{c} = \frac{\mathbf{m}-1}{2}$*.*

Доказательство. На множестве вершин $n \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathcal{M}$ графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ отображение $\mathfrak{o}_\mathfrak{c}$ совпадает

$$\mathfrak{o}_\mathfrak{c}(n) = \bar{n} \tag{10.33}$$

с отображением $n \to \bar{n}$, где $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$. Отсюда и предложения 7.1 вытекает автоморфизм (10.32), из которого и (10.29) уже следует второе утверждение. □

Из теоремы 10.1 и предложения 10.1 вытекает следующая взаимосвязь между ориентированными графами $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ и их симметриями.

Следствие 10.1. *Пусть* $\overrightarrow{\mathrm{pr}}_\mathcal{M}$ *– изоморфизм* (10.11) *графа разбиения тора* $\overrightarrow{G}$ *и координационного графа* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$*;* $\mathrm{o}_c = \mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}$ *и* $\mathfrak{o}_\mathfrak{c}$ *– соответственно центральные симметрии* (10.28) *и* (10.32) *указанных графов. Тогда имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & \overrightarrow{G} & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{pr}}_\mathcal{M}} & \overrightarrow{\mathcal{G}} & \\ \mathrm{o}_c & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \mathfrak{o}_\mathfrak{c} \\ & \overrightarrow{G} & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{pr}}_\mathcal{M}} & \overrightarrow{\mathcal{G}}\,. & \end{array} \tag{10.34}$$

Замечание 10.1. При переходе от $\overrightarrow{G}$ и $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ к неориентированным графам G и $\mathcal{G}$ сохраняются свойства симметрии графов.

10.5. Симметрии бесконечного периодического графа. Пусть $T \subset \mathbb{R}^d$ – развертка (2.9) тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, представляющая собою параллелоэдр. По определению (2.2) *отображение редукции*

$$T \ \overset{\longrightarrow}{\sim} \ \mathbb{T}^d\colon \ x \mapsto x \mod \mathbb{Z}^d \tag{10.35}$$

есть биекция. Согласно (2.11) параллелоэдр T разбивает

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^d} T\,[l] \tag{10.36}$$

пространство $\mathbb{R}^d$ с помощью параллельных переносов $T\,[l] = T + l$ на векторы решетки $\mathbb{Z}^d$.

Используя биекцию (10.35) вложим граф $\overrightarrow{G} \subset \mathbb{T}^d$ в развертку T. Получаем цепочку вложений

$$\overrightarrow{G} \subset T \subset \mathbb{R}^d, \tag{10.37}$$

позволяющую определить *бесконечный периодический граф*

$$\overrightarrow{G}_\infty = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^d} \overrightarrow{G}\,[l] \quad \subset \mathbb{R}^d. \tag{10.38}$$

В силу (10.36) так определенный граф $\overrightarrow{G}_\infty$ является *связаным*, причем его фактор-граф $\overrightarrow{G}_\infty/\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}^d$ совпадает

$$\overrightarrow{G}_\infty/\mathbb{Z}^d = \overrightarrow{G} \tag{10.39}$$

с исходным графом $\overrightarrow{G}$.

Для произвольного вектора $\mathbf{l}$ решетки $\mathbb{Z}^d$ зададим отображение

$$\mathrm{o}_{c_\mathbf{l}}\colon \ \mathbb{R}^d \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^d, \tag{10.40}$$

где

$$\mathrm{o}_{c_\mathbf{l}}(x) = -x + x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{l}, \tag{10.41}$$

представляющего собою центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^d$ с центром

$$c_\mathbf{l} = \frac{1}{2}\, x_{\mathbf{m}-1} + \frac{1}{2}\,\mathbf{l}. \tag{10.42}$$

Лемма 10.3. *Пусть* o_c *– центральная симметрия* (10.17) *тора* $\mathbb{T}^d$ *с центром* c *в любой из точек множества* $C_{\mathbf{m}-1}$ *из* (10.18) *и, в частности,* $c = \frac{1}{2}\, x_{\mathbf{m}-1}$; *и пусть* $\mathbf{l}$ *– некоторый вектор решетки* $\mathbb{Z}^d$. *Тогда* *следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\bmod \mathbb{Z}^d} & \mathbb{T}^d & \\ \mathrm{o}_{c_1} & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & \mathrm{o}_c \\ & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\bmod \mathbb{Z}^d} & \mathbb{T}^d. & \end{array} \tag{10.43}$$

Здесь горизонтальные стрелки означают редукцию $x \mapsto x \bmod \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ имеем сравнение $\mathrm{o}_c(x') \equiv -x' + x_{\mathbf{m}-1} \bmod \mathbb{Z}^d$, где $x \mapsto x' \equiv x \bmod \mathbb{Z}^d$; и $\mathrm{o}_{c_1}(x) = -x + x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{l}$. Откуда выводим сравнение $\mathrm{o}_{c_1}(x) \equiv \mathrm{o}_c(x') \bmod \mathbb{Z}^d$, доказывающее коммутативность диаграммы (10.43). □

Теорема 10.2. *Пусть* $\overrightarrow{G}_\infty \subset \mathbb{R}^d$ *– бесконечный граф* (10.38), $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ *и* o_{c_1} *– ограничение на граф* $\overrightarrow{G}_\infty$ *отображения из диаграммы* (10.43). *Тогда спаведливы следующие утверждения.*

1. *Отображение* o_{c_1} *переводит граф* $\overrightarrow{G}_\infty$ *в себя*

$$\mathrm{o}_{c_1}\colon\ \overrightarrow{G}_\infty \longrightarrow \overrightarrow{G}_\infty \tag{10.44}$$

и представляет собою центральную симметрию данного графа.

2. *Центры симметрии графа* $\overrightarrow{G}_\infty$ *образуют периодическое множество*

$$C_\infty = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^d} C\,[l] \tag{10.45}$$

через трансляции множества $C = C_{\mathbf{m}-1}$, *определенного в* (10.18).

Доказательство. Рассмотрим ограничение на граф $\overrightarrow{G}_\infty \subset \mathbb{R}^d$ отображений из диаграммы (10.43). Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{cccc} & \overrightarrow{G}_\infty & \xrightarrow{\bmod \mathbb{Z}^d} & \overrightarrow{G} & \\ \mathrm{o}_{c_1} & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & \mathrm{o}_c \\ & \overrightarrow{G}'_\infty & \xrightarrow{\bmod \mathbb{Z}^d} & \overrightarrow{G}, & \end{array} \tag{10.46}$$

в которой через $\overrightarrow{G}'_\infty = \mathrm{o}_{c_1}(\overrightarrow{G}_\infty)$ записали образ графа в пространстве в $\mathbb{R}^d$ и первая вертикальная стрелка обозначает биекцию. Это следует из того, что сама центральная симметрия o_{c_1} задает биекцию пространства $\mathbb{R}^d$.

Согласно (10.39) полный прообраз конечного графа $\overrightarrow{G}$ относительно отображения редукции $\stackrel{\operatorname{mod}\mathbb{Z}^d}{\longrightarrow}$ равен $\overrightarrow{G}_\infty$. Отсюда и из коммутативности диаграммы (10.46) выводим равенство $\overrightarrow{G}'_\infty = \overrightarrow{G}_\infty$. Поэтому диаграмма (10.46) заменится на новую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{cccc} & \overrightarrow{G}_\infty & \stackrel{\operatorname{mod}\mathbb{Z}^d}{\longrightarrow} & \overrightarrow{G} & \\ \mathrm{o}_{c_\mathbf{l}} & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & \mathrm{o}_c \\ & \overrightarrow{G}_\infty & \stackrel{\operatorname{mod}\mathbb{Z}^d}{\longrightarrow} & \overrightarrow{G}, & \end{array} \qquad (10.47)$$

что доказывает первое утверждение теоремы. Из него же и теоремы 10.1 следует и второе утверждение. □

Рассмотрим подробнее множество всех симметрий

$$\overrightarrow{\Gamma}_\infty = \{\mathrm{o}_{c_\mathbf{l}};\ \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d\} \qquad (10.48)$$

из теоремы 10.2. Ясно, что $\overrightarrow{\Gamma}_\infty$ образует бесконечную группу. Это видно из следующего рассуждения. Бесконечный периодический граф $\overrightarrow{G}_\infty$ по определению (10.38) допускает бесконечную *группу трансляций*

$$\mathbf{Z}^d = \{t_\mathbf{l} : \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d\} \qquad (10.49)$$

– параллельных сдвигов $t_\mathbf{l}(x) = x + \mathbf{l}$ на векторы $\mathbf{l}$ решетки $\mathbb{Z}^d$. При этом необходимо заметить, что мультипликативная группа трансляций (10.49) изоморфна $\mathbf{Z}^d \simeq \mathbb{Z}^d$ аддитивной группе $\mathbb{Z}^d$, учитывая формулу умножения для сдвигов $t_\mathbf{l} \cdot t_{\mathbf{l}'} = t_{\mathbf{l}+\mathbf{l}'}$.

10.6. Группа симметрий бесконечного графа. *Группу симметрий* $\overrightarrow{\Gamma}_\infty$ можно представить (подробности см., например, [19])

$$\overrightarrow{\Gamma}_\infty = \langle \mathrm{o}_0, \mathrm{o}_1, \ldots, \mathrm{o}_d \rangle \qquad (10.50)$$

через *порождающие элементы* – центральные симметрии $\mathrm{o}_k = \mathrm{o}_{c_k}$ с центрами c_k из приведенного множества

$$C_\triangle = \{c_k = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{e}_k;\ \ k = 0, 1, \ldots, d\}. \qquad (10.51)$$

Здесь $x_{\mathbf{m}-1} = \{(\mathbf{m}-1)\alpha\}$, где $\{x\}$ обозначает дробную долю числа x, натуральное $\mathbf{m}$ определено в (3.17) и

$$\mathbf{e}_0 = (0, \ldots, 0),\ \ \mathbf{e}_1 = (\frac{1}{2}, \ldots, 0),\ \ \ldots,\ \ \mathbf{e}_d = (0, \ldots, \frac{1}{2}). \qquad (10.52)$$

Выражение справа в (10.50) означает группу, состоящую из всевозможных произведений $\mathrm{o}_{k_1}^{\pm1}\mathrm{o}_{k_2}^{\pm1}\cdot\dots\cdot\mathrm{o}_{k_s}^{\pm1}$ порождающих элементов $\mathrm{o}_k \in \overrightarrow{\Gamma}_\infty$. Как абстрактная группа, $\overrightarrow{\Gamma}_\infty$ определяется через *определяющие соотношения*

$$\mathrm{o}_k^2 = \mathrm{id}, \quad \mathrm{o}_{k_1}\mathrm{o}_{k_2}\cdot\mathrm{o}_{k_3}\mathrm{o}_{k_4} = \mathrm{o}_{k_3}\mathrm{o}_{k_4}\cdot\mathrm{o}_{k_1}\mathrm{o}_{k_2} \tag{10.53}$$

для всех комбинаций индексов $k, k_i = 0, 1, \dots, d$. Здесь id – тождественное отображение.

Укажем для группы симметрий $\overrightarrow{\Gamma}_\infty$ еще одно полезное представление через порождающие элементы. С этой целью заметим, что группа трансляций $\mathbf{Z}^d$ имеет каноническое представление

$$\mathbf{Z}^d = \langle t_1, \dots, t_d\rangle \tag{10.54}$$

через сдвиги $t_k = t_{e_k}$ на единичные векторы $e_1, \dots, e_d$ из (1.1). Используя включение $\mathbf{Z}^d \subset \overrightarrow{\Gamma}_\infty$ и представления (10.50), (10.54), получаем

$$\overrightarrow{\Gamma}_\infty = \langle \mathrm{o}_0, t_1, \dots, t_d\rangle. \tag{10.55}$$

В данном случае определяющими соотношениями будут

$$\mathrm{o}_0^2 = \mathrm{id}, \quad (\mathrm{o}_0 t_k)^2 = (t_k\mathrm{o}_0)^2 = \mathrm{id}, \quad t_{k_1}t_{k_2} = t_{k_2}t_{k_1} \tag{10.56}$$

для всех комбинаций $k, k_i = 0, 1, \dots, d$.

§11. Локальные графы и многогранные звезды

11.1. Обратная задача. В отличие от графа, само разбиение тора $\mathcal{T}$ состоит (3.24), (3.25) из параллелепипедов $\mathbf{T}_k$, $k = 0, 1, \dots, d$, и их S-сдвигов $S^j(\mathbf{T}_k)$, т.е. из d-мерных многогранников. Но тогда граф $G(\mathcal{T})$ можно интерпретировать как *скелет* разбиения $\mathcal{T}$, образованный из вершин и ребер многогранников.

Возникает *обратная задача*:

$$G \;\Rightarrow\; \mathcal{T} \tag{11.1}$$

– по графу G построить само разбиение $\mathcal{T}$. В случае размерностей $d = 1, 2$ разбиение $\mathcal{T}$ однозначно восстанавливается по его графу G. Однако, если $d \geqslant 3$, то задача становится значительно сложнее. Так, при обсуждении *подъема*

$$\mathrm{em}\colon\ \mathrm{st}(n) \;\hookrightarrow\; \mathrm{St}(n) \tag{11.2}$$

в (7.6) мы отмечали, что лучевая звезда $\mathrm{st}(n)$ однозначно определяет свою многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ только, если $\mathrm{st}(n)$ – *жесткая звезда*, а это – явление крайне редкое [1]. Чтобы решить задачу (11.1), попробуем с помощью правила максимума к лучевой звезде $\mathrm{st}(n)$ добавлять окружающие ее соседние лучевые звезды и уже по всей этой совокупности определять многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ в (11.2).

11.2. Правило максимума для ядерных параллелепипедов. Пусть $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – произвольный отмеченный параллелепипед , т.е. ядерный параллелепипед $\mathbf{T}_k$, в котором выделена его вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$. Поставим такому $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в соответствие *граф параллелепипеда* $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, чьи вершины $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ – это вершины параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, а выделенная вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ считается *начальной*. Две вершины графа соединены ребром, если данные вершины соседние в параллелепипеде $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Как и сам параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, его граф $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ являются отмеченными.

Для такого графа определим *отмеченное вложение*

$$G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} G(x_n, j) \tag{11.3}$$

в локальные графы $G(x_n, j)$ радиуса j. Вложение (11.3) означает, что сдвиг тора $\mathbb{T}^d$, переводящий выделенную вершину $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ в центр x_n графа $G(x_n, j)$, одновременно вкладывает граф $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ в граф $G(x_n, j)$, т.е. переводит вершины в вершины и сохраняет их смежность. Таким образом, из определения следует, что $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ является подграфом $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \subset G$ графа разбиения G всего тора $\mathbb{T}^d$. Ясно, что отмеченное вложение возможно только при выполнении условия $j \geqslant d$, так как граф параллелепипеда $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ с центром в вершине $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ имеет радиус d.

Далее нам потребуется еще одно *отмеченное вложение*

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{11.4}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ из (4.9), имеющую центр в той же самой вершине x_n, что и у графа $G(x_n, j)$. Здесь снова предполагается, что сдвиг тора, отображающий вершину $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ в центр x_n звезды $\mathrm{St}(n)$, переводит параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в один из параллелепипедов, входящих в звезду $\mathrm{St}(n)$.

Лемма 11.1. *Отмеченные вложения* (11.3) *и* (11.4) *связаны отношением эквивалентности*

$$G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} G(x_n, j) \iff \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{11.5}$$

для радиусов $j \geqslant d$, где d – размерность тора $\mathbb{T}^d$.

Доказательство. Используя изоморфизм из предложения 8.1 между графами разбиения тора и их координационными проекциями, вместо (11.5) будем рассматривать эквивалентность

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} \mathcal{G}(x_n, j) \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{11.6}$$

для соответствующих $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, $G(x_n, j)$ координационных графов $\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, $\mathcal{G}(x_n, j)$. Согласно (4.4) и (4.9) левая и правая части (11.6) каждая по отдельности равносильны выполнению неравенств

$$\mu_{\mathbf{i}} \leqslant n \leqslant \mu_{\mathbf{i}} + \mathbf{m}_k - 1, \tag{11.7}$$

где значения $\mu_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \cdots + \mathbf{m}_{i_\iota}$ были определены в (4.5), что доказывает требуемую эквивалентность (11.6). □

Замечание 11.1. Утверждение о том, что условие вложимости $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n)$ отмеченного параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ эквивалентно выполнимости неравенств (11.7), есть не что иное, как *правило максимума* для параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – аналог правила максимума (7.3) для ядерных лучей $\mathbf{w}_k$, сформулированного в теореме 7.1.

11.3. Построение многогранных звезд по локальным графам. В лемме 11.1 выявлена особая роль локальных графов $G(x_n, j) \subset G$ радиусов $j \geqslant d$. Ближайшая цель – выяснить, насколько такие графы $G(x_n, j)$ с вершиной x_n определяют многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$, имеющую центр в той же самой вершине x_n. Напомним, что два графа $G(x_n, i)$, $G(x_{n'}, i)$ или две звезды $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(n')$ с вершинами x_n, $x_{n'}$ эквивалентны $G(x_n, i) \sim G(x_{n'}, i)$ или $\mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(n')$, если первые получаются из вторых параллельным сдвигом тора $\mathbb{T}^d$, переводящим вершину x_n в $x_{n'}$.

Предложение 11.1. *При условии $j \geqslant d$ имеет место импликация*

$$G(x_n, j) \sim G(x_{n'}, j) \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(n'), \tag{11.8}$$

из которой следует, что локальные графы радиуса $j \geqslant d$ однозначно определяют тип своих многогранных звезд.

Доказательство. Пусть некоторый отмеченный параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ вкладывается $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n)$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$. Тогда по лемме 11.1 имеет место отмеченное вложение $\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} \mathcal{G}(x_n, j)$ координационного графа $\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$. Далее используя левую эквивалентность в (11.8), видим, что указанный граф также вкладывается $\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow}$

$\mathcal{G}(x_{n'}, j)$ в локальный координационный граф $G(x_{n'}, j)$ с центром в другой вершине $x_{n'}$. Снова возвращаемся к лемме 11.1 и выводим, что параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ еще вкладывается $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n')$ и в многогранную звезду $\mathrm{St}(n')$. Перебирая все возможные отмеченные ядерные параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, получаем импликацию

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \ \Rightarrow\ \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n'). \tag{11.9}$$

Все вкладывающиеся параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n)$ вместе составляют полную многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$. А согласно (11.9) данные параллелепипеды также входят $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n')$ в звезду $\mathrm{St}(n')$ и, следовательно, заполняют ее полностью. Поэтому многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$ и $\mathrm{St}(n')$ совпадают $\mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(n')$ с точностью до сдвига тора $\mathbb{T}^d$, что доказывает утверждение (11.8). □

Далее мы покажем, как с помощью предложения 11.1 можно строить многогранные разбиения $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$.

§12. Симметрии разбиений

12.1. Симметрии разбиений тора. Вернемся к определенному в (3.23) ядерному разбиению $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора $\mathbb{T}^d$ и исследуем его симметрии, пользуясь аналогией с графом разбиения.

Теорема 12.1. *Пусть* $\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}$ *– центральная симметрия* (10.17) *тора* $\mathbb{T}^d$ *с центром* $c_\mathbf{e}$ *в любой из точек множества* $C_{\mathbf{m}-1}$ *из* (10.18); *и пусть* $\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}\mathcal{T}$ *– образ разбиения* $\mathcal{T}$ *относительно симметрии* $\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}$. *Тогда выполняются следующие свойства.*

1. *Центральные симметрии* $\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}$ *и* $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}'}}$ *для любых центров* $c_\mathbf{e}$, $c_{\mathbf{e}'}$ *из множества* $C_{\mathbf{m}-1}$ *представляют собою одно и то же преобразование*

$$\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}} = \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}'}} \tag{12.1}$$

тора $\mathbb{T}^d$.

2. *Относительно центральной симметрии* o_c, *где* $c \in C_\mathbf{m}$, *любой центр* $c_\mathbf{e}$ *из множества* $C_\mathbf{m}$ *является неподвижной точкой*

$$\mathrm{o}_c(c_\mathbf{e}) = c_\mathbf{e} \tag{12.2}$$

и, как следствие, выполняется инвариантность

$$\mathrm{o}_c\, C_{\mathbf{m}-1} = C_{\mathbf{m}-1} \tag{12.3}$$

множества центров (10.18).

3. *Отображение* $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}: \mathcal{T} \to \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}\mathcal{T}$ *является автоморфизмом*

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \tag{12.4}$$

разбиения тора $\mathcal{T}$.

4. *Разбиение* $\mathcal{T}$ *центрально симметрично. Оно имеет* $\sharp C = 2^d$ *различных центров симметрии* $c_{\mathbf{e}} \in C$.

Доказательство. 1. Равенство (12.1) вытекает из сравнения (10.19).

2. Затем применяя указанное равенство, получаем

$$\mathrm{o}_c(c_{\mathbf{e}}) = \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}(c_{\mathbf{e}}) = c_{\mathbf{e}}, \tag{12.5}$$

так как для центральной симметрии $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$ ее центр $c_{\mathbf{e}}$ является неподвижной точкой.

3. Пусть $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ — произвольный (4.10) многогранник из разбиения тора $\mathcal{T}$, получающийся S-сдвигом соответствующего отмеченного параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, который вкладывается $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n)$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$. Тогда согласно (11.5) граф параллелепипеда $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ вкладывается

$$G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} G(x_n, d) \tag{12.6}$$

в локальный граф $G(x_n, d)$ с центром x_n. Действуя центральной симметрией $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$ на вложение (12.6), получаем еще одно вложение

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} G(x_n, d), \tag{12.7}$$

где по теореме 10.1 имеем

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \sim G(o(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})), \quad \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} G(x_n, j) = G(\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} x_n, j). \tag{12.8}$$

Здесь через $o(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ обозначили параллелепипед, получающуюся из параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ с помощью центральной симметрии с центром в самом параллелепипеде $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Из (12.7) и (12.8) следует вложение

$$G(o(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})) \dot{\hookrightarrow} G(\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} x_n, d), \tag{12.9}$$

из которого, снова применяя (11.5), выводим

$$o(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \dot{\hookrightarrow} \mathrm{St}(\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} n), \tag{12.10}$$

где $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} n$ — номер вершины $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} x_n$.

Итак, мы доказали следующее утверждение: для любого многогранники $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$ из разбиения тора $\mathcal{T}$ его симметричный образ $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$ содержится в звезде $\mathrm{St}(\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}} n)$ и, значит, $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$ также содержится в разбиении тора $\mathcal{T}$. Поскольку центральная симметрия $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$ является автоморфизмом тора $\mathbb{T}^d$, то из сказанного получаем, что симметрия $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}$

сохраняет разбиение тора $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}}}\mathcal{T} = \mathcal{T}$; и тогда из инвариантности разбиения будет вытекать требуемый автоморфизм (12.4).

4. Второе утверждение вытекает из (12.4) и теоремы 10.1. □

12.2. Симметрии бесконечных разбиений. Используя биекцию (10.35), можем перенести разбиение $\mathcal{T}$ с тора $\mathbb{T}^d$ на его развертку T. Получим цепочку вложений

$$\mathcal{T} \subset T \subset \mathbb{R}^d, \tag{12.11}$$

с помощью которой определим *ядерное разбиение*

$$\mathcal{T}_\infty = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{T}[l] \tag{12.12}$$

пространства $\mathbb{R}^d$, обладающее в силу (10.36) свойством

$$\mathcal{T}_\infty / \mathbb{Z}^d = \mathcal{T}. \tag{12.13}$$

Следовательно, $\mathcal{T}_\infty$ является бесконечным периодическим разбиением пространства $\mathbb{R}^d$.

Теорема 12.2. *Пусть* $\mathcal{T}_\infty$ *– бесконечное разбиение* (12.12) *и* $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{l}}}$ *– центральная симметрия* (10.40) *пространства* $\mathbb{R}^d$ *с центром* $c_{\mathbf{l}} = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1} + \frac{1}{2}\mathbf{l}$ *и произвольным вектором* $\mathbf{l}$ *решетки* $\mathbb{Z}^d$*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Отображение* $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{l}}}$ *сохраняет разбиение* $\mathcal{T}_\infty$

$$\mathrm{o}_{c_{\mathbf{l}}}\colon\ \mathcal{T}_\infty \ \longrightarrow\ \mathcal{T}_\infty \tag{12.14}$$

и представляет собою центральную симметрию данного разбиения.

2. *Центры симметрии разбиения* $\mathcal{T}_\infty$ *образуют периодическое множество* C_∞*, определенное в* (10.45).

Доказательство. Следуем той же схеме, что и в теореме 10.2, с заменой изоморфизма (10.39) на изоморфизм разбиений (12.13). □

12.3. Трансляционная квазиинвариантность ядерных разбиений тора. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ – ядерное разбиение (3.23) тора $\mathbb{T}^d$, $\mathbf{Kr} = \mathbf{T}$ – его ядро, являющееся перекладывающейся разверткой (3.18) малого тора $\mathbb{T}^d_L \subset \mathbb{T}^d$, определенного в (3.19). Напомним, векторами перекладывания развертки $\mathbf{T}$ являются векторы ядерной звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). Оказывается, что кроме описанных в теореме 12.1 симметрий, ядерное разбиение $\mathcal{T}$ обладает еще одним инвариантным свойством.

Предложение 12.1. 1. *Имеет место равенство следующих разбиений*

$$S\mathcal{T} = \mathcal{T}'. \tag{12.15}$$

Здесь S – сдвиг (2.13) тора $\mathbb{T}^d$,

$$\mathcal{T}' = (\mathcal{T} \setminus \mathbf{Kr}) \sqcup \mathbf{Kr}' \tag{12.16}$$

– новое разбиение тора $\mathbb{T}^d$ с ядром

$$\mathbf{Kr}' = S'\mathbf{Kr} = (\mathbf{T}_0 + \mathbf{v}_0) \sqcup (\mathbf{T}_1 + \mathbf{v}_1) \sqcup \cdots \sqcup (\mathbf{T}_d + \mathbf{v}_d), \tag{12.17}$$

получающаяся перекладыванием S' из (2.4) развертки $\mathbf{Kr} = \mathbf{T}$ тора $\mathbb{T}^d_L \subset \mathbb{T}^d$ на векторы ядерной звезды $\mathbf{v}$.

2. *Ядра $\mathbf{Kr}'$ и $\mathbf{Kr}$ представляют собою один и тот же параллелоэдр*

$$\mathbf{Kr}' = \mathbf{Kr}, \tag{12.18}$$

допускающий различные разбиения (3.18) и (12.17): одно преобразуется из другого перекладыванием S' составляющих их параллелепипедов $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_d$. Таким образом, сдвиг S ядерного разбиения $\mathcal{T}$ сводится к перекладыванию S' его ядра $\mathbf{Kr}$.

Доказательство. 1. Разобъем исходное разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^- \sqcup \mathcal{T}^+ \tag{12.19}$$

на два разбиения

$$\mathcal{T}^- = \mathcal{T}_0^- \sqcup \mathcal{T}_1^- \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d^-, \tag{12.20}$$

где

$$\mathcal{T}_k^- = \mathcal{T}_k^-(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 2}(\mathbf{T}_k) \tag{12.21}$$

— усеченная орбита параллелепипеда $\mathbf{T}_k$ относительно действия сдвига S, и

$$\mathcal{T}^+ = S^{\mathbf{m}_0 - 1}(\mathbf{T}_0) \sqcup S^{\mathbf{m}_1 - 1}(\mathbf{T}_1) \sqcup \cdots \sqcup S^{\mathbf{m}_d - 1}(\mathbf{T}_d). \tag{12.22}$$

Действуя сдвигом S на равенство (12.19) получаем

$$S\mathcal{T} = S\mathcal{T}^- \sqcup S\mathcal{T}^+. \tag{12.23}$$

При этом

$$S\mathcal{T}^- = \mathcal{T} \setminus \mathbf{Kr}, \tag{12.24}$$

так как согласно (12.21)

$$S\mathcal{T}_k^- = S^1\mathbf{T}_k \sqcup S^2(\mathbf{T}_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 1}(\mathbf{T}_k), \tag{12.25}$$

и по (3.18)

$$\mathbf{Kr} = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{T}_d. \tag{12.26}$$

Второе слагаемое в (12.23), принимая во внимание (12.22), имеет вид

$$S\mathcal{T}^{+} = S^{\mathbf{m}_0}(\mathbf{T}_0) \sqcup S^{\mathbf{m}_1}(\mathbf{T}_1) \sqcup \cdots \sqcup S^{\mathbf{m}_d}(\mathbf{T}_d) \qquad (12.27)$$

и по определению (12.17) совпадает с ядром $\mathbf{Kr}'$. Отсюда, (12.23) и (12.24) получаем равенство разбиений (12.15).

2. Равенство (12.18) следует из формулы индуцирования (2.25). □

Свойство (12.15) означает трансляционную квазиинвариантностью ядерных разбиений тора $\mathcal{T}$ относительно действия сдвига S. Оно является фундаментальным свойством ядерных разбиений. Далее, имея ввиду данное свойство, будем говорить, что ядерные разбиения $\mathcal{T}$ S-*инвариантны* (shift-invariant).

12.4. Квазисимметрии ядерных разбиений тора. Из (2.13) и (10.17) следует формула

$$S \cdot \mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1}} = \mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}}, \qquad (12.28)$$

где справа стоит центральная симметрия тора $\mathbb{T}^d$ с центром в точке $c = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}$. Используя формулу (12.28), по теореме 12.1 и предложению 12.1 последовательно получаем

$$\mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}}\mathcal{T} \ = S(\mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1}}\mathcal{T}) \ = S\mathcal{T} \ = \mathcal{T}'. \qquad (12.29)$$

Из (12.29) и определения (12.26) ядра $\mathbf{Kr}$ следует равенство

$$\mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}}\mathbf{Kr} = \mathbf{Kr}', \qquad (12.30)$$

так как

$$\mathrm{o}_{\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}}(x_0) \ \equiv x_{\mathbf{m}} \bmod \mathbb{Z}^d. \qquad (12.31)$$

Напомним, что (12.29) и (12.30) – это равенства разбиений множеств, а не только самих множеств.

Теорема 12.3. *Пусть $\mathcal{T}'$ – разбиение* (12.16) *тора $\mathbb{T}^d$ с ядром $\mathbf{Kr}'$ из* (12.17)*, получающееся из ядерного разбиения $\mathcal{T}$ перекладыванием его ядра $\mathbf{Kr}$; и пусть o_c – центральная симметрия тора $\mathbb{T}^d$ с центром $c = c_{\mathbf{e}}$ в любой из точек множества*

$$C_{\mathbf{m}} = \Big\{c_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}} + \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} \in E\Big\}, \qquad (12.32)$$

где $E = (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d$ – аддитивная подгруппа тора $\mathbb{T}^d$ порядка $\sharp E = 2^d$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Имеют место равенства следующих разбиений*

$$\mathrm{o}_c\mathcal{T} \ = \mathcal{T}' \qquad (12.33)$$

и

$$\mathrm{o}_c\,\mathbf{Kr} = \mathbf{Kr}'. \tag{12.34}$$

2. *Центральные симметрии* $\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}}$ *и* $\mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}'}}$ *для любых центров* $c_\mathbf{e}$, $c_{\mathbf{e}'}$ *из множества* $C_\mathbf{m}$, *где* $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}' \in E$, *представляют собою одно и то же преобразование*

$$\mathrm{o}_{c_\mathbf{e}} = \mathrm{o}_{c_{\mathbf{e}'}} \tag{12.35}$$

тора $\mathbb{T}^d$.

3. *Относительно* o_c *любой центр* $c_\mathbf{e}$ *из* $C_\mathbf{m}$ *является неподвижной точкой*

$$\mathrm{o}_c(c_\mathbf{e}) = c_\mathbf{e} \tag{12.36}$$

и, как следствие, выполняется инвариантность

$$\mathrm{o}_c\,C_\mathbf{m} = C_\mathbf{m} \tag{12.37}$$

множества центров (12.32).

Доказательство. Для центров $c = c_0$ равенства (12.33) и (12.34) были доказаны ранее в (12.29) и (12.30). Общий случай $c = c_\mathbf{e}$ и равенства (12.35), (12.36) доказываются, как в теореме 12.1. □

Согласно равенству (12.33) ядерное разбиение $\mathcal{T}$ почти сохраняется под действием центральных симметрий o_c тора $\mathbb{T}^d$ с центрами $c \in C_\mathbf{m}$. “Почти” означает, что при отображении o_c все параллелепипеды, составляющие разбиение $\mathcal{T}$, переходят друг в друга. Исключение составляют лишь параллелепипеды $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_d$ ядра $\mathbf{Kr}$, которые под действием o_c перекладываются, образуя то же самое множество $\mathbf{Kr}' = \mathbf{Kr}$, но уже с другой укладкой параллелепипедов $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1, \ldots,$ $\mathbf{T}_d$. По этой причине будем говорить, что отображения o_c для $c \in C_\mathbf{m}$ являются *квазисимметриями*.

Следствие 12.1. 1. *Ядерное разбиение* $\mathcal{T}$ *имеет* 2^d *различных центров симметрии* $c \in C_{\mathbf{m}-1}$ *и столько же различных центров квазисимметрии* $c^* \in C_\mathbf{m}$, *при этом*

$$C_{\mathbf{m}-1} \cap C_\mathbf{m} = \varnothing. \tag{12.38}$$

2. *Центральные симметрии* o_c, o_{c^*} *и сдвиг* S *тора* $\mathbb{T}^d$ *связаны соотношениями*

$$\mathrm{o}_{c^*} \cdot \mathrm{o}_c = S, \quad \mathrm{o}_c \cdot \mathrm{o}_{c^*} = S^{-1}. \tag{12.39}$$

Доказательство. 1. В силу теорем 12.1 и 12.3 проверить нужно только равенство (12.38). Допустим, что для некоторых центров $c = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}-1} + \mathbf{e}$ и $c^* = \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}} + \mathbf{e}^*$ соответственно из множеств $C_{\mathbf{m}-1}$ и $C_{\mathbf{m}}$ выполняется сравнение

$$c \equiv c^* \bmod \mathbb{Z}^d \tag{12.40}$$

и, значит, будет выполняться еще одно сравнение

$$x_{\mathbf{m}-1} \equiv x_{\mathbf{m}} \bmod 2\mathbb{Z}^d. \tag{12.41}$$

По определению (2.27) имеем $x_j = S^j(0)$. Поэтому из (12.41) выводим

$$x_1 \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}^d. \tag{12.42}$$

Поскольку $x_1 \equiv \alpha \bmod \mathbb{Z}^d$, то $x_1 = \alpha + l$ для некоторого вектора $l \in \mathbb{Z}^d$. Подставляя данное выражение в (12.43) получаем сравнение

$$\alpha \equiv -l \bmod 2\mathbb{Z}^d, \tag{12.43}$$

противоречащее условию иррациональности (1.3) вектора α.

2. Соотношения (12.39) вытекают из формулы (12.28) и равенств (12.1), (12.35). □

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Локальная структура ядерных разбиений.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **502** (2021), 32–73.
2. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
3. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
4. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
5. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
6. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), No. 2, 89–122.
7. Н. Н. Мануйлов, *Число попаданий точек последовательности $\{n\tau_g\}$ в полуинтервал.* — Чебышевский сборник. Тула: Изд. ТГПУ **5** (2004), Вып. 3, 72–81.
8. G. Rauzy, *Nombres algébriques algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
9. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Записки научных семинаров ПОМИ **322** (2005), 83–106.
10. В. Г. Журавлев, *Параметризация двумерного квазипериодического разбиения Рози.* — Алгебра и анализ **22** (2010), No. 4, 21–56.
11. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.

12. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
13. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
14. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
15. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* — Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius, 2007, 240–254.
16. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
17. Ф. Харари, *Теория графов*, Изд-во Мир, 1973.
18. Р. Басакер, Т. Саати, *Конечные графы и сети*, Изд-во Наука, 1974.
19. Г. Коксетер, У. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп*, Изд-во Наука, 1980.

Zhuravlev V. G. Symmetries structure of karyon tilings.

In this article, we study the symmetry properties of the karyon tilings $\mathcal{T}$ of the torus $\mathbb{T}^d$ of arbitrary dimension d. Its main results are the following statements:

1) The tilings $\mathcal{T}$ are translation invariant relative to the canonical shift S of the torus $\mathbb{T}^d$. This is a fundamental property of the karyon tilings.

2) Nondegenerate karyon tilings $\mathcal{T}$ have 2^d central symmetries.

Владимирский государственный
университет, 600024, Владимир,
ул. Строителей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 31 марта 2021 г.