Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 502, 2021 г.

В. Г. Журавлев

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

Рассматриваются ядерные разбиения $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ произвольной размерности d, важные для приложений к многомерным цепным дробям [1–4]. Прототипом таких разбиений являются одномерные разбиения Фибоначчи [5,6] и их двумерный аналог – разбиения Рози [7–9]. Настоящим же источником появления разбиений $\mathcal{T}$, по-видимому, можно все же считать многомерные множества ограниченного остатка [10,11].

Из попытки научиться делить или дифференцировать множества ограниченного остатка появились [1] индуцированные разбиения тора $\mathbb{T}^d$, которые в дальнейшем приняли устоявшееся название "ядерных разбиений", поскольку, зная только ядро **Kr** такого разбиения $\mathcal{T}$, можно восстановить и все разбиение целиком.

В данной статье исследуются локальные свойства ядерных разбиений $\mathcal{T}$. Материал статьи излагается в следующей последовательности.

§1. Унимодулярный базисный симплекс.

§2. Звезды и их производные.

§3. Индуцированные разбиения тора.

§4. Производные звезды и производные разбиения тора произвольного порядка.

§5. Орбиты параллелепипедов и звезды.

§6. Вырожденные и невырожденные разбиения тора.

§7. Классификация разбиений тора по многогранным звездам.

§8. Симметрии многогранных звезд и интервалы критических значений (критические интервалы).

§9. Лучевые звезды.

§10. Классификация разбиений тора по лучевым звездам.

§11. Связь между лучевыми и многогранными звездами.

Ключевые слова: ядерные разбиения тора, классификация, симметрии, комбинаторика, локальные правила.

Производные звезды, лучевые и многогранные звезды, критические интервалы – основные рабочие понятия. В работе используется метод квантования звезд, опирающийся на правила максимума для ядерных параллелепипедов и лучей. Суть указанных правил состоит в том, что задача о многогранной звезде в произвольной вершине x_n ядерного разбиения $\mathcal{T}$ эквивалентна попаданию номера вершины n в некоторый явным образом определенный координационный интервал.

§1. Унимодулярный базисный симплекс

1.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \ldots, 0), \; e_1 = (1, \ldots, 0), \; \ldots, \; e_d = (0, \ldots, 1) \tag{1.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть, как обычно, $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ обозначает *унимодулярную группу порядка* $d+1$, состоящую из целочисленных квадратных $(d+1)\times(d+1)$-матриц с определителем ± 1. Выделим в группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$, образованную матрицами вида

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и L – произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{1.3}$$

при этом α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\textit{числа} \;\; 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \;\; \textit{линейно независимы над кольцом} \;\; \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

1.2. Центрированный унимодулярный симплекс.

Предложение 1.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in (\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}, \tag{1.5}$$

где $(\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}$ обозначает внутреннюю часть симплекса $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. см. [12]. □

Построенный в предложении 1.1 симплекс $\triangle = \triangle_U^d$ обладает следующими свойствами:

1) точка α содержится внутри $\triangle^{\mathrm{int}}$ симплекса $\triangle$;

2) векторы, выходящие из одной из вершин симплекса $\triangle$ во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис d-мерной кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Любой симплекс $\triangle$, удовлетворяющий этим двум свойствам, будем называть *центрированным унимодулярным симплексом*, точнее – *центрированным точкой α*. Чтобы отличать симплексы $\triangle_U^d$ из (1.5) от других используемых далее унимодулярных симплексов $\triangle$, будем $\triangle_U^d$ называть *общими базисными симплексами.* Здесь эпитет "базисный" означает, что симплексы $\triangle = \triangle_U^d$ будут выбираться в качестве основы на первом шаге некоторого алгоритма, генерирующего бесконечную последовательность центрированных унимодулярных симплексов $\triangle, \triangle', \triangle'', \ldots$, диаметры которых стремятся к 0.

Свойство унимодулярности симплекса $\triangle$ можно переформулировать в более симметричной форме. Пусть

$$\operatorname{ver}\triangle = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\} \tag{1.6}$$

– множество вершин симплекса $\triangle$. Обозначим через

$$S_\triangle = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \ldots & v_d \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

матрицу симплекса $\triangle$, представляющую собою квадратную матрицу порядка $d+1$, в первой строке которой стоят столбцы из координат вершин v_i симплекса $\triangle$. В [12] доказан следующий

Критерий унимодулярности симплекса. *Симплекс $\triangle$ будет унимодулярным тогда и только тогда, когда матрица симплекса* (1.7) *будет унимодулярной, т.е. принадлежащей группе* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

§2. Звезды и их производные

2.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \ldots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{2.1}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$.

Определение 2.1. Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \cdots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}}; \quad \lambda_{k'_1}, \ldots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{2.2}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ назовем *звездой*, если для всех дополнительных (2.1) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (2.2) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 2.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_d v_d; \quad \lambda_0 + \cdots + \lambda_d \leqslant 1,\ \lambda_0, \ldots, \lambda_d \geqslant 0\}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (2.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{2.4}$$

2.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{2.5}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1^{\mathrm{int}} \cap X_2^{\mathrm{int}} = \emptyset$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 2.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Предположим, что для некоторого сочетания* $\sigma=\{k_1,k_2\}$ *из* Σ *сумма векторов* $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ *звезды* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *не принадлежит плоскости* $H_{\sigma'}$ *из* (2.2), *где* σ' *– дополнительное сочетание* (2.1) *для* σ. *Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{2.6}$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{2.7}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

□

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (2.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 2.2. Обозначим через

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{2.8}$$

то множество векторов из (2.6), которое является звездой. Если существуют множества векторов v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, т.е. для всех σ выполняется условие леммы 2.1, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *нерывождена*.

Таким образом, согласно определению 2.2 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \ \xrightarrow{\sigma}\ v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \tag{2.9}$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (2.7), и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \ \text{ для всех } \ k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (2.9) назовем *производной* (σ-*производной*) нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания

$\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной (2.9) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^{\sigma} = v^{\{k_1,k_2\}}. \tag{2.10}$$

По определению (2.9) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1,k_2\}} = v^{\{k_2,k_1\}}.$$

Поэтому для нерывожденной звезды v существуют

$$C^2_{d+1} = \frac{(d+1)d}{2} \tag{2.11}$$

ее производных звезд v^{σ}.

§3. Индуцированные разбиения тора

3.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \tag{3.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \dots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \dots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L\colon\ x \mapsto x \bmod L \tag{3.2}$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d \tag{3.3}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T \,:\, S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{3.4}$$

на векторы $v_0, v_1, \dots, v_D$, связанные с базисом (3.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \ \text{ для } \ k = 1, \dots, d. \tag{3.5}$$

В формуле (3.4) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (3.3), где $k = 0, 1, \dots, d$.

Заметим, что при переходе (3.5) от векторов переклыдывания v_0, $v_1, \dots, v_d$ к базизу $l_1, \dots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{3.6}$$

В частности, из равенств (3.5) и (3.6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (3.4) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T \,:\, S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{3.7}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

3.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\bar{T}_m = \ \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; \quad 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{3.8}$$

где $k_1, \dots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (см. определение 2.1), то объединение

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \dots \cup \bar{T}_d \tag{3.9}$$

параллелепипедов (3.8) образует *параллелоэдр* [10,11] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \bar{T}[l] \tag{3.10}$$

с помощью параллельных переносов $\bar{T}[l] = \bar{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\bar{T}[l]$ из (3.10) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (2.5).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\bar{T}$ из (3.8) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбododекаэдром Федорова [13], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [14].

По *i-алгоритму* из [10] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\bar{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\text{int}} = (\bar{T})^{\text{int}}$

такую же, как и параллелоэдр (3.9), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{l \in L} T[l] \tag{3.11}$$

в строгом смысле (2.5), т.е. в (3.11) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \emptyset$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (3.11) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$.

Исходя из i-алгоритма, можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \ \ v_0 \in T_1, \ \ v_0 + v_1 \in T_2, \ \ldots, \ v_0 + v_1 + \cdots + v_{d-1} \in T_d. \tag{3.12}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (3.12), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d, \tag{3.13}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания v_0, v_1, $\ldots, v_d$ в (3.4).

3.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \colon x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{3.14}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

3.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 3.1. Перекладывающаяся развертка T из (3.3) *вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.15}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является *$\mathcal{L}$-различимым*, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \overrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L} \colon \ \ x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{3.16}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (3.16) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.17}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2. Векторы перекладывания (3.4) имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{3.18}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$, называемыми *порядками* векторов v_k.

3. Пусть

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k); \quad j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{3.19}$$

обозначает *орбиту* подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (3.17) будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению считается, что орбиты (3.19) удовлетворяют условию

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \emptyset \tag{3.20}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (3.19) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k); \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{3.21}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (3.14) *иррациональным*, определяемым аналогично (1.4), т.е. когда

$$\textit{числа } 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \textit{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{3.22}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 3.1. *Пусть развертка T вкладывается* (3.15) *в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α для сдвига $S = S_\alpha$ из* (3.14) *будет иррациональным* (3.22). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset \tag{3.23}$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{3.24}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (3.21).

Доказательство. Приведено в [1]. □

Сумма

$$m = m_0 + m_1 + \cdots + m_d. \tag{3.25}$$

порядков m_k всех векторов v_k из (3.18) называется *порядком* разбиения тора $\mathcal{T}$.

3.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 3.1 следует, что сдвиг тора $S'\colon T \longrightarrow T$ из (3.7) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S\colon \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (3.14), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{3.26}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{3.27}$$

соответственно развертку T из (3.3), (3.13) и *индуцированное разбиение* (3.24) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [8, 15]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$. Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{3.28}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (3.14), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{3.29}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (3.29) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_L$, а индуцированное отображение (3.28) изоморфно сдвигу этого тора.

3.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 3.2. *Определенная в* (3.13) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (3.15) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений*:

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (3.27) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$;

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0,m) = \{x_j = S^j(0);\ \ j = 1,2,\ldots,m-1\} \tag{3.30}$$

порядка m*, определенного в* (3.25).

Доказательство. см. [1]. □

Чтобы не вводить новые термины, число m из (3.25) будем также называть и *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 3.2.

3.7. Производные вкладывающихся звезд.

Определение 3.2. Пусть $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (3.27) тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.31}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Теорема 3.3. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *вкладывается* (3.31) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (3.22) *вектором* α*. Тогда любая ее* σ*-производная* $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}$ *для* $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.32}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

Доказательство. см. [1]. □

§4. Производные звезды и производные разбиения тора произвольного порядка

4.1. Тотальная дифференцируемость звезд. Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \tag{4.1}$$

– множество всех последовательностей

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}, \tag{4.2}$$

состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ. Обозначим через

$$[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \tag{4.3}$$

первые n членов последовательности (3.4), при этом считаем, что $[\xi]_0 = \emptyset$. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ определим последовательность $[\xi]_n$-*производных*, полагая

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \tag{4.4}$$

где

$$v^{[\xi]_0} = v. \tag{4.5}$$

И более обще

$$v^{\xi} = \{v^{[\xi]_0}, v^{[\xi]_1}, v^{[\xi]_2}, \dots\} \tag{4.6}$$

– бесконечная последовательность $[\xi]_n$-производных. Скажем, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будет $[\xi]_n$-*дифференцируемой* (соответственно ξ-*дифференцируемой*), если существует ее производная (4.4) порядка n (соответственно – существуют производные из (4.6) всех порядков $n = 0, 1, 2, \dots$) Если существуют производные v^{ξ} для всех дифференцирований $\xi \in \Xi$, то будем говорить, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *тотально дифференцируема*.

Далее, чтобы избежать случаев вырождения, сосредоточимся исключительно на иррациональных (1.4) векторах сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Для произвольных торов $\mathbb{T}^d_L$ определение иррациональности вектора сохраняется (3.22). Нужно лишь числа $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ рассматривать как координаты вектора α в произвольном базисе решетки L.

Теорема 4.1. *Пусть звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ вкладывается* (3.10) *в тор $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d$ на иррациональный* (3.22) *вектор α, и пусть ξ – произвольная последовательность дифференцирований из множества Ξ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *звезда* v *будет тотально дифференцируема;*

2) *любая* $[\xi]_n$*-производная* $v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, \dots, v_d^{[\xi]_n}\}$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \dots$ *также вкладывается*

$$v^{[\xi]_n} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{4.7}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d$ *относительно сдвига* S.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [2] для размерности $d = 2$ и в [3] для произвольной размерности d. Второе утверждение вытекает из теоремы 3.3. □

4.2. Производные разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_n}$ тора $\mathbb{T}^d$. Далее будем предполагать вектор α иррациональным (3.22). В предложении 1.1 вместо α выберем вектор $\alpha_- = -\alpha$. Тогда согласно (1.5) имеем

$$\alpha_- \in \triangle^{\mathrm{int}} \tag{4.8}$$

для некоторого унимодулярного симплекса $\triangle = \triangle_U^d = U\triangle_e^d$, центрированного точкой α_-. Выберем $\triangle$ в качестве базисного симплекса.

Обозначим через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ вершины симплекса $\triangle$. Указанным вектору α_- и симплексу $\triangle$ отвечает звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ с лучами

$$v_k = \varepsilon_k - \alpha_- = \alpha + \varepsilon_k \tag{4.9}$$

для $k = 0, 1, \dots, d$, причем ε_k – такие точки решетки $\mathbb{Z}^d$, что их разности

$$l_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \ \dots, \ l_d = \varepsilon_d - \varepsilon_0 \tag{4.10}$$

образуют базис решетки $\mathbb{Z}^d$. По теореме 4.1 звезда v будет бесконечно дифференцируемой.

Фиксируем звезду v с лучами (4.9), произвольную последовательность дифференцирований $\xi \in \Xi$ и порядок $n = 1, 2, 3, \dots$ Обозначим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} = v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, \dots, v_d^{[\xi]_n}\} \tag{4.11}$$

– $[\xi]_n$-производную звезду для v. Используя определение (3.31) не трудно проверить, что звезда v вкладывается

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{4.12}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Поэтому по теореме 4.1 производная звезда $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ снова вкладывается

$$\mathbf{v} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{4.13}$$

в тор $\mathbb{T}^d$ относительно того же сдвига S.

В силу определения производной звезды (2.8) можем записать

$$\mathbf{v} = U_n v. \tag{4.14}$$

Здесь звезды $\mathbf{v}$ и v представлены в виде столбцов

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

и

$$U_n = U^{[\xi]_n} \tag{4.16}$$

– унимодулярная матрица размера $d+1$, обладающая свойствами:

1) элементы матрицы U_n неотрицательны;

2) сумма элементов в каждой строке матрицы U_n положительна.

Так как согласно (4.9) имеем матричное представление

$$v = m\alpha + \varepsilon = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_d \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

и аналогично –

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}\alpha + \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_d \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

то из (4.14) и иррациональности (1.4) вектора α выводим формулы

$$\mathbf{m} = U_n m, \quad \mathbf{e} = U_n \varepsilon. \tag{4.19}$$

Если воспользоваться поэлементной записью, то из (4.19) следует, что звезда $\mathbf{v}$, определенная в (4.11), имеет лучи

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{m}_k \alpha + \mathbf{e}_k, \tag{4.20}$$

где $\mathbf{m}_k$ – целые положительные коэффициенты и векторы $\mathbf{e}_k$ имеют целые координаты для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Отсюда получаем сравнения

$$\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^d. \tag{4.21}$$

Обозначим общую сумму коэффициентов в (4.20) через

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_d \tag{4.22}$$

и назовем ее *порядком* звезды $\mathbf{v}$.

Предложение 4.1. *Пусть* α *– иррациональный вектор* (1.4) *и* $\xi=\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ *– произвольная последовательность дифференцирований* (4.2) *из множества* $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. *Тогда* $[\xi]_n$*-производная звезда* $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} = v^{[\xi]_n}$ *из* (4.11) *любого порядка* $n = 0, 1, 2, \dots$ *состоит из лучей* $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$, *линейно независимых над полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$.

Доказательство. 1. Сначала проверим линейную независимость лучей начальной звезды $\mathbf{v} = v^{[\xi]_0} = v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$. В силу (4.9) и (4.10) указанные лучи можно заменить эквивалентной системой векторов $\{\alpha, l_1, \dots, l_d\}$. Из условия иррациональности (1.4) вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ вытекает иррациональность всех его координат α_k, а остальные векторы $l_1, \dots, l_d$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^d$ и, значит, они линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Отсюда убеждаемся, что система векторов $\{\alpha, l_1, \dots, l_d\}$ линейно независима над $\mathbb{Q}$.

2. Теперь рассмотрим случай звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} = v^{[\xi]_n}$ произвольного порядка n. Согласно (4.14) и (4.16) звезды $v = v^{[\xi]_0}$ и $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ связаны между собою невырожденным линейным рациональным преобразованием с унимодулярной матрицей U_n. Поэтому согласно первой части доказательства лучи звезды $\mathbf{v}$ также линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. $\square$

4.3. Производная развертка ядра. Звезде $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ из (4.11) соответствует перекладывающаяся развертка

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]_n} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbf{T}_d \tag{4.23}$$

малого тора

$$\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L \ \subset \ \mathbb{T}^d \tag{4.24}$$

с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d]$ – полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом

$$l_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \ \dots, \ l_d = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_0. \tag{4.25}$$

Напомним, что параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (4.23) порождается векторами $\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \tag{4.26}$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$. Множество векторов

$$\mathrm{Sk}_k = \{\mathbf{v}_i; \ i \in \mathcal{D}_k\} \tag{4.27}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$. Остов Sk_k порождает параллелепипед $\mathbf{T}_k$ и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Рассмотрим $[\xi]_n$-производное разбиение

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(v^{[\xi]_n}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) \tag{4.28}$$

тора $\mathbb{T}^d$, которое согласно (3.27) можно записать в развернутом виде

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d(\mathbf{v}). \tag{4.29}$$

Здесь

$$\mathcal{T}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 1}(\mathbf{T}_k) \tag{4.30}$$

– орбитное разбиение, составленное из S-сдвигов параллелепипеда $\mathbf{T}_k$ из развертки (4.23), или *орбита* параллелепипеда $\mathbf{T}_k$.

Производная развертка (4.23) является *ядром* (karyon)

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}(\mathbf{v})) \tag{4.31}$$

$[\xi]_n$-производного разбиения тора (4.28), поэтому такие разбиения называются *ядерными* (примеры других ядерных разбиений см. [15–17]). Само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ порождается звездой $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (4.11). По этой причине $\mathbf{v}$ будем называть *ядерной звездой*.

Определенное в (4.22) понятие порядка $\mathbf{m}$ звезды $\mathbf{v}$ перенесем как на само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$, так и на порождаемое звездой $\mathbf{v}$ разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. Наконец, определим еще конечную орбиту

$$\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d;\quad j = 0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\} \tag{4.32}$$

начальной точки $x_0 = 0$ на торе $\mathbb{T}^d$.

§5. Орбиты параллелепипедов и звезды

5.1. Вершины параллелепипедов. Согласно определениям (3.8) и (4.11) параллелепипед $\mathbf{T}_k$ имеет следующие *вершины*

$$\mathrm{Ver}_k = \mathrm{Ver}\,\mathbf{T}_k = \{\mathbf{v}_\mathbf{i};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \tag{5.1}$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (4.26), и

$$\mathbf{v}_\mathbf{i} = \mathbf{v}_{i_1} + \cdots + \mathbf{v}_{i_\iota}. \tag{5.2}$$

При этом в (5.1) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \emptyset$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем

$$\mathbf{v}_\emptyset = 0. \tag{5.3}$$

Таким образом, по определению $\iota = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому каждый параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (4.23) имеет число вершин

$$\sharp \mathrm{Ver}_k = 2^d. \tag{5.4}$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед $\mathbf{T}_k$ с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$.

5.2. Орбиты вершин параллелепипедов. Аналогично (3.21) определим *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) = \ \{S^j(\mathrm{Ver}_k); \quad j \in \mathcal{M}_k\}. \tag{5.5}$$

всех вершин (5.1) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, где $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$. Согласно (5.2) вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$ с мультииндексом $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ имеет *порядок*

$$\mu_\mathbf{i} = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i} = \mathbf{m}_{i_1} + \cdots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{5.6}$$

Если $\mathbf{i} = \emptyset$, то в силу (5.3) порядок равен

$$\mu_\emptyset = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\emptyset = 0. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что вершина

$$\mathbf{v}_\mathbf{i}^j = S^j(\mathbf{v}_\mathbf{i}) \ \in \ \mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) \tag{5.8}$$

будет иметь порядок

$$\mu_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\, \mathbf{v}_\mathbf{i} + j = \mu_\mathbf{i} + j, \tag{5.9}$$

где $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$ и $j \in \mathcal{M}_k$.

5.3. Многогранные звезды. Для любого порядка $n \in \mathcal{M}$, где

$$\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\},$$

обозначим через

$$\mathrm{St}(n) = \{\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j; \ \ \mathbf{v}_\mathbf{i}^j = x_n\} \tag{5.10}$$

многогранную звезду в точке $x_n = S^n(0)$ орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (4.32). Здесь

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}), \tag{5.11}$$

$\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$, $j \in \mathcal{M}_k$ и $k = 0, 1, \ldots, d$. Таким образом, звезда $\mathrm{St}(n)$ состоит из всех параллелепипедов

$$\mathbf{T}_k^j = S^j(\mathbf{T}_k), \tag{5.12}$$

входящих в разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (4.29) и имеющих общую вершину $x_n \in \mathbb{T}^d$. В этом смысле ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (4.31) является *ядерной многогранной звездой*

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0). \tag{5.13}$$

Используя обозначение (5.9), многогранную звезду (5.10) можно также определить следующим эквивалентным образом

$$\mathrm{St}(n) \quad = \{\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}; \quad \mu^j_{\mathbf{i}} = n\}. \tag{5.14}$$

§6. Вырожденные и невырожденные разбиения тора

6.1. Спектр разбиения. Для любого подмножества $\mathbf{i}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$ определим *критическое значение*

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \cdots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{6.1}$$

В частности, если $\mathbf{i} = \mathcal{D}$, то $\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_d$, и, следовательно,

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m} = \sharp\,\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) \tag{6.2}$$

равно (4.22) – порядку орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (4.32). Множество

$$\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}\} \tag{6.3}$$

назовем *спектром* разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (4.29). Скажем, что спектр Λ и само разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *невырождены*, если

$$\lambda_{\mathbf{i}} \neq \lambda_{\mathbf{j}} \text{ при условии } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \tag{6.4}$$

Приведем достаточное условие невырожденности разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. Для этого нам потребуется определить *радиус*

$$\varrho^{[\xi]_n} = \varrho(v^{[\xi]_n}) = \max_{0 \leqslant k \leqslant d} |\mathbf{v}_k| \tag{6.5}$$

звезды $v^{[\xi]_n} = \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (4.11) в *полиэдральной метрике*

$$|x| = |x_1| + \cdots + |x_d| \tag{6.6}$$

для $x = (x_1, \ldots, x_d)$ из $\mathbb{R}^d$.

Предложение 6.1. *Если радиус* (6.5) $[\xi]_n$*-производной звезды* $v^{[\xi]_n} = \mathbf{v}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varrho^{[\xi]_n} < \frac{1}{d+1}, \tag{6.7}$$

то определенное в (4.29) *разбиение тора* $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *невырождено.*

Доказательство. Проведем от противного, т.е. предположим

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}} \text{ для некоторых } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \tag{6.8}$$

По определению имеем

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \operatorname{ord} \mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \cdots + \mathbf{m}_{i_\iota}, \quad \lambda_{\mathbf{j}} = \operatorname{ord} \mathbf{v}_{\mathbf{j}} = \mathbf{m}_{j_1} + \cdots + \mathbf{m}_{j_\kappa} \tag{6.9}$$

для векторов

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v}_{i_1} + \cdots + \mathbf{v}_{i_\iota}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{j}} = \mathbf{v}_{j_1} + \cdots + \mathbf{v}_{j_\kappa}. \tag{6.10}$$

Рассматривая разность $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} - \mathbf{v}_{\mathbf{j}}$ векторов (6.10), можем считать, не уменьшая общности, выполненым условие $\mathbf{i} \cap \mathbf{j} = \emptyset$, т.е. в обеих суммах из (6.10) нет одинаковых лучей и, значит, $\iota + \kappa \leqslant d + 1$. Отсюда и условия (6.7) следуют неравенства

$$|\mathbf{v}_{\mathbf{i}} - \mathbf{v}_{\mathbf{j}}| < \frac{\iota + \kappa}{d+1} < 1. \tag{6.11}$$

Согласно (4.20) лучи, входящие в $\mathbf{v}_{\mathbf{i}}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{j}}$, имеют вид $\mathbf{v}_k = \mathbf{m}_k \alpha + \mathbf{e}_k$. Поэтому можем записать

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} - \mathbf{v}_{\mathbf{j}} = (\lambda_{\mathbf{i}} \alpha + \mathbf{e}_{\mathbf{i}}) - (\lambda_{\mathbf{j}} \alpha + \mathbf{e}_{\mathbf{j}}), \tag{6.12}$$

где аналогично (6.10) воспользовались сокращениями

$$\mathbf{e}_{\mathbf{i}} = \mathbf{e}_{i_1} + \cdots + \mathbf{e}_{i_\iota}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}} = \mathbf{e}_{j_1} + \cdots + \mathbf{e}_{j_\kappa}. \tag{6.13}$$

Из (6.12), (6.9) и предположения (6.8) следует представление разности векторов

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} - \mathbf{v}_{\mathbf{j}} = \mathbf{e}_{\mathbf{i}} - \mathbf{e}_{\mathbf{j}}. \tag{6.14}$$

В силу (4.20) и (6.13) разность $\mathbf{e}_{\mathbf{i}} - \mathbf{e}_{\mathbf{j}}$ представляет собою вектор с целыми координатами. Сопоставляя данный факт с полученной ренее оценкой (6.11) и определениями (6.10), убеждаемся в том, что выполняется соотношение

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} - \mathbf{v}_{\mathbf{j}} = \mathbf{v}_{i_1} + \cdots + \mathbf{v}_{i_\iota} - \mathbf{v}_{j_1} - \cdots - \mathbf{v}_{j_\kappa} = 0 \tag{6.15}$$

с условием $\mathbf{i} \cap \mathbf{j} = \emptyset$. Полученное равенство означает линейную зависимость лучей $[\xi]_n$-производной звезды $v^{[\xi]_n} = \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, что противоречит предложению 4.1. $\square$

6.2. Невырожденные разбиения. Предположим, что спектр Λ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ невырожден, т.е. выполнено условие (6.4). Таким образом, в невырожденном случае имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{D} \supset \ \mathbf{i} \ \Leftrightarrow \ \lambda_{\mathbf{i}} \ \in \Lambda \tag{6.16}$$

и, значит, в спектре Λ число различных элементов

$$\sharp\Lambda = 2^{d+1}. \tag{6.17}$$

Поэтому для существования невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ необходимо, чтобы его порядок $\mathbf{m}$ удовлетворял неравенству

$$\mathbf{m} \geqslant 2^{d+1}. \tag{6.18}$$

Введем на подмножествах $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$ *линейный порядок*

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{j}, \ \text{ если } \ \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{j}}. \tag{6.19}$$

Расположим критические значения $\lambda_{\mathbf{i}}$ из спектра Λ в порядке их возрастания

$$\lambda_{\emptyset} = 0 \ < \ \ldots \ < \ \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{i}'} \ < \ \ldots \ < \ \lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}. \tag{6.20}$$

Здесь через $\mathbf{i}^{'}$ обозначено подмножество из $\mathcal{D}$, непосредственно следующее за $\mathbf{i}$ относительно упорядочения (6.19). Последовательности (6.20) соответствует упорядоченная последовательность подмножеств $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$:

$$\emptyset \ \prec \ \ldots \ \prec \ \mathbf{i} \prec \mathbf{i}^{'} \ \prec \ \ldots \ \prec \ \mathcal{D}. \tag{6.21}$$

В соответствии с упорядочением (6.20) спектра Λ множество $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ можно разбить

$$\mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \Lambda_{\emptyset} \ \sqcup \cdots \sqcup \ \Lambda_{\mathbf{i}} \ \sqcup \ \Lambda_{\mathbf{i}'} \ \sqcup \ldots \tag{6.22}$$

на последовательные *координационные интервалы*

$$\Lambda_{\mathbf{i}} \ = \{\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}} + 1, \ldots, \lambda_{\mathbf{i}'} - 1\} \tag{6.23}$$

с мультииндексами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$. Укажем, что в разбиении (6.22) условие строгого включения $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ равносильно ограничению $\mathbf{i} \prec \mathcal{D}$. Поэтому, учитывая равенство (6.17), видим, что количество интервалов в разбиении (6.22) равно

$$\sharp\, \mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \sharp\Lambda - 1 = 2^{d+1} - 1. \tag{6.24}$$

Теорема 6.1. *Определенные в* (4.29) *невырожденные разбиения тора* $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *обладают следующими свойствами.*

1. *Для любой вершины* $x_n = S^n(0)$ *орбиты* $\mathrm{Orb}(0,\mathbf{m})$ *с номером* n *из* $\mathcal{M} = \{0,1,\ldots,\mathbf{m}-1\}$ *многогранная звезда* $\mathrm{St}(n)$ *с вершиной* x_n, *определенная в* (5.10), *состоит*

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d} \bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k} \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{M}_k\\ \mu_{\mathbf{i}}^j=n}} \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j \tag{6.25}$$

из многогранников $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, *получающихся* S*-сдвигами отмеченных параллелепипедов* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, *т.е. параллелепипедов* $\mathbf{T}_k$ *из* (4.23) *с выделенной вершиной* $\mathbf{v}_\mathbf{i}\in\mathrm{Ver}_k$. *Различные многогранники* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j$ *в разбиении* (6.25) *не имеют общих внутренних точек.*

2. *Если номера* n, $m\in\mathcal{M}$ *принадлежат одному координационному интервалу* $\Lambda_\mathbf{i}$ *из* (6.23), *то соответствующие многогранные звезды* $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ *эквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \ \sim\ \mathrm{St}(m), \tag{6.26}$$

т.е. одна звезда получается из другой параллельным сдвигом.

3. *Если же* $n\in\Lambda_\mathbf{i}$, $m\in\Lambda_\mathbf{j}$ *принадлежат различным координационным интервалам* $\Lambda_\mathbf{i}\neq\Lambda_\mathbf{j}$, *то отвечающие им звезды* $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ *неэквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \ \nsim\ \mathrm{St}(m). \tag{6.27}$$

Доказательство. 1. Представление (6.25) звезды $\mathrm{St}(n)$ непосредственно следует из определения многогранных звезд (5.10), поскольку условие $\mathbf{v}_\mathbf{i}^j = x_n$ равносильно равенству порядков $\mu_\mathbf{i}^j = n$, где $\mu_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\,\mathbf{v}_\mathbf{i}^j$ согласно (5.9). Утверждение о том, что многогранники $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j$ в разбиении (6.25) не имеют общих внутренних точек, вытекает из теоремы 3.1.

2. В орбите многогранников $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, где j принимает значения из множества $\mathcal{M}_k = \{0,1,\ldots,\mathbf{m}_k-1\}$, выделенная вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ согласно (5.9) имеет номера $\mu_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\,\mathbf{v}_\mathbf{i}^j = \mathrm{ord}\,\mathbf{v}_\mathbf{i} + j = \mu_\mathbf{i} + j$. Если воспользоваться критическими значениями $\lambda_\mathbf{i}$, определяемые по формуле (5.6), то из сказанного выше будет следовать, что вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ последовательно пробегает номера из отрезка натуральных чисел

$$\Lambda_{k,\mathbf{i}} = \{\lambda_\mathbf{i},\ \ \lambda_\mathbf{i}+1,\ \ \ldots,\ \ \lambda_\mathbf{i}+\mathbf{m}_k-1\}. \tag{6.28}$$

Поскольку $\mathbf{i} \cap \{k\} = \emptyset$, то $\lambda_{\mathbf{i}} + \mathbf{m}_k = \lambda_{\mathbf{j}}$ для подмножества $\mathbf{j} = \mathbf{i} \cup \{k\}$ из $\mathcal{D}$. Поэтому отрезок (6.28) представляет собою объединение

$$\Lambda_{k,\mathbf{i}} = \Lambda_{\mathbf{i}} \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}'} \sqcup \ldots \tag{6.29}$$

нескольких полных соседних интервалов $\Lambda_{\mathbf{i}}, \Lambda_{\mathbf{i}'}, \ldots$ из разбиения (6.22) множества $\mathcal{M}$. Отсюда выводим эквивалентность (6.26).

3. Согласно формуле (6.25) многогранная звезда $\mathrm{St}(n)$ с номером $n = \lambda_{\mathbf{i}}$, где $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$, содержит отмеченные параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} = \mathbf{T}^0_{k,\mathbf{i}} = S^0(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ для всех $k \notin \mathbf{i}$ и ни один из указанных параллелепипедов не включен в предыдущие звезды $\mathrm{St}(n)$ с номерами $n < \lambda_{\mathbf{i}}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}(n) \ \text{ для } \ n = \lambda_{\mathbf{i}}, \ \ k \notin \mathbf{i}; \\ &\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \notin \mathrm{St}(n) \ \text{ для } \ n < \lambda_{\mathbf{i}}, \ \ k \notin \mathbf{i}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Таким образом, для каждого собственного подмножества $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ многогранная звезда $\mathrm{St}(\lambda_{\mathbf{i}})$ является первой в упорядочении (6.20), содержащей отмеченные параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Из (6.30) и доказанной эквивалентности (6.26) вытекает свойство (6.27). □

Замечание 6.1. Если в каждой звезде $\mathrm{St}(\lambda_{\mathbf{i}})$ появляются (6.30) новые параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, то какие-то параллелепипеды должны исчезать из нее. Опишем выпадающие параллелепипеды. Пусть $k \in \mathbf{i}$. Для $j = \mathbf{m}_k - 1$ из множества $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$ по формуле (5.9) имеем

$$\mu^j_{\mathbf{i}\setminus\{k\}} = \lambda_{\mathbf{i}\setminus\{k\}} + j = \lambda_{\mathbf{i}\setminus\{k\}} + \mathbf{m}_k - 1 = \lambda_{\mathbf{i}} - 1. \tag{6.31}$$

Поэтому отмеченные параллелепипеды $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}})$ для $j \in \mathcal{M}_k$ содержатся в звездах $\mathrm{St}(n)$ с номерами $\lambda_{\mathbf{i}\setminus\{k\}} \leqslant n \leqslant \lambda_{\mathbf{i}} - 1$, но $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}}$ не содержатся в звезде $\mathrm{St}(n)$ с номером $n = \lambda_{\mathbf{i}}$. Схематично это можно записать так:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}} \in \mathrm{St}(n) \ \text{ для } \ \lambda_{\mathbf{i}\setminus\{k\}} \leqslant n \leqslant \lambda_{\mathbf{i}} - 1, \ \ k \in \mathbf{i}; \\ &\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}} \notin \mathrm{St}(n) \ \text{ для } \ n = \lambda_{\mathbf{i}}, \ \ k \in \mathbf{i}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Здесь опущен индекс j у параллелепипедов $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}\setminus\{k\}}$ и включения в (6.32) рассматриваются с точностью до параллельного сдвига.

6.3. Вырожденные разбиения тора. Разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ будет *вырожденым*, если его спектр Λ имеет кратности, т.е. существуют такие подмножества $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ из $\mathcal{D}$, что

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}}. \tag{6.33}$$

Напомним, что по определению (4.28) разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}^{[\xi]_n}$ является $[\xi]_n$-производным начального разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ из (3.27), представляющего собою вырожденное разбиение. Принимая во внимание предложение 6.1 можно заметить, что разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}^{[\xi]_n}$ остаются вырождеными только для малых значений порядков производных n, поэтому мы здесь не останавливаемся на них подробно. Укажем лишь, что в случае вырождения (6.33) некоторые интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}$ из (6.23) могут оказаться пустыми, а отсюда будет следовать отсутствие соответствующих типов многогранных звезд $\mathrm{St}(m)$ для $m \in \Lambda_{\mathbf{i}}$.

§7. Классификация разбиений тора по многогранным звездам

7.1. Типы многогранных звезд. Скажем, что многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$ и $\mathrm{St}(m)$ принадлежат одному *типу*, если они эквивалентны (6.26). По теореме 6.1 и формуле (6.24) невырожденные разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ содержат

$$\sharp\, \mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1 \tag{7.1}$$

различных типов многогранных звезд, где через St_d обозначено множество всех типов. Каждому типу звезд отвечает свой интервал $\Lambda_{\mathbf{i}}$ в разбиении (6.22). Поэтому типы звезд разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ допускают следующую *параметризацию*

$$\mathrm{St}(\emptyset),\ \ \ldots,\ \ \mathrm{St}(\mathbf{i}),\ \ \mathrm{St}(\mathbf{i}'),\ \ \ldots \tag{7.2}$$

собственными подмножествами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$.

7.2. Семейства разбиений тора. В упорядоченной последовательности (6.21) всех подмножеств $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$ каждому $\mathbf{i}$ отвечает

$$\sigma(\mathbf{i}) = i \tag{7.3}$$

– его *порядковый номер*

$$i \ \in\ \mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, 2^{d+1}\}. \tag{7.4}$$

Таким образом, отображение (7.3) задает *подстановку*

$$\sigma\colon\ 2^{\mathcal{D}}\ \to\ \mathcal{I} \tag{7.5}$$

– биекцию между множеством всех подмножеств $2^{\mathcal{D}}$ из $\mathcal{D}$ и множеством $\mathcal{I}$ из (7.4).

Скажем, что два разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{w})$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ одной и той же размерности d связаны соотношением

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) \ \sim \ \mathcal{T}(\mathbf{w}), \tag{7.6}$$

если выполняется равенство

$$\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{v})}(\mathbf{i}) = \sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{w})}(\mathbf{i}) \tag{7.7}$$

для всех $\mathbf{i} \in 2^{\mathcal{D}}$. Здесь через $\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{v})}$ и $\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{w})}$ обозначены подстановки (7.5), отвечающие соответственно разбиениям $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{w})$. При выполнении условия (7.6) будем говорить, что разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{w})$ принадлежат $\mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathcal{T}(\mathbf{w}) \in \mathcal{F}^{\mathrm{St}}$ одному *семейству (family)* $\mathcal{F}^{\mathrm{St}}$. Если разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathbf{w})$ принадлежат одному семейству $\mathcal{F}^{\mathrm{St}}$, то их многогранные звезды $\mathrm{St}_{\mathcal{T}}(\lambda_{\mathbf{i}})$ и $\mathrm{St}_{\mathcal{T}'}(\lambda'_{\mathbf{i}})$ имеют один и тот же *комбинаторный тип*, т.е. изоморфные графы соседства образующих данные звезды параллелепипедов.

Условимся параллелепипеды $\mathbf{T}_k$, образующие определенное в (4.31) ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$, или, что то же самое, лучи $\mathbf{v}_k$ ядра нумеровать так, чтобы их порядки $\mathbf{m}_k$ удовлетворяли неравенствам

$$\mathbf{m}_0 < \mathbf{m}_1 < \cdots < \mathbf{m}_d. \tag{7.8}$$

Нумерацию, удовлетворяющую условию (7.8), будем называть *канонической*. При канонической нумерации по определению (7.3) подстановка $\sigma(\mathbf{i})$ будет также удовлетворять соответствующим неравенствам

$$\sigma(\{0\}) < \sigma(\{1\}) < \cdots < \sigma(\{d\}), \tag{7.9}$$

при этом всегда выполняются равенства $\sigma(\{0\}) = 1$, $\sigma(\{1\}) = 2$. Что же касается следующего значения $\sigma(\{2\})$, то $\sigma(\{2\}) = 3$, если $\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 > \mathbf{m}_2$, и $\sigma(\{2\}) = 4$ в противном случае.

Набор натуральных чисел

$$\mathbf{M}_d = \{\mathbf{m}_0, \ \mathbf{m}_1, \ \ldots, \ \mathbf{m}_d\} \tag{7.10}$$

однозначно задает подстановку $\sigma(\mathbf{i})$ в (7.3). Обозначим через Σ_d множество указанных подстановок для всех невырожденных наборов чисел $\mathbf{M}_d$, удовлетворяющих неравенствам (7.8). *Невырожденность* набора чисел (7.10) означает выполнимость условия (6.4). Заметим, что разным наборам чисел $\mathbf{M}_d \neq \mathbf{M}'_d$ может отвечать одна и та же подстановка $\sigma(\mathbf{i})$. Для начальных размерностей $d \leqslant 3$ количество подстановок в Σ_d соответственно равно

$$\sharp\,\Sigma_1 = 1, \ \sharp\,\Sigma_2 = 2, \ \sharp\,\Sigma_3 = 9. \tag{7.11}$$

Пусть $\mathcal{F}_d^{\rm St}$ – множество всевозможных различных семейств $\mathcal{F}$ разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора $\mathbb{T}^d$. Тогда число элементов в $\mathcal{F}_d^{\rm St}$ и Σ_d связаны неравенством

$$\sharp\,\mathcal{F}_d \leqslant \sharp\,\Sigma_d. \tag{7.12}$$

Известно [5, 16], что

$$\sharp\,\mathcal{F}_d = \sharp\,\Sigma_d \ \text{ для } \ d = 1,\, 2. \tag{7.13}$$

Равенство в (7.13) означает, что для каждой подстановки $\sigma(\mathbf{i}) \in \Sigma_d$ существует реализующее ее разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$.

§8. Симметрии многогранных звезд и координационные интервалы

8.1. Симметрии многогранных звезд. На множестве многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$, определенных в (5.10), с номерами n из $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ зададим отображение

$$s\colon\ \mathrm{St}(n) \ \longrightarrow\ \mathrm{St}(\bar{n}), \tag{8.1}$$

полагая $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$.

Пусть $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^{j} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ – многогранники, получающихся S-сдвигами отмеченных параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Здесь k пробегает множество индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, j принадлежит $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$ и $\mathbf{i}$ – произвольное подмножество из множества $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. На указанном множестве многогранников определим еще одно отображение

$$\mathfrak{s}\colon\ \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^{j} \ \longrightarrow\ \mathbf{T}_{k,\bar{\mathbf{i}}^{\,k}}^{\bar{j}^{\,k}}, \tag{8.2}$$

где $\bar{j}^{\,k} = \mathbf{m}_k - 1 - j$ и $\bar{\mathbf{i}}^{\,k} = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{i}\}$.

Используя теорему 6.1, распространим отображение (8.2) на многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$. Согласно формуле (6.25) каждая звезда $\mathrm{St}(n)$ разбивается

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^{j} \tag{8.3}$$

определенным образом на многогранники $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^{j}$. Положим

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathfrak{s}\,(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^{j}) \tag{8.4}$$

с индексами k, $\mathbf{i}$, j, пробегающими те же множества, что и в разбиении (8.3).

Теорема 8.1. 1. *Отображение* (8.4) *определено корректно. Это означает, что* $\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n))$ *– снова многогранная звезда, а правая часть в равенстве* (8.4) *– ее разбиение на образующие многогранники* $\mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}})$.

2. *Для всех* $n \in \mathcal{M}$ *выполняется равенство*

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = s(\mathrm{St}(n)), \tag{8.5}$$

где s *– отображение* (8.1).

3. *Многогранная звезда* $\mathrm{St}(\bar{n}) = s\,(\mathrm{St}(n))$ *имеет разбиение*

$$\mathrm{St}(\bar{n}) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}} \tag{8.6}$$

с такими же индексами k, $\mathbf{i}$, j, *как и в разбиении* (8.3) *или более конкретно – в разбиении* (6.25). *Здесь дополнения* $\bar{j}$, $\bar{\mathbf{i}}$ *определены в* (8.2).

Доказательство. По теореме 6.1 и определению (8.4) отображения $\mathfrak{s}$ записываем

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d} \ \bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k} \ \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{M}_k\\ \mu^{j}_{\mathbf{i}}=n}} \mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}}), \tag{8.7}$$

откуда, учитывая (8.2), имеем

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d} \ \bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k} \ \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{M}_k\\ \mu^{j}_{\mathbf{i}}=n}} \mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}}\,, \tag{8.8}$$

где $\bar{j} = \mathbf{m}_k - 1 - j$ и $\bar{\mathbf{i}} = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{i}\}$. Условие $\mu^{j}_{\mathbf{i}} = n$ в (8.8) перепишем в виде

$$\mathbf{m} - 1 - \mu^{j}_{\mathbf{i}} = \mathbf{m} - 1 - n. \tag{8.9}$$

Здесь $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_d$ по определению (4.22) и $\mu^{j}_{\mathbf{i}} = \mu_{\mathbf{i}} + j$ по (5.9). Отсюда и (8.1) получаем равенство

$$\mathbf{m} - 1 - \mu_{\mathbf{i}} - j = \bar{n}. \tag{8.10}$$

Левую часть в равенстве (8.10) представим в развернутом виде

$$\mathbf{m} - 1 - \mu_{\mathbf{i}} - j = ((\mathbf{m}_0 + \cdots + \widehat{\mathbf{m}_k} + \cdots + \mathbf{m}_d) - \mu_{\mathbf{i}}) + (\mathbf{m}_k - 1 - j), \tag{8.11}$$

где $\widehat{\mathbf{m}_k}$ указывает на отсутствие слагаемого $\mathbf{m}_k$ в скобках и $\mathbf{m}_k - 1 - j = \bar{j}$ согласно (8.8). Вспоминая определение (5.6) порядка $\mu_{\mathbf{i}}$ с мультииндексом $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$, приходим к формуле сокращения

$$(\mathbf{m}_0 + \cdots + \widehat{\mathbf{m}_k} + \cdots + \mathbf{m}_d) - \mu_{\mathbf{i}} = \mu_{\mathcal{D}_k\setminus\{\mathbf{i}\}} = \mu_{\bar{\mathbf{i}}}, \tag{8.12}$$

где $\bar{\mathbf{i}} = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{i}\}$. Собирая вместе равенства (8.9)–(8.12), видим, что условие $\mu^j_{\mathbf{i}} = n$ в (8.8) эквивалентно условию $\mu_{\bar{\mathbf{i}}} + \bar{j} = \bar{n}$; и так как $\mu_{\bar{\mathbf{i}}} + \bar{j} = \mu^{\bar{j}}_{\bar{\mathbf{i}}}$ по определению (5.9) порядока $\mu^{\bar{j}}_{\bar{\mathbf{i}}}$, то $\mu^j_{\mathbf{i}} = n$ эквивалентно условию

$$\mu^{\bar{j}}_{\bar{\mathbf{i}}} = \bar{n}. \tag{8.13}$$

Если теперь заметить, что включение $j \in \mathcal{M}_k$ равносильно включению $\bar{j} \in \mathcal{M}_k$, то из (8.8) и (8.13) выводим равенство

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d} \quad \bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k} \quad \bigcup_{\substack{\bar{j}\in\mathcal{M}_k \\ \mu^{\bar{j}}_{\bar{\mathbf{i}}}=\bar{n}}} \quad \mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}}\,. \tag{8.14}$$

Поскольку по теореме 6.1 правая часть в (8.14) представляет собою разбиение на параллелепипеды $\mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}}$ звезды $\mathrm{St}(\bar{n}) = s(\mathrm{St}(n))$, то это доказывает корректность определенения отображения (8.4) и равенство (8.5). Разбиение же (8.6) получается из (8.8) и (8.5). □

8.2. Инвариантность координационных интервалов. Вернемся к определенному в (8.1) отображению $n \to \bar{n}$, где $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$. Данное отображение задает биекцию на множестве $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\}$. Выясним, как оно действует на интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}} \subset \mathcal{M}$.

Лемма 8.1. *Если разбиение тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ из* (4.29) *невырожденное, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение $n \to \bar{n}$ сохраняет разбиение* (6.22) *множества $\mathcal{M}$ на интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}$:*

$$\Lambda_{\mathbf{i}} \overset{-}{\longrightarrow} \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}. \tag{8.15}$$

Здесь

$$\bar{\Lambda}_{\mathbf{i}} = \Lambda_{\check{\mathbf{i}}} \tag{8.16}$$

при этом $\check{\mathbf{i}} = \mathcal{D} \setminus \mathbf{i}'$, где $\mathbf{i}'$ – подмножество из $\mathcal{D}$, непосредственно следующее за $\mathbf{i}$ относительно упорядочения (6.19).

2. *В разбиении* (6.22) *найдется интервал $\Lambda_{\mathbf{i}} \subset \mathcal{M}$, для которого*

$$\frac{\mathbf{m} - 1}{2} \in [\Lambda_{\mathbf{i}}], \tag{8.17}$$

где $[\Lambda_{\mathbf{i}}] = [\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}'} - 1]$ – вещественный интервал, соответствующий натуральному интервалу $\Lambda_{\mathbf{i}}$.

3. *Интервал $\Lambda_{\mathbf{i}}$ из* (8.17) *обладает свойством инвариантности*

$$\bar{\Lambda}_{\mathbf{i}} = \Lambda_{\mathbf{i}}. \tag{8.18}$$

Доказательство. 1. Так как $\Lambda_{\mathbf{i}} = \{\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}}+1, \ldots, \lambda_{\mathbf{i}'}-1\}$ по (6.23), то ему симметричный интервал имеет вид

$$\bar{\Lambda}_{\mathbf{i}} \ = \{\mathbf{m}-\lambda_{\mathbf{i}'},\ \ldots,\ (\mathbf{m}-\lambda_{\mathbf{i}})-1\}, \tag{8.19}$$

при этом

$$\mathbf{m}-\lambda_{\mathbf{i}'} = \lambda_{\mathcal{D}}-\lambda_{\mathbf{i}'} = \lambda_{\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}'} = \lambda_{\check{\mathbf{i}}} \tag{8.20}$$

и

$$\mathbf{m}-\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathcal{D}}-\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}} = \lambda_{\check{\mathbf{i}}\,'}. \tag{8.21}$$

Доказательства требует только последнее равенство $\lambda_{\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}} = \lambda_{\check{\mathbf{i}}\,'}$, равносильное равенству $\mathcal{D}\setminus\mathbf{i} = \check{\mathbf{i}}\,'$ в силу невырожденности (6.4) разбиения тора $\mathcal{T}$. Воспользуемся импликацией

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{i}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}\setminus\mathbf{i}' \prec \mathcal{D}\setminus\mathbf{i}, \tag{8.22}$$

снова вытекающей из невырожденности разбиения $\mathcal{T}$. Здесь второй символ $\prec$ также означает порядок непосредственного следования. По определению $\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}' = \check{\mathbf{i}}$, поэтому из (8.22) следует $\check{\mathbf{i}} \prec \mathcal{D}\setminus\mathbf{i}$, т.е. $\mathcal{D}\setminus\mathbf{i} = \check{\mathbf{i}}\,'$.

2. Из определений (6.22) и (6.23) следует, что утверждение (8.17) нужно проверить только для случая четного порядка $\mathbf{m}$. Доказательство для четного $\mathbf{m}$ проведем от противного. Пусть включение (8.17) не выполняется ни для одного интервала $\Lambda_{\mathbf{i}} \subset \mathcal{M}$. Тогда найдутся соседние интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}$ и $\Lambda_{\mathbf{i}'}$, между которыми расположено полуцелое число $\frac{\mathbf{m}-1}{2}$. Значит, в силу определений (6.22) и (6.23) имеют место неравенства

$$\lambda_{\mathbf{i}'}-1 < \frac{\mathbf{m}-1}{2} < \lambda_{\mathbf{i}'}, \tag{8.23}$$

из которых следует равенство $\lambda_{\mathbf{i}'} = \frac{\mathbf{m}}{2}$. Но тогда будет выполняться еще одно двойственное равенство $\lambda_{\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}'} = \frac{\mathbf{m}}{2}$. Отсюда следует совпадение критических значений $\lambda_{\mathbf{i}'} = \lambda_{\mathcal{D}\setminus\mathbf{i}'}$ для разных подмножеств $\mathbf{i}' \neq \mathcal{D}\setminus\mathbf{i}'$, что противоречит условию невырожденности (6.4) разбиения $\mathcal{T}$.

3. Покажем, что интервал $\Lambda_{\mathbf{i}}$ из (8.17) удовлетворяет свойству инвариантности (8.18). Число $\frac{\mathbf{m}-1}{2}$ инвариантно относительно отображения $n \to \bar{n}$ и поэтому выполняется включение

$$\frac{\mathbf{m}-1}{2} \in [\bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}]. \tag{8.24}$$

Тогда из (8.17) и (8.24) следует $\Lambda_{\mathbf{i}} \cap \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}} \neq \emptyset$. Отсюда и инвариантности (8.15), (8.16) интервалов $\Lambda_{\mathbf{i}}$ выводим требуемое равенство $\Lambda_{\mathbf{i}} = \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}$. □

8.3. Центральная симметрия многогранных звезд. Пусть $\mathrm{St}(n)$ – многогранная звезда (5.10) с центром в точке $x_n = S^n(0)$. Обозначим через $o(\mathrm{St}(n))$ звезду, получающуюся из звезды $\mathrm{St}(n)$ с помощью центральной симметрии с центром x_n.

Предложение 8.1. 1. *Для любого* $n \in \mathcal{M}$ *многогранные звезды* $\mathrm{St}(\bar{n})$, *где* $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, *и* $o(\mathrm{St}(n))$ *принадлежат одному типу*:

$$\mathrm{St}(\bar{n}) \sim o(\mathrm{St}(n)). \tag{8.25}$$

2. *Если* n *принадлежит инвариантному интервалу* $\Lambda_{\mathbf{i}} = \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}$ *из* (8.18), *то*

$$o(\mathrm{St}(n)) = \mathrm{St}(n), \tag{8.26}$$

т.е. звезды $\mathrm{St}(n)$ *являются центрально симметричными для всех* $n \in \Lambda_{\mathbf{i}}$.

Доказательство. 1. По (8.1) и (8.5) имеем

$$\mathrm{St}(\bar{n}) = s(\mathrm{St}(n)) = \mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)), \tag{8.27}$$

где преобразование $\mathfrak{s}$ звезды $\mathrm{St}(n)$ сводится (8.2) к замене параллелепипедов $\mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}}$ из $\mathrm{St}(n))$ на $\mathbf{T}^{\bar{j}}_{k,\bar{\mathbf{i}}}$ из $\mathrm{St}(\bar{n})$. Если выделенные вершины в параллелепипедах $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ и $\mathbf{T}_{k,\bar{\mathbf{i}}}$ соединить в одной точке, то получится фигура, центрально симметричная относительно указанной точки. Отсюда вытекает эквивалентность (8.25).

2. Поскольку номер n принадлежит инвариантному интервалу $\Lambda_{\mathbf{i}} = \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}$, то $\bar{n}$ также принадлежит этому интервалу $\Lambda_{\mathbf{i}}$. Соглано теореме 6.1 звезды с номерами из одного интервала $\Lambda_{\mathbf{i}}$ имеет одинаковые типы. Поэтому

$$\mathrm{St}(n) \ \sim \ \mathrm{St}(\bar{n}) \tag{8.28}$$

и тогда из (8.25) и (8.28) следует еще одна эквивалентность

$$\mathrm{St}(n) \ \sim \ o(\mathrm{St}(n)) \tag{8.29}$$

двух многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$ и $o(\mathrm{St}(n))$ с общей вершиной, что и доказывает равенство (8.26). $\square$

Замечание 8.1. остаются в силе и для вырожденных разбиений тора $\mathcal{T}$. Но в этом случае уже нельзя гарантировать существование инвариантного интервала $\Lambda_{\mathbf{i}} = \bar{\Lambda}_{\mathbf{i}}$ в разбиении (6.22) множества $\mathcal{M}$. Таким образом, только в невырожденных разбиениях тора $\mathcal{T}$ всегда содержатся центрально симметричные многогранные звезды (8.26).

§9. Лучевые звезды

9.1. Правило максимума для лучей. Каждой многогранной звезде $\mathrm{St}(n)$ с вершиной в точке x_n, определенной в (5.10), можно поставить в соответствие

$$\mathrm{cst}\colon\ \mathrm{St}(n) \longrightarrow \mathrm{st}(n) \tag{9.1}$$

лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Назовем cst *отображением сужения* (constriction map) многогранной звезды $\mathrm{St}(n)$ на лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Определение отображения cst состоит в следующем. Рассмотрим все ребра параллелепипедов $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}(n)$, выходящие из вершины x_n звезды $\mathrm{St}(n)$. Если за начало ребер выбрать точку x_n, то ребра принимают направления и становятся векторами $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$ из *симметризованной ядерной звезды*

$$\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{v}_k$ – лучи звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (4.11). Множество отмеченных векторов $\mathbf{w}_k$ образует лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ в (9.1).

Далее нам потребуется понятие *допустимого луча* $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, где $k = 0, 1, \ldots, d$, в точке x_n орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (4.32) – это такой луч $\mathbf{w}_k$, что выполняются неравенства

$$0 \leqslant\ n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k\ \leqslant \mathbf{m} - 1. \tag{9.3}$$

Здесь $\mathrm{sign}(\mathbf{w}_k) = \pm 1$ – *знак* луча $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$.

Теорема 9.1. *Лучевая звезда* $\mathrm{st}(n)$ *из* (9.1) *состоит из всех допустимых* (9.3) *лучей* $\mathbf{w}_k$ *симметризованной звезды* $\mathbf{w}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, доказательство проведем для луча $\mathbf{w}_0 = \pm\mathbf{v}_0$. Оставшиеся лучи $\mathbf{w} \setminus \{\mathbf{w}_0\} = \{\pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}$ перенумеруем таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathbf{m}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{m}_{d-1} \leqslant \mathbf{m}_d. \tag{9.4}$$

Доказательство начнем с луча $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0$. Согласно (5.1) параллелепипед $\mathbf{T}_d$ имеет вершины

$$\mathrm{Ver}_d = \mathrm{Ver}\,\mathbf{T}_d = \{\mathbf{v}_\mathbf{i};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_d\}, \tag{9.5}$$

где $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ – мультииндекс, пробегающий все подмножества индексов из множества $\mathcal{D}_d = \{0, 1, \ldots, d-1\}$, включая пустое $\mathbf{i} = \emptyset$, и $\mathbf{v}_\mathbf{i} = \mathbf{v}_{i_1} + \cdots + \mathbf{v}_{i_\iota}$. У параллелепипеда $\mathbf{T}_d$ вершины

$$\mathbf{v}_\emptyset = 0,\ \ \mathbf{v}_{\{d-1\}},\ \ \mathbf{v}_{\{d-2,d-1\}},\ \ \ldots,\ \ \mathbf{v}_{\{1,\ldots,d-2,d-1\}} \tag{9.6}$$

имеют соответственно порядки

$$0,\ \ \mathbf{m}_{d-1},\ \ \mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1},\ \ \dots,\ \ \mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}. \tag{9.7}$$

Из каждой вершины (9.6) выходит ребро-луч $\mathbf{v}_0$ порядка $\mathbf{m}_0$. В разбиении тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (4.29) сам параллелепипед $\mathbf{T}_d$ повторяется $S^j(\mathbf{T}_d)$, где $j=0,1,\dots,\mathbf{m}_d-1$, посредством сдвига (3.14). Следовательно, из всех вершин x_n с номерами n из интервалов

$$\begin{gathered}
[0,\dots,\mathbf{m}_d-1],\\
[\mathbf{m}_{d-1},\dots,\mathbf{m}_{d-1}+\mathbf{m}_d-1],\\
[\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1},\dots,\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}+\mathbf{m}_d-1],\\
\dots\\
[\mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1},\dots,\mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}+\mathbf{m}_d-1]
\end{gathered} \tag{9.8}$$

выходит ребро-луч $\mathbf{v}_0$. Из неравенств (9.4) следует, что интервалы (9.8) последовательно или пересекаются, или являются соседними. Таким образом, их объединение образует полный интервал

$$[0,\dots,\bar{\mathbf{m}}_0]\ =[0,1,\dots,\mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}+\mathbf{m}_d-1], \tag{9.9}$$

где $\bar{\mathbf{m}}_0=\mathbf{m}-1-\mathbf{m}_0$ – симметричный порядок для $\mathbf{m}_0$. По определению (9.3) луч $\mathbf{w}_0=\mathbf{v}_0$ допустим только в точках x_n с номерами n из (9.9) – *допустимого интервала* луча $\mathbf{w}_0=\mathbf{v}_0$. Это доказывает теорему для данного луча.

Теперь перейдем к лучу $\mathbf{w}_0=-\mathbf{v}_0$. Вместо (9.6) рассмотрим вершины

$$\mathbf{v}_0,\ \ \mathbf{v}_{\{0,d-1\}},\ \ \mathbf{v}_{0,\{d-2,d-1\}},\ \ \dots,\ \ \mathbf{v}_{\{0,1,\dots,d-2,d-1\}} \tag{9.10}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_d$. Они получаются сдвигом вершин (9.6) на вектор $\mathbf{v}_0$. Вершины (9.10) имеют соответственно порядки

$$\begin{gathered}
\mathbf{m}_0,\ \mathbf{m}_0+\mathbf{m}_{d-1},\ \mathbf{m}_0+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1},\ \dots,\\
\mathbf{m}_0+\mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}.
\end{gathered} \tag{9.11}$$

Из каждой вершины (9.10) выходит ребро-луч $-\mathbf{v}_0$ порядка $-\mathbf{m}_0$. Далее рассуждая по схеме (9.8), (9.9), приходим к полному интервалу

$$[\mathbf{m}_0,\dots,\mathbf{m}-1]=[\mathbf{m}_0,\dots,\mathbf{m}_0+\mathbf{m}_1+\dots+\mathbf{m}_{d-2}+\mathbf{m}_{d-1}+\mathbf{m}_d-1], \tag{9.12}$$

симметричному интервалу (9.9):

$$[\mathbf{m}_0,\dots,\mathbf{m}-1]=\overline{[0,\dots,\bar{\mathbf{m}}_0]}. \tag{9.13}$$

Снова используя определение (9.3) видим: интервал (9.12) является допустимым интервалом луча $-\mathbf{v}_0$, что доказывает теорему для случая $\mathbf{w}_0 = -\mathbf{v}_0$. □

По теореме 9.1, чтобы построить определенную в (9.1) лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ с вершиной в точке x_n достаточно знать номер этой звезды n и порядки $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{m}_1, \ldots,$ $\mathbf{m}_d$ всех лучей $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ из (4.31). Напомним (5.13), что само ядро является многогранной звездой $\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0)$ с вершиной $x_0 = 0$. Лучи же ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ образуют

$$\mathbf{t} = \mathbf{kr} = \mathrm{st}(0) \tag{9.14}$$

– *ядерную лучевую звезду.* Итак, зная ядерную звезду (9.14) можно построить все лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$, используя *правило максимума* – способе построения, представленном в теореме 9.1. В следующих разделах мы обсудим более детально указанное правило.

9.2. Классификация лучевых звезд. По аналогии с $\lambda_{\mathbf{i}}$ из (6.1) введем *лучевые критические значения* $\xi_{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k}$ пробегает множество $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$, состоящее из следующих подмножества из $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$: $\emptyset$, одноэлементных $\{k\}$ или их дополнений $\{\bar{k}\} = \mathcal{D} \setminus \{k\}$, и всего множества $\mathcal{D}$. Значения $\xi_{\mathbf{k}}$ определяются следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
\xi_{\mathbf{k}} = 0, & \text{если} & \mathbf{k} = \emptyset, \\
\xi_{\mathbf{k}} = \mathbf{m}_k, & \text{если} & \mathbf{k} = \{k\}, \\
\xi_{\mathbf{k}} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_k, & \text{если} & \mathbf{k} = \{\bar{k}\}, \\
\xi_{\mathbf{k}} = \mathbf{m}, & \text{если} & \mathbf{k} = \mathcal{D}.
\end{array} \tag{9.15}$$

Следовательно, согласно (6.1) и (9.15) лучевые критические значения $\xi_{\mathbf{k}}$ являются частным случаем критических значений $\lambda_{\mathbf{i}}$:

$$\xi_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{i}}, \ \text{ если } \ \mathbf{k} = \mathbf{i}. \tag{9.16}$$

Множество

$$\Xi = \{\xi_{\mathbf{k}};\ \mathbf{k} \in \mathcal{D}^{\mathrm{ray}}\} \tag{9.17}$$

назовем *лучевым спектром* разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. Скажем, что лучевой спектр Ξ *невырожден*, если

$$\xi_{\mathbf{k}} \neq \xi_{\mathbf{l}} \ \text{ при условии } \ \mathbf{k} \neq \mathbf{l}. \tag{9.18}$$

При выполнении условия (9.18) само разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ будем называть r-*невырожденым.* Из определений (6.4) и (9.18) следует, что если разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ невырождено, то оно r-невырождено. В обратную сторону данное утверждение может не выполняться.

Предполагая разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ r-невырожденым, введем на подмножествах $\mathbf{k}$ из $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$ r-*линейный порядок*

$$\mathbf{k} \prec \mathbf{l}, \text{ если } \xi_{\mathbf{k}} < \xi_{\mathbf{l}}, \tag{9.19}$$

используя который расположим лучевые критические значения в порядке их возрастания

$$\xi_{\emptyset} = 0 \ < \ \dots \ < \ \xi_{\mathbf{k}} < \xi_{\mathbf{k}'} \ < \ \dots \ < \ \xi_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}. \tag{9.20}$$

Здесь через $\mathbf{k}^{'}$ обозначено подмножество из $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$, непосредственно следующее за $\mathbf{k}$ относительно упорядочения (9.19). Последовательности (9.20) соответствует r-упорядоченная последовательность подмножеств $\mathbf{k}^{'}$ из $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$:

$$\emptyset \ \prec \ \dots \ \prec \ \mathbf{k} \prec \mathbf{k}^{'} \ \prec \ \dots \ \prec \ \mathcal{D}. \tag{9.21}$$

В соответствии с упорядочением (9.20) лучевого спектра Ξ множество $\mathcal{M}$ можно разбить

$$\mathcal{M}_{\mathrm{st}} = \Xi_{\emptyset} \ \sqcup \dots \sqcup \ \Xi_{\mathbf{k}} \ \sqcup \ \Xi_{\mathbf{k}'} \ \sqcup \dots \tag{9.22}$$

на *лучевые координационные интервалы*

$$\Xi_{\mathbf{k}} \ = \{\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}} + 1, \dots, \xi_{\mathbf{k}'} - 1\} \tag{9.23}$$

с мультииндексами $\mathbf{k} \in \mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \setminus \{\mathcal{D}\}$. Множество $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \setminus \{\mathcal{D}\}$ содержит 3 и $2(d+1)+1 = 2d+3$ элементов для $d = 1$ и $d \geqslant 2$ соответственно. Поэтому в случае r-невырожденного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ количество интервалов в разбиении (9.22) равно

$$\sharp\,\mathcal{M}_{\mathrm{st}} = \begin{cases} \quad 3, & \text{если} \quad d = 1, \\ 2d + 3, & \text{если} \quad d \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.24}$$

Количество интервалов $\sharp\,\mathcal{M}_{\mathrm{st}}$ не зависит от порядка $\mathbf{m}$ разбиения.

Теорема 9.2. *Определенные в* (4.29) r-*невырожденные разбиения тора* $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *обладают следующими свойствами.*

1. *Если номера* n, $m \in \mathcal{M}$ *принадлежат одному лучевому координационному интервалу* $\Xi_{\mathbf{k}}$ *из* (9.23), *то соответствующие лучевые звезды* $\mathrm{st}(n)$, $\mathrm{st}(m)$ *эквивалентны*

$$\mathrm{st}(n) \ \sim \ \mathrm{st}(m), \tag{9.25}$$

т.е. данные звезды совпадают с точностью до параллельного сдвига тора.

2. *Если же* $n \in \Xi_{\mathbf{k}}$, $m \in \Xi_{\mathbf{l}}$ *принадлежат различным координационным интервалам* $\Xi_{\mathbf{k}} \neq \Xi_{\mathbf{l}}$, *то отвечающие им звезды* $\mathrm{st}(n)$, $\mathrm{st}(m)$ *неэквивалентны*

$$\mathrm{st}(n) \not\sim \mathrm{st}(m). \tag{9.26}$$

Доказательство. 1. По правилу максимума луч $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ симметризованной звезды $\mathbf{w}$ из (9.2) входит во все лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ в вершинах x_n с номерами из интервала

$$\Xi_{k^+} = [0, \ldots, \xi_{k^+}]. \tag{9.27}$$

Здесь $\xi_{k^+} = \bar{\mathbf{m}}_k$, где $\bar{\mathbf{m}}_k = \mathbf{m} - 1 - \mathbf{m}_k$. Ему противоположный луч $\mathbf{w}_k = -\mathbf{v}_k$ из $\mathbf{w}$ входит соответственно в лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ с номерами из симметричного интервала

$$\Xi_{k^-} = \bar{\Xi}_{k^+} = [\xi_{k^-}, \ldots, \mathbf{m} - 1], \tag{9.28}$$

где $\xi_{k^-} = \mathbf{m}_k$. В обозначениях (9.15) интервалы Ξ_{k^+} и Ξ_{k^-} принимают вид

$$\Xi_{k^+} = [\xi_{\emptyset}, \ldots, \xi_{\mathbf{k}} - 1], \quad \Xi_{k^-} = [\xi_{\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{m} - 1] \tag{9.29}$$

соответственно для $\mathbf{k} = \overline{\{k\}}$ и $\mathbf{k} = \{k\}$, где $\mathbf{k} \in \mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \setminus \{\mathcal{D}\}$. Пересечения интервалов (9.29) как раз и порождают разбиение (9.22) множества $\mathcal{M}$ на интервалы $\Xi_{\mathbf{k}}$, что доказывает эквивалентность (9.25).

2. При переходе в разбиении множества $\mathcal{M}$ от интервала $\Xi_{\mathbf{k}}$ к его соседнему интервалу $\Xi_{\mathbf{k}'}$ каждый раз либо появляется новый допустимый луч $\mathbf{w}_l = -\mathbf{v}_l$ симметризованной звезды $\mathbf{w}$ из (9.2), либо некоторый допустимый луч $\mathbf{w}_l = \mathbf{v}_l$ исчезает и далее такой луч уже вновь не появляется при движении к следующим соседним интервалам. Из указанного свойства разбиения множества $\mathcal{M}$ и доказанного свойства (9.25) вытекает (9.26). □

9.3. Симметрии лучевых звезд. Для лучевых звезд сохраним обозначение $o(\mathrm{st}(n))$ за звездой, получающейся из звезды $\mathrm{st}(n)$ с помощью центральной симметрии относительно ее центра $x_n = S^n(0)$.

Лемма 9.1. *Если разбиение тора* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ *из* (4.29) r-*невырожденное, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение* $n \to \bar{n}$ *сохраняет разбиение* (9.22) *множества* $\mathcal{M}$ *на лучевые координационные интервалы* $\Xi_{\mathbf{k}}$:

$$\Xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\;-\;} \bar{\Xi}_{\mathbf{k}}. \tag{9.30}$$

Здесь

$$\bar{\bar{\Xi}}_{\mathbf{k}} = \Xi_{\check{\mathbf{k}}}, \tag{9.31}$$

при этом $\check{\mathbf{k}} = \mathcal{D} \setminus \mathbf{k}'$, *где* $\mathbf{k}'$ *– подмножество из* $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$, *непосредственно следующее за* $\mathbf{k}$ *относительно упорядочения* (9.21).

2. *В разбиении* (9.22) *найдется интервал* $\Xi_{\mathbf{k}} \subset \mathcal{M}$, *для которого*

$$\frac{\mathbf{m}-1}{2} \in [\Xi_{\mathbf{k}}], \tag{9.32}$$

где $[\Xi_{\mathbf{k}}] = [\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'} - 1]$ *– вещественный интервал, соответствующий натуральному интервалу* $\Xi_{\mathbf{k}}$.

3. *Интервал* $\Xi_{\mathbf{k}}$ *из* (9.32) *обладает свойством инвариантности*

$$\bar{\bar{\Xi}}_{\mathbf{k}} = \Xi_{\mathbf{k}}. \tag{9.33}$$

Доказательство. Проводится аналогично лемме 8.1. □

С помощью леммы 9.1 по схеме доказательства предложения 8.1 получается следующее утверждение.

Предложение 9.1. 1. *Для любого* $n \in \mathcal{M}$ *лучевые звезды* $\mathrm{st}(\bar{n})$, *где* $\bar{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, *и* $o(\mathrm{st}(n))$ *принадлежат одному типу*:

$$\mathrm{st}(\bar{n}) \sim o(\mathrm{st}(n)). \tag{9.34}$$

2. *Если* n *принадлежит инвариантному интервалу* $\Xi_{\mathbf{k}} = \bar{\bar{\Xi}}_{\mathbf{k}}$ *из* (9.33), *то*

$$o(\mathrm{st}(n)) = \mathrm{st}(n), \tag{9.35}$$

т.е. лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ *являются центрально симметричными для всех* $n \in \Xi_{\mathbf{k}}$.

□

В отличие от многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$ центрально симметричные лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ допускают явное описание. Избегая рассмотрения вырожденных случаем, далее будем предполагать разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ r-невырожденным. Не уменьшая общности, будем считать, что лучи симметризованной звезды $\mathbf{w}$ из (9.2) нумерованы так, чтобы их порядки $\mathbf{m}_k$ удовлетворяют неравенствам (7.8), т.е. лучи звезды $\mathbf{w}$ имеют каноническую нумерацию.

Предложение 9.2. 1. *Инвариантный интервал из* (9.33) *имеет вид*

$$\Xi_o = \Xi_{\{d\}} = \{\xi_{\{d\}}, \xi_{\{k\}} + 1, \ldots, \xi_{\{\bar{d}\}} - 1\}, \tag{9.36}$$

если $\xi_{\{d\}} \leqslant \frac{\mathbf{m}-1}{2}$, *и*

$$\Xi_o = \Xi_{\{\bar d\}} = \{\xi_{\{\bar d\}}, \xi_{\{\bar d\}}+1, \ldots, \xi_{\{d\}}-1\}, \tag{9.37}$$

если $\xi_{\{d\}} > \frac{\mathbf{m}-1}{2}$. *Здесь* $\{\bar d\} = \mathcal{D} \setminus \{d\}$ *и*

$$\xi_{\{d\}} = \mathbf{m}_d, \quad \xi_{\{\bar d\}} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_d = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_{d-1}. \tag{9.38}$$

2. *Для всех номеров* n *из инвариантного интервала* Ξ_o *симметричные лучевые звезды* $\mathrm{st}(n)$ *имеют вид*

$$\mathrm{st}(n) \sim \mathbf{w} \tag{9.39}$$

в случае интервала (9.36) *и*

$$\mathrm{st}(n) \ \sim \ \mathbf{w} \setminus \{\mathbf{v}_d, -\mathbf{v}_d\} \tag{9.40}$$

в случае (9.37).

Доказательство. 1. Согласно лемме 9.1 для r-невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ в разбиении (9.22) найдется интервал $\Xi_{\mathbf{k}} \subset \mathcal{M}_{\mathrm{st}}$, для которого $\frac{\mathbf{m}-1}{2} \in [\Xi_{\mathbf{k}}]$. В случае $\mathbf{m}_d \leqslant \frac{\mathbf{m}-1}{2}$ таким интервалом будет интервал $\Xi_o = \Xi_{\{d\}}$ из (9.36):

$$\frac{\mathbf{m}-1}{2} \in [\Xi_{\{d\}}], \tag{9.41}$$

так как данный интервал симметричен относительно точки $\frac{\mathbf{m}-1}{2}$, при этом из включения (9.41) и условия (7.8) следует, что в $\Xi_{\{d\}}$ отсутствуют критические значения $\xi_{\mathbf{k}}$ с индексами $\mathbf{k} \neq \{d\}, \overline{\{d\}}$ из множества $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \setminus \{\mathcal{D}\}$.

Если же $\mathbf{m}_d > \frac{\mathbf{m}-1}{2}$, то из неравенства $\mathbf{m}_d - 1 \geqslant \frac{\mathbf{m}-1}{2}$ и симметрии интервала $\Xi_o = \Xi_{\{\bar d\}}$ из (9.37) получаем включение

$$\frac{\mathbf{m}-1}{2} \in [\Xi_{\{\bar d\}}]. \tag{9.42}$$

Поскольку $\mathbf{m}_k < \xi_{\{\bar d\}}$, где $\xi_{\{\bar d\}} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_{d-1}$, для всех $k = 0, 1, \ldots, d-1$, то из (9.42) вытекает, что интервал $\Xi_{\{\bar d\}}$ также не содержит значения $\xi_{\mathbf{k}}$ с индексами $\mathbf{k} \neq \{d\}, \overline{\{d\}}$.

2. Эквивалентности (9.39) и (9.40) вытекают из явного вида интервалов (9.36), (9.37) и теоремы 9.1. $\square$

§10. Классификация разбиений тора по лучевым звездам

10.1. Типы лучевых звезд. Принадлежность лучевых звезд $\mathrm{st}(n)$ и $\mathrm{st}(m)$ одному *типу* означает их эквивалентность (9.25). По теореме 9.2 и формуле (9.24) r-невырожденные (9.18) разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ содержат

$$\sharp\,\mathrm{st}_d = \begin{cases} 3, & \text{если} \quad d = 1, \\ 2d+3, & \text{если} \quad d \geqslant 2, \end{cases} \tag{10.1}$$

различных типов лучевых звезд, где через st_d обозначено множество всех типов лучевых звезд. Количество типов $\sharp\,\mathrm{st}_d$ не зависит от порядка $\mathbf{m}$ разбиения так же, как и количество типов многогранных звезд $\sharp\,\mathrm{St}_d$ из (6.24) в случае невырожденного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. В последнем случае равенство (10.1) остается в силе.

Каждому типу лучевых звезд отвечает свой координационный интервал $\Xi_{\mathbf{k}}$ в разбиении (9.22). Поэтому типы лучевых звезд $\mathrm{st}(n)$ допускают следующую *параметризацию*

$$\mathrm{st}(\emptyset), \ \ldots, \ \mathrm{st}(\mathbf{k}), \ \mathrm{st}(\mathbf{k}'), \ \ldots \tag{10.2}$$

элементами $\mathbf{k}$ из множества $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \setminus \{\mathcal{D}\}$. Из (10.1) следует, что для существования r-невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ необходимо выполнение неравенства

$$\mathbf{m} \geqslant 2d+3 \tag{10.3}$$

для порядка $\mathbf{m}$ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$.

10.2. Семейства разбиений тора по типам лучевых звезд. В упорядоченной последовательности (9.21) всех элементов $\mathbf{k}$ из множества $\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$ каждому $\mathbf{k}$ отвечает

$$\sigma(\mathbf{k}) = k \tag{10.4}$$

его *порядковый номер*

$$k \ \in \ \mathcal{K} = \{1, 2, \ldots, 2d+2\}. \tag{10.5}$$

Отображение (10.4) задает *подстановку*

$$\sigma\colon \ \mathcal{D}^{\mathrm{ray}} \ \to \ \mathcal{K}. \tag{10.6}$$

Два разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{w})$ тора $\mathbb{T}^d$ связаны соотношением

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) \ \overset{\mathrm{st}}{\sim} \ \mathcal{T}(\mathbf{w}), \tag{10.7}$$

если выполняется равенство

$$\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{v})}(\mathbf{k}) = \sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{w})}(\mathbf{k}) \tag{10.8}$$

для всех $\mathbf{k} \in \mathcal{D}^{\mathrm{ray}}$. Здесь $\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{v})}$ и $\sigma_{\mathcal{T}(\mathbf{w})}$ обозначают подстановки (10.6), отвечающие соответственно разбиениям $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{w})$. При выполнении условия (10.7) будем говорить, что данные разбиения принадлежат $\mathcal{T}(\mathbf{v}), \mathcal{T}(\mathbf{w}) \in \mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ одному r-*семейству* (r-family) $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$.

Как и прежде, условимся лучи ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ r-невырожденного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ имеют каноническую нумерацию (7.8). Обозначим через σ_d множество указанных подстановок для всех r-невырожденных наборов чисел $\mathbf{M}_d = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d\}$, удовлетворяющих неравенствам (7.8). Разным наборам чисел $\mathbf{M}_d \neq \mathbf{M}'_d$ может отвечать одна и та же подстановка $\sigma(\mathbf{k})$. Из рассуждений предложения 9.2 следует, что множество σ_d содержит только две подстановки $\sigma^{\max}$ и $\sigma^{\min}$, отвечающие наборам чисел $\mathbf{M}_d^{\max}$ и $\mathbf{M}_d^{\min}$, для которых выполняются соответственно неравенства $\mathbf{m}_d \leqslant \frac{\mathbf{m}-1}{2}$ и $\mathbf{m}_d > \frac{\mathbf{m}-1}{2}$. Поскольку в одномерном случае $d = 1$ указанные подстановки совпадают $\sigma^{\max} = \sigma^{\min}$, то отсюда получаем

$$\sharp\,\sigma_1 = 1 \ \text{ и } \ \sharp\,\sigma_d = 2 \ \text{ для } \ d \geqslant 2. \tag{10.9}$$

Количества элементов $\mathcal{F}_d^{\mathrm{st}}$ – множества всевозможных различных r-семейств $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ и множества подстановок σ_d связаны неравенствами

$$\sharp\,\mathcal{F}_d^{\mathrm{st}} \leqslant \sharp\,\sigma_d, \tag{10.10}$$

обращающимися согласно [5,16] в равенства для размерностей $d = 1,\ 2$.

Замечание 10.1. Геометрически разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$, принадлежащие r-семействам $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}_{\max}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}_{\min}$ для наборов чисел $\mathbf{M}_d^{\max}$ и $\mathbf{M}_d^{\min}$ соответственно, различаются тем, что разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}_{\max}$, в отличие от разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}_{\min}$, содержат *полные* симметричные лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$, т.е. звезды вида (9.39).

Замечание 10.2. экспоненциальный рост количества $\sharp\,\Sigma_d$ подстановок в Σ_d при $d \to \infty$. Наоборот, в силу (10.9) количества $\sharp\,\sigma_d$ стабилизируются. Это указывает на эффект различия сложности строения многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$ и лучевых звезд $\mathrm{st}(n)$ в ядерных разбиениях тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$.

§11. Связь между лучевыми и многогранными звездами

11.1. Вложение звезд. Скажем, что лучевая звезда $\mathrm{st}(n)$ *вкладывается* в многогранную звезду $\mathrm{St}(m)$:

$$\mathrm{em}\colon\ \mathrm{st}(n)\ \hookrightarrow\ \mathrm{St}(m), \tag{11.1}$$

если выполняется эквивалентность $\mathrm{st}(n)\sim\mathrm{st}(m)$, где лучевая звезда $\mathrm{st}(m)=\mathrm{cst}(\mathrm{St}(m))$ является сужением (9.1) многогранной звезды $\mathrm{St}(m)$. Отображение вложения em можно рассматривать как многозначный аналог обратного отображения для отображения сужения cst.

Лемма 11.1. *Для всех мультииндексов* $\mathbf{k}\in\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}\setminus\{\mathcal{D}\}$ *интервалы* $\Xi_{\mathbf{k}}\subset\mathcal{M}_{\mathrm{st}}$ *из* (9.22) *разбиваются*

$$\Xi_{\mathbf{k}}=\Lambda_{\mathbf{i}_1}\sqcup\cdots\sqcup\Lambda_{\mathbf{i}_\nu} \tag{11.2}$$

на последовательные координационные интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}\subset\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$ *с мультииндексами* $\mathbf{i}\subset\mathcal{D}$ *из разбиения* (6.22).

Доказательство. вытекает из того факта, что мультииндексы $\mathbf{k}\in\mathcal{D}^{\mathrm{ray}}\setminus\{\mathcal{D}\}$ являются частным случаев мультииндексов $\mathbf{i}\subset\mathcal{D}$. □

Доказанное свойство (11.2) говорит о *согласованности* разбиений $\mathcal{M}_{\mathrm{st}}$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$ множества $\mathcal{D}=\{0,1,\dots,d\}$. Согласованность разбиений позволяет явным образом описать необходимые и достаточные условия вложимости звезд (11.1). При этом важно знать количество интервалов $\mathrm{ind}(\mathbf{k})=\nu$ в разбиении (11.2). Назовем $\mathrm{ind}(\mathbf{k})$ *индексом ветвления* интервала $\Xi_{\mathbf{k}}\subset\mathcal{M}_{\mathrm{st}}$ относительно разбиения $\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$. Его роль описана в следующем утверждении.

Предложение 11.1. 1. *Если номера n, m принадлежат координационным интервалам $\Xi_{\mathbf{k}}$, $\Lambda_{\mathbf{i}}$ соответственно, то лучевая звезда* $\mathrm{st}(n)$ *вкладывается* $\mathrm{st}(n)\hookrightarrow\mathrm{St}(m)$ *в многогранную звезду* $\mathrm{St}(m)$ *тогда и только тогда, когда выполняется включение*

$$\Lambda_{\mathbf{i}}\subseteq\Xi_{\mathbf{k}}. \tag{11.3}$$

2. *Пусть* $\mathrm{St}(n\uparrow m)$ *обозначет множество всех различных типов многогранных звезд* $\mathrm{St}(m)$, *в которые вкладывается лучевая звезда* $\mathrm{st}(n)$. *Тогда число типов в* $\mathrm{St}(n\uparrow m)$ *равно*

$$\sharp\,\mathrm{St}(n\uparrow m)=\mathrm{ind}(\mathbf{k}) \tag{11.4}$$

– *индексу ветвления интервала* $\Xi_{\mathbf{k}}$ *относительно разбиения* $\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$.

Доказательство. 1. Пусть звезда $\mathrm{st}(n)$ вкладывается $\mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(m)$ в звезду $\mathrm{St}(m)$. Следовательно, по определению (11.1) имеет место эквивалентность $\mathrm{st}(n) \sim \mathrm{st}(m)$, означающая, что лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ и $\mathrm{st}(m)$ имеют один и тот же тип. Тогда по теореме 9.2 номера n, m принадлежат одному интервалу $\Xi_{\mathbf{k}}$, а поэтому по лемме 11.1 будет выполняться включение $\Lambda_{\mathbf{i}} \subseteq \Xi_{\mathbf{k}}$. Обратно, если выполняется указанное включение, то снова применяя теорему 9.2 получаем эквивалентность $\mathrm{st}(n) \sim \mathrm{st}(m)$, из которой следует вложение $\mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(m)$.

2. Равенство (11.4) следует из утверждения 1 и разбиения (11.2). □

11.2. Жесткие лучевые звезды. Лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ назовем *жесткой*, если она однозначно определяет тип многогранной звезды $\mathrm{St}(m)$, в которую $\mathrm{st}(n)$ вкладывается $\mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(m)$, или другими словами – зная лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ можно построить содержащую ее многогранную звезду $\mathrm{St}(m)$. В силу равенства (11.4) звезда $\mathrm{st}(n)$ будет жесткой только, когда

$$\mathrm{ind}(\mathbf{k}) = 1, \tag{11.5}$$

где $\mathbf{k}$ определено условием $n \in \Xi_{\mathbf{k}}$. В канонической нумерации (7.8) жесткими лучевыми звездами являются

$$\mathrm{st}(n) \ \text{ для } \ n \in \Xi_{\emptyset}, \quad \Xi_{\{\bar{0}\}}, \tag{11.6}$$

при этом

$$\begin{aligned} \Xi_{\emptyset} &= \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_0 - 1\}, \\ \Xi_{\{\bar{0}\}} &= \{\mathbf{m} - \mathbf{m}_0, \mathbf{m} - \mathbf{m}_0 + 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\} \end{aligned} \tag{11.7}$$

– начальный и последний отрезки разбиения $\mathcal{M}_{\mathrm{st}}$ из (9.22). Жесткие звезды $\mathrm{st}(n)$ из (11.6) имеют *минимальный* тип:

$$\mathrm{st}(\emptyset) = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}, \quad \mathrm{st}(\{\bar{0}\}) = \{-\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_d\}, \tag{11.8}$$

где $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ – ядерная звезда (4.11). Звезды $\mathrm{st}(\emptyset)$, $\mathrm{st}(\{\bar{0}\})$ отличаются от всех других лучевых звезд тем, что они содержат наименьшее возможное количество лучей $d + 1$.

Однако, жесткие лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ появляются крайне редко. Чтобы это увидеть, вспомним, что согласно (10.1) и (7.1) для размерностей $d \geqslant 2$ количество типов лучевых и многогранных звезд соответственно равно $\sharp\,\mathrm{st} = 2d + 3$ и $\sharp\,\mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1$. Отсюда следует, что *среднее число типов* ram_d многогранных звезд, приходящихся на один тип лучевых звезд, ведет себя асимптотически как

$$\mathrm{ram}_d = \frac{\sharp\,\mathrm{St}_d}{\sharp\,\mathrm{st}_d} = \frac{2^{d+1}-1}{2d+3} \sim \frac{2^d}{d} \to +\infty \tag{11.9}$$

при $d \to +\infty$ и, значит, ram_d имеет экспоненциальный рост. Поэтому наблюдается экспоненциальное ветвление (ramification) многогранных звезд $\mathrm{St}(m)$ относительно лучевых звезд $\mathrm{st}(n)$ при их вложении $\mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(m)$.

При этом стоит отметить исключительный случай малых размерностей $d = 1$ и 2, для которых имеет место равенство

$$\mathrm{ram}_d = 1. \tag{11.10}$$

Приведенное равенство означает, для разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ торов $\mathbb{T}^d$ размерностей $d = 1,\,2$ все лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$ будут жесткими. Геометрически равенство (11.10) легко объяснимо. Для разбиений одномерных торов $\mathbb{T}^1$ – единичных окружностей – понятия лучевой и многогранной звезд совпадают, а в случае двумерных торов $\mathbb{T}^2$ многогранная звезда $\mathrm{St}(n)$ однозначно восстанавливается по ее лучевой звезде $\mathrm{st}(n)$.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
2. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
3. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
4. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
5. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), No. 2, 89–122.
6. Н. Н. Мануйлов, *Число попаданий точек последовательности $\{n\tau_g\}$ в полуинтервал.* — Чебышевский сборник. Тула: Изд. ТГПУ **5** (2004), Вып. 3, 72–81.
7. G. Rauzy, *Nombres algébriques algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
8. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Записки научных семинаров ПОМИ **322** (2005), 83–106.
9. В. Г. Журавлев, *Параметризация двумерного квазипериодического разбиения Рози.* — Алгебра и анализ **22** (2010), No. 4, 21–56.
10. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.

11. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
12. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
13. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
14. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.
15. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* — Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius, 2007, 240–254.
16. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
17. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.

Zhuravlev V. G. Local structure of the karyon tilings.

Karyon tilings $\mathcal{T}$ of the torus $\mathbb{T}^d$ of arbitrary dimension d are considered. The prototype of such tilings is one-dimensional Fibonacci tilings and their two-dimensional analog the Rauzy tiling. Tilings $\mathcal{T}$ are important for applications to multidimensional continued fractions. In this article, we examine the local properties of karyon tilings $\mathcal{T}$.

Владимирский государственный
университет, 600024, Владимир,
ул. Строителей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 31 марта 2021 г.