Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 502, 2021 г.

В. Г. Журавлев

ДРОБНО-МАТРИЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Введение

0.1. $\mathcal{L}$-алгоритм. Рассмотрим произвольное алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – алгебраическое расширение степени $d + 1 \geqslant 2$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$; и пусть $1 \leqslant k \leqslant d$ обозначает количество некоторых произвольных фиксированных сопряжений поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ с условием, что комплексные сопряжения считаются парами. В предложении 2.1 доказано существование унимодулярной матрицы $\mathrm{P}_\alpha \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, для которой столбец $\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}. \tag{0.1}$$

Здесь λ – локализованная единица поля $\mathbb{Q}(\alpha)$: ровно k выделенных ее сопряженных обладает свойством $|\lambda^{(j)}| > 1$.

Выделим в $\mathbb{R}^{d+1}$ подпространство $A_+ \subset \mathbb{R}^{d+1}$, натянутое на векторы $\widehat{\alpha}^{(i)}$ для вещественных выделенных сопряжений и парные векторы $\widehat{\alpha}_+^{(j)} = \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}^{(j)} + \bar{\widehat{\alpha}}^{(j)})$, $\widehat{\alpha}_-^{(j)} = \frac{1}{2i}(\widehat{\alpha}^{(j)} - \bar{\widehat{\alpha}}^{(j)})$ для комплексных сопряжений. Обозначим через $A_+^\perp \subset \mathbb{R}^{d+1}$ подпространство, ортогональное $A_+^\perp \perp A_+$ к A_+. Далее, выберем в пространстве $A_+^\perp$ приведенный базис вида

$$\alpha_1^\perp = (-1, \ldots, 0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}), \ \ldots, \ \alpha_l^\perp = (0, \ldots, -1, \alpha_{l1}, \ldots, \alpha_{lk}), \tag{0.2}$$

где $l = \dim_{\mathbb{Q}} A_+^\perp$ – размерность пространства $A_+^\perp$, определяемая из равенства $l + k = d + 1$. Базису (0.2) поставим в соответствие систему

Ключевые слова: диофантовы приближения линейных форм, наилучшие приближения, $\mathcal{L}$-алгоритм.

линейных форм

$$F_1(x) = -x_1 + \alpha_{11}x_{l+1} + \dots + \alpha_{1k}x_{d+1},$$
$$\dots \tag{0.3}$$
$$F_l(x) = -x_l + \alpha_{l1}x_{l+1} + \dots + \alpha_{lk}x_{d+1}$$

с вещественными коэффициентами. В [1] доказано следующее утверждение.

Существует последовательность целочисленных точек $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$, *удовлетворяющих рекуррентному соотношению, определяемому характеристическим многочленом* $ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha)$ *унимодулярной матрицы* P_α *из* (0.1), *такая что выполняется система неравенств*

$$|F_1(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^\theta},$$
$$\dots \tag{0.4}$$
$$|F_l(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^\theta}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ *Здесь показатель* $\theta = \frac{k}{l} - \varrho$, *при этом отклонение* $\varrho > 0$ *можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора матрицы* P_α *в* (0.1); *константа* C *не зависит от номера итерации* a; *величина* $|p_a|_s = |p_{a,1}| + \dots + |p_{a,d+1}|$ *имеет экспоненциальный рост при* $a \to +\infty$.

Предложенный в [1] алгоритм построения целочисленных решений $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$ систем линейных неравенств вида (0.4) был называн $\mathcal{L}$-алгоритмом, так как он опирается на метод локализации единиц λ алгебраических числовых полей $\mathbb{Q}(\alpha)$.

0.2. Основной результат. Выберем произвольную матрицу M из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ и разобъем ее $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ на блоки A, B, C, D так, что на диагонали стоят квадратные матрицы A и D соответственно размеров l и k. Определим дробно-матричное преобразование

$$M\langle\alpha\rangle = (A\alpha + B) \cdot (C\alpha + D)^{-1} \tag{0.5}$$

на множестве вещественных $(l \times k)$-матриц

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ & \dots & \\ \alpha_{l1} & \dots & \alpha_{lk} \end{pmatrix},$$

предполагая, что фактор-автоморфности $j(M, \alpha) = \det(C\alpha + D) \neq 0$. Перенесем преобразования (0.5) на приведенные системы линейных форм (0.3), полагая

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= -x_1 + \alpha_{11}' x_{l+1} + \dots + \alpha_{1k}' x_{d+1}, \\ &\dots \\ F_l'(x) &= -x_l + \alpha_{l1}' x_{l+1} + \dots + \alpha_{lk}' x_{d+1}, \end{aligned} \tag{0.6}$$

где α_{ij}' обозначают коэффициенты матрицы

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_{11}' & \dots & \alpha_{1k}' \\ & \dots & \\ \alpha_{l1}' & \dots & \alpha_{lk}' \end{pmatrix} = M\langle\alpha\rangle.$$

В теореме 6.1 (см. (6.14)) доказано, что: *для преобразованных систем* (0.6) *также будет выполняется система неравенств*

$$\begin{aligned} |F_1'(p_a')| &\leqslant \frac{C}{|p_a'|_s^\theta}, \\ &\dots \\ |F_l'(p_a')| &\leqslant \frac{C}{|p_a'|_s^\theta} \end{aligned} \tag{0.7}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ *Здесь* M *принадлежит множеству квадратных матриц* $\mathrm{Mat}_{d+1}^{\times}(\mathbb{Z})$ *порядка* $d+1$ *с целыми коэффициентами и определителем* $\det M \neq 0$ *и последовательность целочисленных точек* $p_a' = (p_{a,1}', \dots, p_{a,d+1}')$ *удовлетворяет такому же рекуррентному соотношению, как и последовательность* $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$ *в неравенствах* (0.4)*, но с новыми начальными условиями.*

Таким образом, с помощью дробно-матричных преобразований $\alpha \mapsto \alpha' = M\langle\alpha\rangle$ из (0.5) $\mathcal{L}$-алгоритм удалось перенести с канонических приведенных систем линейных форм (0.3) на значительно бошее широкий класс систем линейных форм вида (0.6).

0.3. История вопроса. Дробно-линейные преобразования являются частным случаем дробно-матричных преобразований (0.5), когда $l = 1$ и $k = 1$. Известно [2], что при дробно-линейных преобразованиях $\alpha \mapsto \alpha' = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ вещественные числа α и α' сохряняют свои разложения в непрерывные дроби с точностью до конечного числа начальных неполных частных. По этой причине указанные числа имеют одну и ту же скорость приближения своими подходящими дробями. В случае произвольных параметров l и k приведенные выше теоремы показывают, что при дробно-матричных преобразованиях $\alpha \mapsto \alpha' = (A\alpha+B)\cdot(C\alpha+D)^{-1}$ также сохраняется скорость приближений в неравенствах (0.4) и (0.7).

По следствию из теоремы Дирихле ([3, с. 30]) существует бесконечно много целочисленных решений p_a системы неравенств (0.4) с показателем $\theta = \frac{k}{l}$. $\mathcal{L}$-алгоритм [1] позволяет строить такие решения. Указанный алгоритм опирается на метод локализации единиц алгебраических числовых полей [4, 5]. Ранее [4] первоначальный вариант $\mathcal{L}$-алгоритма – обратный симплекс-модульный алгоритм – был применен к системам неравенств (0.4) частного вида, когда $l = 1$, т.е. когда система (0.3) состоит из одной формы. Случаю $k = 2$ отвечают тернарные формы, рассмотренные в [6, 7].

§1. Локализация единиц алгебраических полей

1.1. Единицы алгебраических полей. Рассмотрим произвольное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{C} \tag{1.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где r и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [8]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *полную систему единиц*

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t, \tag{1.2}$$

где $t = r + c - 1$. Отметим, что система единиц (1.2) не обязана порождать всю группу единиц поля $\mathbb{F}$. Требуется лишь, чтобы единицы из (1.2) были свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$ и данная группа имела бы максимально возможный *ранг* t.

Зададим отображение

$$\varepsilon \;\mapsto\; x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \dots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|), \dots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \tag{1.3}$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)},\dots,\varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)},\dots,\varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные. Отображение (1.3) будет вложением $x:\mathcal{E}\hookrightarrow\mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon\cdot\varepsilon')=x(\varepsilon)+x(\varepsilon'). \tag{1.4}$$

1.2. Локализация. Из определения отображения (1.3) следует, что образ $\mathcal{L}=x(\mathcal{E})$ группы единиц $\mathcal{E}$ содержится в гиперплоскости

$$P\ =\{x\in\mathbb{R}^{t+1};\ \mathbf{n}\cdot x=0\}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{n}\cdot x$ – скалярное произведение x с вектором $\mathbf{n}=(1,\dots,1)$ размерности $t+1$. Подмножество $\mathcal{L}\subset P$ предствляет собою *полную решетку* в пространстве (1.5) с $\mathbb{Z}$*-базисом* $x(\varepsilon_1),\dots,x(\varepsilon_t)$. Данное множество также образует базис P, но уже относительно $\mathbb{R}$.

Пусть

$$k=k_r+2k_c, \tag{1.6}$$

где $0\leqslant k_r\leqslant r$ и $0\leqslant k_c\leqslant c$ – целые числа, удовлетворяет неравенствам

$$1\leqslant k\leqslant d. \tag{1.7}$$

Определим вектор

$$\mu_k=\mu_{k_r,k_c}=(\underbrace{\dots,\mu,\dots,-1,\dots}_{r},\underbrace{\dots,2\mu,\dots,-2,\dots}_{c}) \tag{1.8}$$

с координатами μ или -1 на первых r местах и соответственно координатами 2μ или -2 на остальных c местах. При этом количество координат μ равно k_r, а 2μ равно k_c. Будем предполагать, что вектор (1.8) принадлежит

$$\mu_k\in P \tag{1.9}$$

– гиперплоскости (1.5). Тогда μ в (1.8) должно быть равным

$$\mu=\frac{d-k+1}{k} \tag{1.10}$$

и при этом в силу (1.7) удовлетворять неравенствам

$$\frac{1}{d}\leqslant\mu\leqslant d. \tag{1.11}$$

Из включения (1.9) следует, что вектор μ_k разложим

$$\mu_k=\beta_1x(\varepsilon_1)+\dots+\beta_tx(\varepsilon_t) \tag{1.12}$$

по базису решетки $\mathcal{L}$ с некоторыми вещественными коэффициентами $\beta_1, \dots, \beta_t$. Теперь воспользуемся одним результатом из [4].

Следствие 1.1. *Пусть* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_t)$ *– любой вещественный вектор и* $\eta > 0$ *– произвольное наперед заданное сколь угодно малое число. Тогда найдется такое натуральное число* q*, что будет выполняться неравенство*

$$\|q\beta\|_s = \|q\beta_1\| + \dots + \|q\beta_t\| \leqslant \eta, \tag{1.13}$$

где $\|x\|$ *обозначает расстояние от* x *до ближайшего целого числа.*

Замечание 1.1. В [10] был построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби. Указанный алгоритм позволяет находить натуральные числа q с условием (1.13).

По следствию 1.1 для любого произвольного наперед заданного сколь угодно малого числа $\eta > 0$ найдутся такие целые числа $q \geqslant 1$ и $p_1, \dots, p_t$, что будет выполняться неравенство

$$|q\beta - p|_s = |q\beta_1 - p_1| + \dots + |q\beta_t - p_t| \leqslant \eta \tag{1.14}$$

в метрике $|x|_s = |x_1| + \dots + |x_t|$ для $x = (x_1, \dots, x_t)$ из $\mathbb{R}^t$.

Выберем единицу

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t}. \tag{1.15}$$

Для нее, согласно свойству (1.4), имеем

$$x(\zeta) = p_1 x(\varepsilon_1) + \dots + p_t x(\varepsilon_t). \tag{1.16}$$

Из (1.8) и (1.12) следует равенство

$$q\mu_k = q\beta_1 x(\varepsilon_1) + \dots + q\beta_t x(\varepsilon_t),$$

из которого и (1.16) находим разность

$$q\mu_k - x(\zeta) = (q\beta_1 - p_1)x(\varepsilon_1) + \dots + (q\beta_t - p_t)x(\varepsilon_t).$$

Запишем векторы

$$x(\varepsilon_i) = (x_1(\varepsilon_i), \dots, x_{t+1}(\varepsilon_i))$$

в координатах пространства $\mathbb{R}^{t+1}$. Тогда разность векторов $q\mu_k - x(\zeta)$ в силу (1.14) оценивается как

$$|q\mu_k - x(\zeta)|_s \leqslant \eta', \tag{1.17}$$

где справа обозначили $\eta' = \eta\,(t+1)\max_\varepsilon$ и

$$\max_\varepsilon = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t \\ 1 \leqslant j \leqslant t+1}} |x_j(\varepsilon_i)|. \tag{1.18}$$

Если ввести обозначение

$$\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_{t+1}) = x(\zeta) - q\mu_k,$$

то для вектора $x(\zeta)$ получим представление

$$x(\zeta) = q\mu_k + \varrho, \tag{1.19}$$

при этом координаты вектора ϱ по (1.17) удовлетворяют неравенствам

$$|\varrho_1| \leqslant \eta',\ \ldots,\ |\varrho_t| \leqslant \eta'. \tag{1.20}$$

По определению (1.3) записываем

$$x(\zeta) = (\underbrace{\ln|\zeta^{(1)}|, \ln|\zeta^{(2)}|, \ldots, \ln|\zeta^{(r)}|}_{r}, \underbrace{2\ln|\zeta^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\zeta^{(r+c)}|}_{c}), \tag{1.21}$$

а по (1.8) имеем

$$q\mu_k = (\underbrace{\ldots, q\mu, \ldots, -q, \ldots}_{r}, \underbrace{\ldots, 2q\mu, \ldots, -2q, \ldots}_{c}). \tag{1.22}$$

Для сопряженных значений $\zeta^{(i)}$ единицы ζ в (1.21) введем нумерацию

$$\underbrace{\ldots, \zeta^{(i_+)}, \ldots, \zeta^{(i_-)}, \ldots}_{r}, \quad \underbrace{\ldots, \zeta^{(j_+)}, \ldots, \zeta^{(j_-)}, \ldots}_{c} \tag{1.23}$$

в соответствии с координатами вектора (1.22). В этой нумерации сравнивая координаты векторов (1.21), (1.22) и используя (1.19), приходим к следующим формулам

$$\begin{aligned} \ln|\zeta^{(i_+)}| &= q\mu + \varrho_{i_+}, \quad \ln|\zeta^{(i_-)}| = -q + \varrho_{i_-}, \\ \ln|\zeta^{(j_+)}| &= q\mu + \varrho_{j_+}, \quad \ln|\zeta^{(j_-)}| = -q + \varrho_{j_-}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Сделав замену

$$\ln\zeta_+ = q\mu$$

в формулах (1.24), имеем

$$\begin{aligned} \ln|\zeta^{(i_+)}| &= \ln\zeta_+ + \varrho_{i_+}, \quad \ln|\zeta^{(i_-)}| = \ln\zeta_+^{-1/\mu} + \varrho_{i_-}, \\ \ln|\zeta^{(j_+)}| &= \ln\zeta_+ + \varrho_{j_+}, \quad \ln|\zeta^{(j_-)}| = \ln\zeta_+^{-1/\mu} + \varrho_{j_-} \end{aligned} \tag{1.25}$$

или без логарифмов –

$$\begin{aligned} |\zeta^{(i_+)}| &= \zeta_+^{1+\theta_{i_+}}, \quad |\zeta^{(i_-)}| = \zeta_+^{-1/\mu+\theta_{i_-}}, \\ |\zeta^{(j_+)}| &= \zeta_+^{1+\theta_{j_+}}, \quad |\zeta^{(j_-)}| = \zeta_+^{-1/\mu+\theta_{j_-}}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

где
$$\theta_i = \varrho_i/\ln\zeta_+,$$
при этом ϱ_i удовлетворяют неравенствам (1.20).

В [1] было доказано следующее

Предложение 1.1. *Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ – некоторая полная система единиц (1.2) алгебраического поля $\mathbb{F}$ из (1.1) степени $d+1$, ζ – единица (1.15), зависящая от $\eta > 0$, и $\zeta^{(i)}$ – ее сопряженные; и пусть параметр k из (1.6) удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant k \leqslant d$. Тогда существует такая константа $\eta_\varepsilon > 0$, зависящая от выбора системы единиц ε, что для*
$$0 < \eta < \eta_\varepsilon, \tag{1.27}$$
выполняются следующие свойства.

1) *Модули сопряженных $\zeta^{(i)}$ вычисляются по формулам (1.26) с показателями*
$$|\theta_i| \leqslant c_\varepsilon \eta, \tag{1.28}$$
где константа $c_\varepsilon > 0$ не зависит от выбора параметра η из (1.27).

2) *Сопряженные $\zeta^{(i)}$ распределяются по группам*
$$\begin{aligned} &|\zeta^{(i_+)}| > 1, \quad |\zeta^{(i_-)}| < 1, \\ &|\zeta^{(j_+)}| > 1, \quad |\zeta^{(j_-)}| < 1. \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.3. Локализованные единицы. Числа
$$\zeta = \zeta_{k,\eta} \tag{1.30}$$
будем называть *локализованными единицами* с параметрами k из (1.6), (1.7) и η из интервала (1.27). Их основное свойство состоит в том, что их сопряженные $\zeta^{(i)}$ распределяются по группам (1.29) и модули $|\zeta^{(i)}|$ содержатся соответственно в двух окрестностях
$$\begin{aligned} \zeta_+ - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(i_+)}| \leqslant \zeta_+ + \delta_\eta, \quad \zeta_+ - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(j_+)}| \leqslant \zeta_+ + \delta_\eta, \\ \zeta_+^{\frac{-1}{\mu}} - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(i_-)}| \leqslant \zeta_+^{\frac{-1}{\mu}} + \delta_\eta, \quad \zeta_+^{\frac{-1}{\mu}} - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(j_-)}| \leqslant \zeta_+^{\frac{-1}{\mu}} + \delta_\eta, \end{aligned} \tag{1.31}$$
где $\zeta_+ > 1$ не зависит от выбора параметра η из (1.27) и величена отклонения $\delta_\eta \downarrow 0$, если $\eta \to 0$. Свойство локализации (1.31) единиц ζ вытекает из формул (1.26) и неравенств (1.27), (1.28).

Обозначим через
$$\mathcal{E}_{k,\eta} \subset \mathcal{E} \tag{1.32}$$

подмножество всех единиц ζ из группы $\mathcal{E}$, удовлетворяющих условию (1.29). Из свойства (1.4) следует замкнутость множества $\mathcal{E}_{k,\eta}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{E}_{k,\eta}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{E}_{k,\eta}$. Поэтому множество $\mathcal{E}_{k,\eta}$ образует *полугруппу* без единицы, поскольку 1 не обладает свойством (1.29).

Пусть элемент α принадлежит алгебраическому полю $\mathbb{F}$ из (1.1) и k – параметр (1.6), (1.7). Предположим, что α имеет степень $\deg(\alpha) < d+1$. Здесь *степень* $\deg(\alpha)$ числа α определяется равенством

$$\deg(\alpha) = \deg \mathbb{Q}(\alpha), \tag{1.33}$$

где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\alpha) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$. Тогда найдутся такие $l \neq m$, что имеет место равенство

$$\alpha^{(l)} = \alpha^{(m)}. \tag{1.34}$$

Кроме того предположим, что сопряженные $\alpha^{(i)}$ для α распределяются по группам

$$\begin{aligned} &|\alpha^{(i_+)}| > 1, \quad |\alpha^{(i_-)}| < 1, \\ &|\alpha^{(j_+)}| > 1, \quad |\alpha^{(j_-)}| < 1 \end{aligned} \tag{1.35}$$

аналогично (1.29). Скажем, что элемент α *согласован* с параметром k, если свойства (1.34) и (1.35) не противоречат друг другу для всех $l \neq m$.

Предложение 1.2. *Если выполнены условия предложения* 1.1 *и ранг* $t \geqslant 1$, *то*

1) *полугруппа* $\mathcal{E}_{k,\eta} \neq \emptyset$;

2) *любая единица* $\zeta \in \mathcal{E}_{k,\eta}$, *несогласованная с параметром* k, *имеет степень*

$$\deg(\zeta) = d + 1. \tag{1.36}$$

Доказательство. см. [1]. □

§2. Модульные $\mathcal{L}$-матрицы

2.1. Модули. Обозначим через

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{k,\eta} \subset \mathcal{E}_{k,\eta} \tag{2.1}$$

подмножество всех единиц ζ из полугруппы (1.32), несогласованных с параметром k, и назовем их *$\mathcal{L}$-единицами.* Если $\zeta \in \mathcal{L}$, то по предложению 1.2 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F}$ с полем (1.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{2.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta: \;\; x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{2.3}$$

Из определения (2.2) вытекает, что отображение (2.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется унимодулярная целочисленная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{2.4}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей представления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

2.2. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d] \tag{2.6}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (2.6), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{2.7}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (2.6) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Из (2.6) и (2.7), в частности, следует иррациональность точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$, а значит, полная точка α имеет степень

$$\deg \alpha = d + 1. \tag{2.8}$$

Вектор или точку α назовем *иррациональными*, если выполняется условие:

$$\textit{числа } 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \textit{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{2.10}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

2.3. Модульные матрицы. Воспользуемся (2.10) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (2.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{2.12}$$

с рациональной матрицей $M_\alpha = TU_\zeta T^{-1}$, сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (2.6) матрицу, обладающую свойством (2.12), назовем *модульной матрицей*.

2.4. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T) = t \tag{2.13}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{2.14}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

В [1] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Если $\mathcal{M}_\alpha$ – произвольный полный модуль* (2.6) *из поля $\mathbb{F}$, t – уровень* (2.13) *матрицы T и ν – показатель* (2.14) *унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t, то* 1) *матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{2.15}$$

является унимодулярной; 2) *имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{2.16}$$

где $\widehat{\alpha}$ – столбец (2.11) *и*

$$\lambda = \zeta^\nu \tag{2.17}$$

является $\mathcal{L}$-единицей из множества (2.1).

Матрицу P_α из (2.15) назовем *унимодулярной модульной матрицей.* Если при этом ζ является $\mathcal{L}$-единицей, то P_α будем также называть *модульной $\mathcal{L}$-матрицей* или кратко – *$\mathcal{L}$-матрицей.*

§3. Оценки линейных форм

3.1. Разложение модульной $\mathcal{L}$-матрицы. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (2.11) и $\widehat{\zeta}$ из (2.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{3.1}$$

– порядка $d+1$. Матрица Z невырождена и в силу равенства (2.10) можем записать $A = TZ$. Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная $\mathcal{L}$-матрица (2.15). Тогда из равенства (2.16) получаем соотношение

$$\mathrm{P}_\alpha A = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{3.3}$$

3.2. Итерации целочисленных векторов. Определим векторы p_a для $a = 0, 1, 2, \ldots$, записанные в виде столбцов

$$p_a = \begin{pmatrix} p_{a,1} \\ \vdots \\ p_{a,d+1} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

через итерации

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha p_{a-1}, \tag{3.5}$$

где p_0 – произвольный ненулевой целочисленный вектор. Повторяя несколько раз, получаем

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^a p_0. \tag{3.6}$$

Из (3.2), (3.3) и (3.6) следует явное представление

$$p_a = \begin{pmatrix} {\lambda^{(1)}}^a a_{1,1} + \cdots + {\lambda^{(d+1)}}^a a_{1,d+1} \\ \vdots \\ {\lambda^{(1)}}^a a_{d+1,1} + \cdots + {\lambda^{(d+1)}}^a a_{d+1,d+1} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

с некоторыми коэффициентами a_{ij}, не зависящими от a. Отсюда выводим неравенства

$$|p_{a,i}| \leqslant |\lambda^{(1)}|^a |a_{i,1}| + \cdots + |\lambda^{(d+1)}|^a |a_{i,d+1}| \tag{3.8}$$

для $i = 1, \ldots, d+1$.

Лемма 3.1. *Пусть векторы p_a определены формулой* (3.6). *Тогда для них имеет место неравенство*

$$|p_a|_s \leqslant c_{\alpha,p_0}\, \lambda_{\max}^a \tag{3.9}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь обозначили

$$|p_a|_s = |p_{a,1}| + \cdots + |p_{a,d+1}| \tag{3.10}$$

– s-метрику в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$,

$$\lambda_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant d+1} |\lambda^{(i)}| \tag{3.11}$$

и c_{α,p_0} – константу, не зависящую от номера итерации a.

Доказательство. Это следует непосредственно из неравенств (3.8). $\square$

3.3. Линейные формы. Выделим в $\mathbb{R}^{d+1}$ подпространства

$$A_+,\ A_- \subset \mathbb{R}^{d+1}, \tag{3.12}$$

натянутые соответственно на векторы

$$\begin{matrix} \widehat{\alpha}^{(i_+)}, & \widehat{\alpha}_+^{(j_+)}, & \widehat{\alpha}_-^{(j_+)}, \\ \widehat{\alpha}^{(i_-)}, & \widehat{\alpha}_+^{(j_-)}, & \widehat{\alpha}_-^{(j_-)}, \end{matrix} \tag{3.13}$$

где

$$\widehat{\alpha}_+^{(j)} = \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}^{(j)} + \bar{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \quad \widehat{\alpha}_-^{(j)} = \frac{1}{2i}(\widehat{\alpha}^{(j)} - \bar{\widehat{\alpha}}^{(j)}). \tag{3.14}$$

Так как столбцы матрицы A из (3.1) образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, то векторы (3.13) являются базисами подпространств $A_+,\ A_-$ и они разлагают пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ в прямую сумму $\mathbb{R}^{d+1} = A_+ \oplus A_-$. Обозначим через

$$A_+^{\perp} \subset \mathbb{R}^{d+1} \tag{3.15}$$

подпространство, ортогональное $A_+^{\perp}\ \perp A_+$ к A_+ относительно обычного (покоординатного) скалярного произведения.

От комплексной матрицы A перейдем к *вещественной матрице*

$$A_{\mathbb{R}} = (\dots \widehat{\alpha}^{(i)} \dots \widehat{\alpha}_+^{(j)} \widehat{\alpha}_-^{(j)} \dots), \tag{3.16}$$

столбцы которой образуют базис вещественного пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Разложим вектор p_0 из (3.4) по этому базису

$$p_0 = A_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix} = \dots + x_i \widehat{\alpha}^{(i)} + \dots + (\widehat{\alpha}_+^{(j)} \widehat{\alpha}_-^{(j)}) X_j + \dots, \tag{3.17}$$

где $X_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix}$.

Если $\lambda^{(j)} = |\lambda^{(j)}| (\cos\varphi_j + i \sin\varphi_j)$, то по (3.6) находим

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^a\, p_0 = \dots + x_i {\lambda^{(i)}}^a \widehat{\alpha}^{(i)} + \dots + |\lambda^{(j)}|^a X_j(a\varphi_j) + \dots, \tag{3.18}$$

где

$$X_j(a\varphi_j) = (\widehat{\alpha}_+^{(j)}\ \widehat{\alpha}_-^{(j)}) \begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x'_j(a\varphi_j) \end{pmatrix},$$

при этом

$$\begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x'_j(a\varphi_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a\varphi_j) & -\sin(a\varphi_j) \\ \sin(a\varphi_j) & \cos(a\varphi_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix}.$$

Из (3.15) и (3.18) для любого вектора $\alpha^\perp \in A_+^\perp$ имеем

$$p_a \cdot \alpha^\perp = \cdots + x_{i_-} \lambda^{(i_-)^a} \widehat{\alpha}^{(i_-)} \cdot \alpha^\perp + \cdots + |\lambda^{(j_-)}|^a X_{j_-}(a\varphi_{j_-}) \cdot \alpha^\perp + \ldots, \tag{3.19}$$

где

$$X_{j_-}(a\varphi_{j_-}) \cdot \alpha^\perp = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_+^{(j_-)} \cdot \alpha^\perp & \widehat{\alpha}_-^{(j_-)} \cdot \alpha^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j(a\varphi_{j_-}) \\ x'_j(a\varphi_{j_-}) \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2. *Для любого вектора $\alpha^\perp \in A_+^\perp$ определим линейную форму*

$$F_{\alpha^\perp}(x) = \alpha_1^\perp x_1 + \cdots + \alpha_{d+1}^\perp x_{d+1} \tag{3.20}$$

с вещественными коэффициентами $\alpha_i^\perp$, равными координатам вектора $\alpha^\perp$. Тогда значение формы $F_{\alpha^\perp}(p_a)$ в точке p_a из (3.6) *оценивается как*

$$|F_{\alpha^\perp}(p_a)| \leqslant c_{\alpha,\alpha^\perp,p_0}\, \lambda_{\max_-}^a \tag{3.21}$$

с константой $c_{\alpha,\alpha^\perp,p_0}$, не зависящей от номера a, и $0 < \lambda_{\max_-} < 1$, определяемым равенством

$$\lambda_{\max_-} = \max_{1 \leqslant i_-, j_- \leqslant d+1} \{|\lambda^{(i_-)}|, |\lambda^{(j_-)}|\}. \tag{3.22}$$

Доказательство. см. [1]. □

Теорема 3.1. *Пусть $F_{\alpha^\perp}(x)$ – линейная форма* (3.20) *и целочисленные векторы p_a определяются формулой* (3.6). *Тогда выполняется неравенство*

$$|F_{\alpha^\perp}(p_a)| \leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{1/\mu - \varrho}} \tag{3.23}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $\frac{1}{d} \leqslant \mu \leqslant d$ вычисляется по формуле (2.14)*; показатель ϱ удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \varrho \leqslant C_\varepsilon \eta, \tag{3.24}$$

где константа $C_\varepsilon > 0$ не зависит от параметра η из (1.27)*, который можно выбирать сколь угодно малым; константа $C = C_{\alpha,\alpha^\perp,\eta,p_0}$ не зависит от номера итерации a.*

Доказательство. см. [1]. □

§4. Оценка приближений систем линейных форм

4.1. Оценка снизу. Ранее в лемме 3.1 была получена верхняя оценка для $|p_a|_s$. Далее нам потребуется также и нижняя оценка, доказанная в [1].

Лемма 4.1. *Пусть векторы* p_a *определены формулой* (3.6). *Тогда для них имеет место неравенство*

$$|p_a|_s \geqslant c_{p_0,A}\, \lambda_{\min_+}^a \tag{4.1}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$, *где*

$$\lambda_{\min_+} = \min_{1 \leqslant i_+, j_+ \leqslant d+1} \{|\lambda^{(i_+)}|, |\lambda^{(j_+)}|\} > 1 \tag{4.2}$$

и константа $c_{p_0,A} > 0$ *не зависит от номера итерации* a.

4.2. Рекуррентные последовательности. Из матричной итерационной формулы (3.5) выведем рекуррентную формулу для координат целочисленных точек (3.4). Пусть $\mathcal{L}$-матрица P_α имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \cdots - b_1 x - b_0. \tag{4.3}$$

В [9] было доказано следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Столбцы* p_a *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$p_{a+d+1} = b_d\, p_{a+d} + \cdots + b_1\, p_{a+1} + b_0\, p_a \tag{4.4}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ *При этом начальные условия*

$$p_d = \mathrm{P}_\alpha^d\, p_0, \ldots,\;\; p_1 = \mathrm{P}_\alpha\, p_0,\;\; p_0 \tag{4.5}$$

задаются $\mathcal{L}$-*матрицей* P_α *из* (2.15) *и столбцом* p_0, *определенным в* (3.5) *и* (3.6).

4.3. Оценка приближений. Согласно (1.6) и (1.8) пространство $A_+^\perp$ из (3.15) имеет размерность, равную

$$k^\perp = \dim_{\mathbb{R}} A_+^\perp = d + 1 - k \tag{4.6}$$

Поэтому в силу (1.7) и (4.6) размерность $k^\perp$ пространства $A_+^\perp$ изменяется соответственно в границах

$$d \geqslant k^\perp \geqslant 1, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant k \leqslant d. \tag{4.7}$$

Выберем в пространстве $A_+^\perp$ произвольный базис

$$\alpha_1^\perp = (\alpha_{1,1}^\perp, \dots, \alpha_{1,d+1}^\perp), \ \dots, \ \alpha_{k^\perp}^\perp = (\alpha_{k^\perp,1}^\perp, \dots, \alpha_{k^\perp,d+1}^\perp) \tag{4.8}$$

и несколько упрощая правило (3.20) поставим базису (4.8) в соответствие *систему линейных форм*

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \alpha_{1,1}^\perp x_1 + \dots + \alpha_{1,d+1}^\perp x_{d+1}, \\ &\dots \\ F_{k^\perp}(x) &= \alpha_{k^\perp,1}^\perp x_1 + \dots + \alpha_{k^\perp,d+1}^\perp x_{d+1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

с вещественными коэффициентами. Из определения следует, что линейные формы (4.9) образуют базис в пространстве $F_+^\perp$ всех линейных форм $F_{\alpha^\perp}(x)$, где $\alpha^\perp \in A_+^\perp$.

Теорема 4.1. *Пусть в пространстве* $F_+^\perp$ *задана некоторая система вещественных линейных форм* (4.9) *и целочисленные точки* $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$ *определяются рекуррентным соотношением* (4.4) *с начальными условиями* (4.5). *Тогда в обозначениях теоремы* 3.1 *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется система неравенств*

$$\begin{aligned} |F_1(p_a)| &\leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}}, \\ &\dots \\ |F_{k^\perp}(p_a)| &\leqslant \frac{C}{|p_a|_s^{\theta-\varrho}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ *В неравенствах* (4.10) *показатель* $\theta = \frac{k}{k^\perp}$ *с отклонением* $\varrho > 0$, *которое можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора матрицы* P_α *в* (2.16); *константа* C *не зависит от номера итерации* a.

2. *Величина* $|p_a|_s = |p_{a,1}| + \dots + |p_{a,d+1}|$ *имеет экспоненциальный рост при* $a \to +\infty$.

Доказательство. см. [1]. □

Алгоритм построения целочисленных решений $p_a = (p_{a,1}, \dots, p_{a,d+1})$ систем линейных неравенств вида (4.10), разработанный в п.п. 1-4, называется *$\mathcal{L}$-алгоритмом.* Как мы видели, данный алгоритм опирается на метод локализации единиц алгебраических числовых полей $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta)$, изложенный в п. 1.

§5. Дробно-матричные преобразования

5.1. Правое дробно-матричное преобразоване. Обозначим

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ E_k \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ & \dots & \\ \alpha_{l1} & \dots & \alpha_{lk} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

– $(l \times k)$-матрица и E_k – единичная матрица порядка k. Далее будем полагать $l = k^{\perp}$ и, таким образом, матрица (5.1) имеет размеры $(d+1) \times k$, так как $d + 1 = k + k^{\perp}$. Умножим слева $\widehat{\alpha}$ на матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, разбитую на блоки A, B, C, D так, что на диагонали стоят квадратные матрицы A и D соответственно размеров l и k. Производя преобразования, получим

$$M\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} A\alpha + B \\ C\alpha + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\alpha + B)(C\alpha + D)^{-1} \\ E_k \end{pmatrix} \cdot (C\alpha + D) \tag{5.4}$$

при условии, если $\det(C\alpha + D) \neq 0$. Воспользуемя сокращениями

$$M\langle\alpha\rangle = (A\alpha + B)(C\alpha + D)^{-1}, \quad J(M, \alpha) = C\alpha + D \tag{5.5}$$

и перепишем равенство (5.4) в виде

$$M\widehat{\alpha} = \widehat{M\langle\alpha\rangle} \cdot J(M, \alpha). \tag{5.6}$$

Как следует из предыдущего, данная формула выполняется для любой матрицы M из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию

$$j(M, \alpha) = \det J(M, \alpha) \neq 0. \tag{5.7}$$

5.2. Левое дробно-матричное преобразование. Нам потребуется еще транспонированный вариант матричного равенства (5.6). Теперь за основу выбираем матрицу

$$\widetilde{\alpha} = (-E_l\ \alpha) \tag{5.8}$$

размера $l \times (d+1)$, которую умножим справа на матрицу M, снова разбитую на блоки, как и в (5.3). Поскольку такое разбиение остается согласованным с матрицей $\widetilde{\alpha}$, то имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} M &= (-A + \alpha C \mid -B + \alpha D) \\ &= (A - \alpha C) \cdot (-E_l \mid (A - \alpha C)^{-1}(-B + \alpha D)), \end{aligned} \tag{5.9}$$

если $\det(A - \alpha C) \neq 0$. Обозначим

$$\langle \alpha \rangle M = (A - \alpha C)^{-1}(-B + \alpha D), \quad I(\alpha, M) = A - \alpha C \tag{5.10}$$

и перепишем равенство (5.9) в сокращенном виде

$$\widetilde{\alpha} M = I(\alpha, M) \cdot \widetilde{\langle \alpha \rangle M}. \tag{5.11}$$

Эта формула выполняется для матриц M из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$i(\alpha, M) = \det I(\alpha, M) \neq 0. \tag{5.12}$$

5.3. Свойства дробно-матричных отображений. Формулы (5.5) и (5.10) задают два семейства отображений

$$M\langle\rangle\colon\ \alpha \mapsto M\langle \alpha \rangle, \qquad \langle\rangle M\colon\ \alpha \mapsto \langle \alpha \rangle M. \tag{5.13}$$

Будем их соответственно называть *правым* и *левым дробно-матричными* отображениями. Отбражения (5.13) имеют одну и ту же область определения $\mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R})$ – множество матриц размера $l \times k$ с вещественными коэффициентами. Здесь на матрицы $M \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ налагаются ограничения $j(M, \alpha) \neq 0$ для правых отбражений $M\langle\rangle$ и $i(\alpha, M) \neq 0$ для левых $\langle\rangle M$.

Дробно-матричные отбражения (5.13) обладают следующими свойствами:

1) *ассоциативность*

$$M_1 M_2 \langle \alpha \rangle = M_1 \langle M_2 \langle \alpha \rangle \rangle, \quad \langle \alpha \rangle M_1 M_2 = \langle \langle \alpha \rangle M_1 \rangle M_2; \tag{5.14}$$

2) *существование обратных отображений*

$$\begin{aligned} \alpha \mapsto \alpha' = M\langle \alpha \rangle \ &\Leftrightarrow\ \alpha' \mapsto \alpha = M^{-1}\langle \alpha' \rangle \\ \alpha \mapsto \alpha' = \langle \alpha \rangle M \ &\Leftrightarrow\ \alpha' \mapsto \alpha = \langle \alpha' \rangle M^{-1}; \end{aligned} \tag{5.15}$$

3) *цепное правило для матричных факторов-автоморфности*

$$\begin{aligned} J(M_1 M_2, \alpha) &= J(M_1, M_2\langle \alpha \rangle) \cdot J(M_2, \alpha), \\ I(\alpha, M_1 M_2) &= I(\alpha, M_1) \cdot I(\langle \alpha \rangle M_1, M_2). \end{aligned} \tag{5.16}$$

В перечисленных выше свойствах предполагается корректность всех присутствующих объектов в (5.14)-(5.16). Свойства (5.14) и (5.16) проверяются прямыми вычислениями на основе определений (5.5) и (5.10), а связь обратных отображений с обратными матрицами (5.15) выводится из свойства ассоциативности (5.14).

По аналогии с модулярными формами используемые в (5.16) отображения

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R}) \ &\ni (M,\alpha) \mapsto J(M,\alpha) \in \ \mathrm{Mat}_k(\mathbb{R}), \\ \mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) \ &\ni (\alpha, M) \mapsto I(\alpha, M) \in \ \mathrm{Mat}_l(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{5.17}$$

назовем *матричными факторами-автоморфности*, где через $\mathrm{Mat}_k(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Mat}_l(\mathbb{R})$ обозначили квадратные матрицы соответствующих размеров. Согласно определениям (5.7) и (5.12) факторам-автоморфности (5.17) отвечают

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R}) \ &\ni (M,\alpha) \mapsto j(M,\alpha) \in \ \mathbb{R}, \\ \mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R}) \ &\ni (\alpha, M) \mapsto i(\alpha, M) \in \ \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.18}$$

– *одномерные факторы-автоморфности* или сокращенно – *факторы-автоморфности*. Цепное правило (5.16) для них также сохраняется

$$\begin{aligned} j(M_1M_2,\alpha) &= j(M_1, M_2\langle\alpha\rangle)\cdot j(M_2,\alpha), \\ i(\alpha, M_1M_2) &= i(\alpha, M_1)\cdot i(\langle\alpha\rangle M_1, M_2). \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.4. Двойственность дробно-матричных отображений. Симметрия свойств(5.14)-(5.16) свитетельствует о существовании некоторой двойственности между правыми $M\langle\rangle$ и левыми $\langle\rangle M$ дробно-матричными отображениями.

Предложение 5.1. *Дробно-матричные отображения* (5.13) *связаны между собою формулой двойственности*

$$\langle\alpha\rangle M = M^{-1}\langle\alpha\rangle \tag{5.20}$$

для всех матриц $\alpha \in \mathrm{Mat}_{l\times k}(\mathbb{R})$ *и* $M \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ *при условии, если для них факторы-автоморфности*

$$i(\alpha, M) \neq 0, \quad j(M^{-1},\alpha) \neq 0. \tag{5.21}$$

Доказательство. Заметим, что определенные в (5.1) и (5.8) матрицы $\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ E_k \end{pmatrix}$ и $\widetilde{\alpha} = (-E_l \ \alpha)$ аннигилируют друг друга

$$\widetilde{\alpha}\cdot\widehat{\alpha} = 0. \tag{5.22}$$

Данное свойство также сохраняется

$$\widetilde{\alpha} M \cdot M^{-1} \widehat{\alpha} = 0 \tag{5.23}$$

и для любой матрицы $M \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$. Подставляя вместо произведений $M^{-1}\widehat{\alpha}$ и $\widetilde{\alpha}M$ их выражения из (5.6) и (5.11), получим

$$\widetilde{\alpha} M \cdot M^{-1} \widehat{\alpha} = I(\alpha, M) \cdot (\widetilde{\langle\alpha\rangle M} \cdot \widehat{M^{-1}\langle\alpha\rangle}) \cdot J(M^{-1}, \alpha). \tag{5.24}$$

Из условий на факторы-автоморфности (5.21) следует невырожденность квадратных матриц $I(\alpha, M)$ и $J(M^{-1}, \alpha)$. Поэтому объединяя (5.23) и (5.24), можем записать

$$\widetilde{\langle\alpha\rangle M} \cdot \widehat{M^{-1}\langle\alpha\rangle} = 0. \tag{5.25}$$

Еще раз вспоминая определения матриц (5.1) и (5.8), из соотношения (5.25) (ср. с формулой аннигиляции (5.22)) выводим формулу двойственности (5.20). □

Рассмотрим более подробно формулу двойственности (5.20) для двух наиболее часто встречающихся частных случаев.

Случай $l = 1$, $k = d$. Согласно (5.8) и (5.3), при таких параметрах

$$\widetilde{\alpha} = (-1 \ \alpha) = (-1 \ \alpha_1 \dots \alpha_d) \tag{5.26}$$

и матрица $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ разбивается на блоки

$$A, \quad B = (B_1 \dots B_d), \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_d \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1d} \\ & \dots & \\ D_{d1} & \dots & D_{dd} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

По определению дробно-матричного отображения (5.10) имеем

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle M = {} & (A - C_1\alpha_1 - \dots - C_d\alpha_d)^{-1} \\ & \times (-B_1 + D_{11}\alpha_1 + \ldots + D_{d1}\alpha_d, \ \dots, \ -B_d + D_{1d}\alpha_1 + \ldots + D_{dd}\alpha_d). \end{aligned}$$

Отсюда получаем явную формулу

$$\langle\alpha\rangle M = \left(\frac{-B_1 + D_{11}\alpha_1 + \ldots + D_{d1}\alpha_d}{A - C_1\alpha_1 - \dots - C_d\alpha_d}, \dots, \frac{-B_d + D_{1d}\alpha_1 + \ldots + D_{dd}\alpha_d}{A - C_1\alpha_1 - \dots - C_d\alpha_d} \right) \tag{5.28}$$

для случая $l = 1$, $k = d$, если фактор-автоморфности

$$i(\alpha, M) = A - C_1\alpha_1 - \dots - C_d\alpha_d \neq 0. \tag{5.29}$$

Из формулы (5.28) следует, что в рассматриваемом случае дробно-матричное отображение (5.10) есть не что иное, как многомерный аналог *дробно-линейного* отображения.

Случай $l = d$**,** $k = 1$**.** Данный случай симметричен предыдущему, поэтому лучше начать с дробно-матричного отображения $M\langle\alpha\rangle$, определенного в (5.5). Согласно (5.1) и (5.3) имеем

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{5.30}$$

и матрица $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ разбивается на блоки

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1d} \\ & \dots & \\ A_{d1} & \dots & A_{dd} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{pmatrix}, \ C = (C_1 \dots C_d), \ D. \tag{5.31}$$

Используя (5.30), (5.31) и (5.5), записываем

$$M\langle\alpha\rangle \ = \begin{pmatrix} A_{11}\alpha_1 + \dots + A_{1d}\alpha_d + B_1 \\ \dots \\ A_{d1}\alpha_1 + \dots + A_{dd}\alpha_d + B_d \end{pmatrix} \times (C_1\alpha_1 + \dots + C_d\alpha_d + D)^{-1}$$

и, таким образом,

$$M\langle\alpha\rangle = \begin{pmatrix} (A_{11}\alpha_1 + \ldots + A_{1d}\alpha_d + B_1)/(C_1\alpha_1 + \ldots + C_d\alpha_d + D) \\ \dots \\ (A_{d1}\alpha_1 + \ldots + A_{dd}\alpha_d + B_d)/(C_1\alpha_1 + \ldots + C_d\alpha_d + D) \end{pmatrix}, \tag{5.32}$$

если $l = d$, $k = 1$ и фактор-автоморфности

$$j(M, \alpha) = C_1\alpha_1 + \dots + C_d\alpha_d + D \neq 0. \tag{5.33}$$

Чтобы получить аналог формулы (5.32) для дробно-матричного отображения $\langle\alpha\rangle M$, воспользуемся свойством двойственности из предложения 5.1. Из (5.32) и формулы (5.20) для отображений $\langle\alpha\rangle M$ с матрицами $M \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$ выводим явную формулу

$$\langle\alpha\rangle M = \begin{pmatrix} (A'_{11}\alpha_1 + \ldots + A'_{1d}\alpha_d + B'_1)/(C'_1\alpha_1 + \ldots + C'_d\alpha_d + D') \\ \dots \\ (A'_{d1}\alpha_1 + \ldots + A'_{dd}\alpha_d + B'_d)/(C'_1\alpha_1 + \ldots + C'_d\alpha_d + D') \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned} i(\alpha, M) &= A_1\alpha_1 + \dots + A_d\alpha_d - A \neq 0, \\ j(M^{-1}, \alpha) &= C_1'\alpha_1 + \dots + C_d'\alpha_d + D' \neq 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A = \det A, \ \ A_i = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1d} \\ & \dots & \\ C_1 & \dots & C_d \\ & \dots & \\ A_{d1} & \dots & A_{dd} \end{pmatrix} (i),$$

для $i = 1, \dots, d$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ с разбиением на блоки (5.31) аналогично матрице M.

Итак, из доказанных формул (5.28) и (5.34) следует, что в случаях если $l = d$ или $k = d$, дробно-матричные отображения $M\langle\rangle$ и $\langle\rangle M$ из (5.13) являются многомерными дробно-линейными отображениями. Ранее такие отображения появились в [11, 12].

§6. Дробно-матричные преобразования систем линейных форм

6.1. Приведенные системы линейных форм. Воспользуемся определением (5.8) матрицы $\widetilde{\alpha}$ и рассмотрим следующую *приведенную* систему линейных форм

$$\widetilde{\alpha} \cdot x = \begin{pmatrix} -x_1 + \alpha_{11}x_{l+1} + \dots + \alpha_{1k}x_{d+1} \\ \dots \\ -x_l + \alpha_{l1}x_{l+1} + \dots + \alpha_{lk}x_{d+1} \end{pmatrix}, \ \text{ где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

С помощью матрицы M из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, произведя в системе (6.1) замену переменных

$$x' = Mx, \tag{6.2}$$

получаем

$$\widetilde{\alpha} \cdot x = \widetilde{\alpha} M^{-1} \cdot Mx = I(\alpha, M^{-1}) \ \widetilde{\langle\alpha\rangle M^{-1}} \cdot x'. \tag{6.3}$$

Здесь мы воспользовались формулой преобразования (5.11). Предположим, что фактор-автоморфности

$$i(\alpha, M^{-1}) \neq 0. \tag{6.4}$$

Тогда из (6.3) будет следовать

$$\widetilde{\alpha\,'} \cdot x' = I(\alpha, M^{-1})^{-1}\ \ \widetilde{\alpha} \cdot x, \tag{6.5}$$

где, см. (5.11), слева записана приведенная система линейных форм

$$\widetilde{\alpha\,'} \cdot x' = \widetilde{\langle\alpha\rangle M^{-1}} \cdot x' \tag{6.6}$$

с новыми коэффициентами $\alpha' = \langle\alpha\rangle M^{-1}$.

Предложение 6.1. *Для любой матрицы M из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, для которой фактор-автоморфности $i(\alpha, M^{-1}) \neq 0$, приведенные системы линейных форм* (6.1) *и* (6.6) *связаны неравенством*

$$|\widetilde{\alpha\,'} \cdot x'|_s \leqslant c_{\alpha,M}\ |\widetilde{\alpha} \cdot x|_s, \tag{6.7}$$

где использовано обозначение

$$\begin{aligned} |\widetilde{\alpha} \cdot x|_s = &| - x_1 + \alpha_{11}x_{l+1} + \dots + \alpha_{1k}x_{d+1}|_s + \dots \\ &+| - x_l + \alpha_{l1}x_{l+1} + \dots + \alpha_{lk}x_{d+1}|_s \end{aligned} \tag{6.8}$$

и константа $c_{\alpha,M}$ не зависит от значений переменных x, x' из (6.2).

Доказательство. Это следует из тождества (6.5) и неравенства

$$|A \cdot y|_s \leqslant c_A\ |y|_s \tag{6.9}$$

для s-метрики $|y|_s = |y_1| + \dots + |y_l|$ в пространстве $\mathbb{R}^l$, где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}$ и матрица $A \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{R})$. □

6.2. Основной результат. После соответсвующей перенумерации переменных $x_1, \dots, x_{d+1}$ систему линейных форм в (4.9) можно выбрать приведенной (6.1), т.е. имеющей вид

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -x_1 + \alpha_{11}x_{l+1} + \dots + \alpha_{1k}x_{d+1}, \\ &\dots \\ F_l(x) &= -x_l + \alpha_{l1}x_{l+1} + \dots + \alpha_{lk}x_{d+1}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

где обозначили $l = k^{\perp}$ и, значит, $l + k = d + 1$.

Теорема 6.1. *Пусть M принадлежит множеству квадратных матриц $\mathrm{Mat}^{\times}_{d+1}(\mathbb{Z})$ порядка $d+1$ с целыми коэффициентами и определителем $\det M \neq 0$ и*

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1k} \\ & \dots & \\ \alpha'_{l1} & \dots & \alpha'_{lk} \end{pmatrix} = M\langle\alpha\rangle \tag{6.11}$$

– правое дробно-матричное преобразование (5.5) матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ & \dots & \\ \alpha_{l1} & \dots & \alpha_{lk} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов линейных форм (6.10), и пусть при этом факторы-автоморфности

$$i(\alpha, M^{-1}) \neq 0, \quad j(M,\alpha) \neq 0. \tag{6.12}$$

Далее, пусть целочисленные точки $p'_a = \begin{pmatrix} p'_{a,1} \\ \vdots \\ p'_{a,d+1} \end{pmatrix}$ определяются рекуррентным соотношением (4.4) с начальными условиями

$$p'_d = M\mathrm{P}^d_\alpha p_0\,, \dots, \quad p'_1 = M\mathrm{P}_\alpha p_0, \quad p'_0 = Mp_0, \tag{6.13}$$

где P_α является $\mathcal{P}$-матрицей из (2.15) и p_0 – произвольный ненулевой целочисленный столбец. Тогда в обозначениях теоремы 4.1 справедливы следующие утверждения.

1. *Выполняется система неравенств*

$$\begin{gathered} |-p'_{a,1} + \alpha'_{11}p'_{a,l+1} + \dots + \alpha'_{1k}p'_{a,d+1}| \leqslant \frac{C}{|p'_a|_s^{\theta-\varrho}}, \\ \dots \\ |-p'_{a,l} + \alpha'_{l1}p'_{a,l+1} + \dots + \alpha'_{lk}p'_{a,d+1}| \leqslant \frac{C}{|p'_a|_s^{\theta-\varrho}}, \end{gathered} \tag{6.14}$$

для всех $a = 0,1,2,\dots$ Здесь $l+k = d+1$ и показатель $\theta = \frac{k}{l}$ с отклонением $\varrho > 0$, которое можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора $\mathcal{L}$-матрицы P_α в (2.16); константа C не зависит от номера итерации a.

2. *Величина $|p'_a|_s = |p'_{a,1}| + \dots + |p'_{a,d+1}|$ имеет экспоненциальный рост при $a \to +\infty$.*

Доказательство. Основываемся на использовании теоремы 4.1 и предложения 6.1. Приведенную систему линейных форм (6.10) можно записать в матричном виде $F(x) = \widetilde{\alpha} \cdot x$. По теореме 4.1 для таких систем все утверждения справедливы. Воспользовавшись преобразованиями (6.1)–(6.6) от $F(x)$ можно перейти к приведенной системе форм $F'(x) = \widetilde{\alpha'} \cdot x'$, где $\alpha' = \langle\alpha\rangle M^{-1}$ и $x' = Mx$. По условию (6.12) факторы-автоморфности $i(\alpha, M^{-1})$ и $j(M, \alpha)$ ненулевые, поэтому применяя формулу двойственности $\langle\alpha\rangle M^{-1} = M\langle\alpha\rangle$ из (5.20) можем коэффициенты $\alpha' = \langle\alpha\rangle M^{-1}$ записать как $\alpha' = M\langle\alpha\rangle$, т.е. в виде (5.9).

Добавим еще, что при линейном преобразовании $p_a \mapsto p'_a = Mp_a$ рекуррентное соотношение (4.4) сохраняется и для столбцов p'_a, а начальные условия (4.5) естественно заменяются условиями (6.13). Кроме того, величины $|p_a|_s$ и $|p'_a|_s$ асимптотически эквивалентны $|p_a|_s \asymp |p'_a|_s$ при $a \to +\infty$.

После приведенных замечаний видно, что теорема 6.1 является следствием из теоремы 4.1 и предложения 6.1. $\square$

Замечание 6.1. Как было показано в (5.28), (5.32) и (5.34), в случае $k = 1$ или $l = 1$ дробно-матричное преобразование $M\langle\alpha\rangle$ в (5.9) является дробно-линейным преобразованием. В силу формул (5.29) и (5.35) требования (6.12) на факторы-автоморфности $i(\alpha, M^{-1})$ и $j(M, \alpha)$ будут выполняться для всех матриц $M \in \mathrm{Mat}^{\times}_{d+1}(\mathbb{Z})$, если предположить, что числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$. Здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ обозначают соответственно элементы столбца

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{l1} \end{pmatrix}$$

или строки $\alpha = (\alpha_{11} \ \ldots \ \alpha_{1k})$.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *$\mathcal{L}$-алгоритм аппроксимации диофантовых систем линейных форм.* — Алгебра и анализ **490** (2020), 25–48.
2. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* Четвертое изд. М.: Наука, 1978, 112 с.
3. В. Шмидт, *Диофантовы приближения.* М.: Мир, 1983, 228 с.
4. В. Г. Журавлев, *Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 104–134.
5. В. Г. Журавлев, *Диофантовы приближения линейных форм.* — Алгебра и анализ, **490** (2020), 5–24.

6. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms.* — Mathematics of computation **25** (1971), No. 113, 163–180.
7. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms. II.* — Mathematics of computation **26** (1972), No. 120, 977–993.
8. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* Третье изд. М.: Наука, 1985.
9. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
10. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 1–20.
11. В. Г. Журавлев, *Дробно-линейная инвариантность многомерных цепных дробей.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 42–76.
12. В. Г. Журавлев, *Дробно-линейная инвариантность симплекс-модульного алгоритма разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 77–103.

Zhuravlev V. G. Fractional-matrix invariance of Diophantine systems of linear forms.

It is known that under linear fractional unimodular transformations $\alpha \mapsto \alpha' = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ the real numbers α and α' keep their expansions in the usual continued fractions up to a finite number of initial incomplete quotients. For this reason, these numbers have the same approximation speeds by their convergent fractions. This result is generalized to $(l \times k)$-matrices α. It is proved, if $\alpha \mapsto \alpha' = (A\alpha + B) \cdot (C\alpha + D)^{-1}$ for some fractional matrix unimodular transformation, then matrices α and α' have the same approximation speeds too. To prove this result we used the $\mathcal{L}$-algorithm based on the method of localizing units in algebraic number fields.

Владимирский государственный университет, 600024, Владимир, ул. Строителей, 11, Россия

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 19 декабря 2020 г.