Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Ю. В. Якубович, О. В. Русаков

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ СПЕЦИАЛЬНОЙ РАНДОМИЗАЦИЕЙ ВРЕМЕНИ

Введение

Пусть μ – случайная неотрицательная мера с независимыми значениями на попарно дизъюнктных борелевских подмножествах $\mathbb{R}$, распределение которой инвариантно относительно сдвигов (см. [12, гл. 8]). (В дальнейшем мы считаем, что все случайные объекты заданы на одном вероятностном пространстве, и не оговариваем это отдельно.) Меру μ можно описывать посредством её "функции распределения" – случайной функции аргумента $t \in \mathbb{R}$

$$S(t) := \begin{cases} \mu(0,t], & t \geqslant 0, \\ -\mu(t,0], & t < 0. \end{cases}$$

Процесс S в этом случае будет представлять собой *субординатор*, т.е. непрерывный справа и имеющий пределы слева неубывающий процесс с независимыми стационарными приращениями, который равен нулю при $t = 0$ почти наверное (п.н.). Обычно субординаторы определяют для $t \geqslant 0$, нас же будет интересовать его обобщение на $t \in \mathbb{R}$ в указанном смысле. Тем не менее, распределения приращений процесса S в силу стационарности и независимости определяются преобразованием Лапласа значения процесса при каком-либо положительном t

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-uS(t)}] = \exp(-t\Phi(u)), \qquad t > 0,\ u \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь *экспонента Лапласа* $\Phi(u)$, согласно формуле Леви–Хинчина (см., напр., [9, §21]), определяется по *сносу* $\beta \geqslant 0$ и *мере Леви* Λ, заданной

Ключевые слова: псевдо-пуассоновский процесс, стационарный процесс, спектральные свойства, субординатор, сложный процесс Пуассона.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No. 20-01-00646 (A).

на борелевских подмножествах $(0,\infty)$, как

$$\Phi(u) := \beta u + \int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-ux})\Lambda(dx). \tag{2}$$

Напомним, что мера Леви Λ – конечная или бесконечная мера, такая, что интеграл в (2) сходится при некотором, или, эквивалентно, при всех $u>0$. Если $\Lambda((0,\infty))<\infty$, то процесс S представляет собой сложный пуассоновский процесс с положительными скачками (см., напр., [9, §4]), если же $\Lambda((0,\infty))=\infty$, то моменты скачков процесса S образуют случайное счётное всюду плотное подмножество $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$.

Рассмотрим независимый от μ пуассоновский точечный процесс Π^* на $\mathbb{R}$ постоянной интенсивности, которую мы, не ограничивая общности, будем считать единичной. Его также можно описывать “функцией распределения”

$$\Pi(t) := \begin{cases} \#(\Pi^*\cap(0,t]), & t \geqslant 0,\\ -\#(\Pi^*\cap(t,0]), & t<0, \end{cases}$$

которая представляет собой двусторонний пуассоновский процесс ($\#A$ – количество элементов в множестве A). Нас будет интересовать композиция случайных процессов $\Pi(S(t))$, $t\in\mathbb{R}$, которая, как нетрудно видеть, представляет собой целочисленный субординатор. Нетрудно найти преобразование Лапласа субординированного пуассоновского процесса

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-u\Pi(S(t))}\big] &= \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-uk}\,\mathbb{E}\Big[\frac{S(t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-S(t)}\Big]\\ &= \mathbb{E}\big[\exp\big(-S(t)(1-\mathrm{e}^{-u})\big)\big]\\ &= \exp\big(-t\Phi(1-\mathrm{e}^{-u})\big), \qquad u\geqslant 0,\ t\geqslant 0, \end{aligned} \tag{3}$$

в согласии с общей теории субординации процессов Леви (см. книгу Бохнера [1] или Сато [9, §30]).

Использование субординаторов для случайной замены времени в независимом пуассоновском процессе встречается в ряде современных работ для получения целочисленных случайных процессов со специальными свойствами. Например, в работах [3, 5, 6] изучаются так называемые пространственно-дробные пуассоновские процессы, связанные с операцией дробного дифференцирования, получаемые подстановкой устойчивого субординатора в независимый пуассоновский процесс. Другие типы субординаторов также использовались в таком контексте, см., напр., [2, 4]. Эта же техника была недавно применена первым автором для чисто вероятностного доказательства формулы Леви–Хинчина [10].

Наконец, рассмотрим независимую от Π и S двустороннюю последовательность случайных величин $\boldsymbol{\xi} := (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, про которую мы будем предполагать, что она стационарна в широком смысле (и, значит, $\mathbb{E}\xi_n$ и $\mathbb{E}\xi_n^2$ конечны и не зависят от n). Часто рассматривают комплекснозначные случайные величины (ξ_n) в качестве членов стационарной последовательности, однако мы ограничимся вещественными последовательностями $\boldsymbol{\xi}$ как наиболее интересными с точки зрения приложений, поскольку использование комплексных случайных величин приводит в рассматриваемой нами задаче к усложнению доказательств. Не ограничивая общности, предположим, что $\mathbb{E}\xi_n = 0$.

Определение 1. Процесс с непрерывным временем

$$\psi(t) := \xi_{\Pi(S(t))}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

полученный рандомизацией (в смысле [16, X.7]) индекса последовательности $\boldsymbol{\xi}$, будем называть *ПСИ-процессом*, или процессом пуассоновского случайного индекса, последовательность $\boldsymbol{\xi}$ – *ведомой* последовательностью, а процесс $\Pi(S(t))$ – *ведущим* процессом.

Нетрудно видеть, что если ведомая последовательность стационарна (в узком или широком смысле), то $\psi(t)$ будет стационарным процессом (в узком или широком смысле) с непрерывным временем.

Заметим, что определённый интерес представляет даже вырожденный случай, когда субординатор $S(t) = \beta t$ представляет собой неслучайный линейный снос. Это соответствует ПСИ-процессу, в котором стационарная последовательность подчинена независимому пуассоновскому процессу интенсивности β. Эта модель описана в работе [15], но не изучена подробно. Для случая, когда ведомая последовательность состоит из независимых одинаково распределённых случайных величин, а $S(t) = \beta t$, ПСИ-процессы изучались в работе второго автора [13]. Для независимых ведомых величин рассматривались и другие способы случайной замены времени, например, линейной замены времени со случайным коэффициентом [14].

Основная цель настоящей работы – найти взаимосвязь между спектральными характеристиками ведомой последовательности и заданного формулой (4) ПСИ-процесса. Важный частный случай, когда случайные величины (ξ_n) независимы и одинаково распределены, рассмотрен в работе [8].

В разделе 1 мы выводим нужные нам факты о ведущем процессе $\Pi(S(t))$. В разделе 2 рассматривается общий случай стационарной ведомой последовательности. При работе со спектральными характеристиками стационарных процессов естественным образом появляются функции комплексного аргумента, и применяемая нами техника основана на комплексном анализе. Она позволяет выразить ковариационную функцию (теорема 2) и спектральную меру (теорема 3) ПСИ-процесса в виде интегралов по спектральной мере ведомой последовательности $\boldsymbol{\xi}$. В разделе 3 для ведомой последовательности $\boldsymbol{\xi}$ рассматривается модель авторегрессии конечного порядка. В этом случае удаётся применить теорему о вычетах для вычисления возникающих интегралов, что позволяет получать явные формулы, не содержащие интегралов.

§1. Пуассоновский процесс со случайной заменой времени

Как отмечено во введении, процесс $\Pi(S(t))$, $t \in \mathbb{R}$, также будет субординатором, и его конечномерные распределения определяются преобразованием Лапласа (3). В силу симметрии относительно нуля, $S(t) \overset{d}{=} -S(-t)$ (равенство понимается в смысле конечномерных распределений), достаточно рассматривать лишь $t \geqslant 0$. Разлагая $\mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{e}^{-u})}$ по степеням $x(1-\mathrm{e}^{-u})$ и используя легко проверяемое соотношение

$$(1-\mathrm{e}^{-u})^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (1-\mathrm{e}^{-ju}) \qquad \text{при } k \geqslant 1,$$

можно переписать экспоненту Лапласа $\Phi(1-\mathrm{e}^{-u})$ процесса $\Pi(S(t))$, где $\Phi(\cdot)$ задаётся формулой (2), как

$$\Phi(1-\mathrm{e}^{-u}) = (1-\mathrm{e}^{-u})\Big(\beta+\int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx)\Big) + \sum_{j=2}^\infty (1-\mathrm{e}^{-uj})\int\limits_0^\infty \frac{x^j}{j!}\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx)$$
$$= \int\limits_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-ux})M(dx).$$

Запись в виде интеграла по мере Леви M является представлением Леви–Хинчина. Мера M сосредоточена на натуральных числах, и её атомы суть

$$M(\{1\}) = \beta+\int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx); \quad M(\{j\}) = \int\limits_0^\infty \frac{x^j}{j!}\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx) \text{ при } j\geqslant 2. \quad (5)$$

Заметим, что, в силу свойств меры Леви Λ, вес произвольного натурального числа конечен, даже если $\Lambda(0,\infty)=\infty$. Более того,

$$M(0,\infty) = \beta + \sum_{j=1}^\infty \int\limits_0^\infty \frac{x^j}{j!}\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx) = \beta + \int\limits_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-x})\Lambda(dx) = \Phi(1)$$

будет также конечным при любой мере Леви Λ. Эти рассуждения приводят нас к следующему результату, который можно (в равносильном виде) найти, например, в [6].

Теорема 1. *Пусть субординатор S, заданный преобразованиям Лапласа* (1)*, независим от стандартного пуассоновского процесса* Π*. Тогда процесс* $\Pi(S(t))$ *будет представлять собой сложный пуассоновский процесс, в котором ведущий пуассоновский процесс имеет интенсивность* $\Phi(1)$*, а слагаемые имеют распределение* $M/\Phi(1)$ *на множестве натуральных чисел. Другими словами, при* $t\geqslant 0$ *имеется представление*

$$\Pi(S(t)) = \sum_{\ell=1}^{\Pi'(\Phi(1)t)} X_\ell \qquad \text{п.н.}, \quad (6)$$

где Π' *– стандартный пуассоновский процесс,* $X_1, X_2, \ldots$ *– независимые от* Π' *и между собой одинаково распределённые случайные величины, принимающие натуральные значения, и*

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = M(\{j\})/\Phi(1), \quad j = 1,2,\ldots.$$

Доказательство. В силу представления Ито для субординатора (см., напр., [12, §8.4]), при произвольном фиксированном $T > 0$ значение $\Pi(S(T))$ можно представить как сумму

$$\Pi(S(T)) = \sum_{(t,m)\in\Xi} m \qquad \text{п.н.}$$

по точкам (t,m) пуассоновского точечного процесса Ξ с конечной мерой интенсивности $m_{\mathrm{Leb}} \otimes M$ на множестве $[0,T] \times (0,\infty)$ (здесь m_{Leb} – это мера Лебега). Представляя эту же меру в виде $(\Phi(1)m_{\mathrm{Leb}}) \otimes (\frac{1}{\Phi(1)}M)$ и интерпретируя точку (t,m) этого процесса как точку t пуассоновского точечного процесса постоянной интенсивности $\Phi(1)$ на $[0,T]$ с меткой $m = m_t$ (см. [12, §5.2]), получаем представление (6). $\square$

Поскольку при $t \geqslant 0$ случайная величина $\Pi(S(t))$ принимает неотрицательные целые значения, можно записать её преобразование Лапласа (3) как производящую функцию вероятностей, обозначив $z = \mathrm{e}^{-u}$,

$$\mathbb{E}z^{\Pi(S(t))} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \mathbb{P}[\Pi(S(t)) = n] = \exp(-t\Phi(1-z)).$$

Как функция от комплексного аргумента z это аналитическая функция внутри единичного круга $|z| < 1$, более того, её ряд Тейлора сходится абсолютно и при $|z| = 1$. Экспонента Лапласа, обычно определяемая для неотрицательного вещественного аргумента u, продолжается в комплексную область по формуле (2) как минимум до полуплоскости $\mathrm{Re}\, u \geqslant 0$, и таким образом $\Phi(1-z)$ определена при $|z| \leqslant 1$. Дифференцируя (2) под знаком интеграла, заметим, что $\frac{d^j}{dz^j}\Phi(1-z)\big|_{z=0} = -j!M(\{j\})$, где M – мера Леви процесса $\Pi(S(t))$ (см. (5)), поэтому переписанная в терминах $z = \mathrm{e}^{-u}$ формула Леви–Хинчина для этого процесса

$$\begin{aligned} \log \mathbb{E}z^{\Pi(S(t))} &= -t\Phi(1-z) \\ &= -t\int_0^\infty (1-z^y)M(dy) = -t\sum_{j=1}^{\infty}(1-z^j)M(\{j\}), \quad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{7}$$

фактически превращается в ряд Тейлора для функции $\Phi(1-z)$ в точке $z = 0$ (с учётом равенства $\Phi(1) = M(0,\infty)$).

Произведём здесь неслучайную линейную замену времени, положив $\tau = t\Phi(1)$. Тогда уравнение (7) можно переписать как

$$\log \mathbb{E} z^{\Pi(S(\tau))} = -\tau \frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1)} = -\tau + \tau\, \mathbb{E}\, z^X, \tag{8}$$

где X имеет распределение слагаемых сложного пуассоновского процесса (6). Это, впрочем, также выводится напрямую из теоремы 1 и служит проверкой наших вычислений. Отсюда находим выражение для производящей функции вероятностей слагаемых сложного пуассоновского процесса (6) через экспоненту Лапласа процесса S:

$$\chi(z) := \mathbb{E} z^X = \frac{\Phi(1) - \Phi(1-z)}{\Phi(1)}. \tag{9}$$

Замечание 1. Из формул (5) легко найти математическое ожидание $\mathbb{E}X = \frac{1}{\Phi(1)}\big(\beta + \int\limits_0^\infty x\Lambda(dx)\big)$. Отсюда видим, что математическое ожидание будет конечным, если и только если интеграл в числителе сходится. Это связано не с конечностью меры Леви (т.к. в окрестности нуля интеграл всегда сходится), а с её поведением на бесконечности. Другое условие конечности математического ожидания – это существование левосторонней производной производящей функции вероятностей $\chi(z)$ при $z = 1$, что согласно (9) эквивалентно существованию правосторонней производной у экспоненты Лапласа $\Phi(u)$ при $u = 0$.

Например, для устойчивого субординатора индекса $\alpha \in (0,1)$ мера Леви имеет плотность $\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-1}$, и $\mathbb{E}X = \infty$.

Аналогично можно найти убывающие факториальные моменты

$$\mathbb{E}\big[X(X-1)\dots(X-k+1)\big] = \frac{1}{\Phi(1)} \int\limits_0^\infty x^k \Lambda(dx), \quad k = 2, 3, \dots.$$

Через них стандартным образом выражаются обычные степенные моменты, поскольку $X^k = \sum_{j=1}^k S(k,j) X(X-1)\dots(X-j+1)$, где $S(k,j)$ – числа Стирлинга второго рода. В частности, дисперсия задаётся выражением

$$\mathbb{D}X = \frac{1}{\Phi(1)}\Big(\beta + \int\limits_0^\infty (x^2 + x)\Lambda(dx)\Big) - \frac{1}{\Phi(1)^2}\Big(\beta + \int\limits_0^\infty x\Lambda(dx)\Big)^2,$$

которое будет конечным, если сходится интеграл $\int\limits_1^\infty x^2 \Lambda(dx)$.

§2. Стационарные ведомые последовательности

Хорошо известно (см., напр., [11, VII, §9]), что ковариационная функция $R(n)$ любой, в том числе комплекснозначной, стационарной в широком смысле последовательности случайных величин допускает спектральное представление

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{iny} F(dy), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

где $F(dy)$ – конечная мера на $[-\pi, \pi]$ (спектральная мера). Спектральную меру правильнее задавать на единичной окружности e^{iy} в комплексной плоскости, но удобнее думать о ней как о мере на отрезке $[-\pi, \pi] \ni y$. Возможное наличие атома при $\mathrm{e}^{iy} = -1$ делает неоднозначным её перевод на отрезок $[-\pi, \pi]$. Мы будем делить его на два равных атома в π и $-\pi$, другими словами, мы предполагаем, что $F(\{\pi\}) = F(\{-\pi\})$. При таком предположении спектральная мера единственна.

Для рассматриваемой нами вещественной стационарной последовательности $\boldsymbol{\xi}$ спектральная мера $F(dy)$ симметрична относительно нуля:

$$R(n) = R(-n) = \mathbb{E}\xi_0\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{iny} F(dy), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Напомним, что мы предполагаем $\mathbb{E}\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.)

Теорема 2. *Если ведомая последовательность $\boldsymbol{\xi}$ стационарна в широком смысле и имеет спектральную меру F на $[-\pi, \pi]$, то ПСИ-процесс (4) также стационарен в широком смысле, и его ковариационная функция задаётся выражением*

$$r(t) := \mathbb{E}\psi(0)\psi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\bigl(-|t|\Phi(1 - \mathrm{e}^{iy})\bigr) F(dy), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где Φ – экспонента Лапласа субординатора S (см. (1), (2)).

Доказательство. По формуле полной вероятности при $t \geqslant 0$ получаем

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi(0)\psi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} R(n)\mathbb{P}[\Pi(S(t)) = n] = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{iny} F(dy)\mathbb{P}[\Pi(S(t)) = n] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{iny}\,\mathbb{P}[\Pi(S(t)) = n]F(dy) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{iny}\,\frac{\mathbb{E}[S(t)^n\mathrm{e}^{-S(t)}]}{n!}F(dy) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-S(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{iy}S(t))^n}{n!}\Big]F(dy) = \int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}\exp\big(-(1-\mathrm{e}^{iy})S(t)\big)F(dy). \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-t\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})\big)F(dy).
\end{aligned}
$$

Выражение (11) является продолжением этого равенства на все $t \in \mathbb{R}$ чётным образом. $\square$

Пример 1 (Периодические и почти периодические последовательности)**.** Стационарные последовательности, у которых спектральная мера дискретна и имеет конечное число атомов, называют почти периодическими (см. [17, Гл. VI, §1]). Если все атомы рационально кратны π, то такая последовательность будет периодической. Если атом только один и расположен в точке $\theta \in (-\pi, \pi]$, то есть $F(dy) = \sigma^2\delta_\theta(dy)$, из формулы (11) мгновенно получаем $r(t) = \sigma^2\exp\big(-|t|\Phi(1-\mathrm{e}^{i\theta})\big)$. Общий случай почти периодической стационарной последовательности получается суммированием таких выражений.

Рассмотрим случай, когда последовательность $\boldsymbol{\xi}$ вещественна, а её спектральная мера $F(dy)$ сосредоточена в двух точках θ и $-\theta$ при некотором фиксированном $\theta \in (0, \pi)$, т.е. $F(dy) = \frac{1}{2}\big(\delta_\theta(dy) + \delta_{-\theta}(dy)\big)$ (множитель $\frac{1}{2}$ выбран для удобства). Выразим ковариационную функцию $r(t)$ непосредственно через характеристики процесса Леви S. Согласно формуле (11), при $t \geqslant 0$

$$
r(t) = \frac{1}{2}\big(\exp(-t\Phi(1-\mathrm{e}^{i\theta})) + \exp(-t\Phi(1-\mathrm{e}^{-i\theta}))\big) = \mathrm{Re}\exp(-t\Phi(1-\mathrm{e}^{i\theta})), \quad (12)
$$

поскольку два слагаемых в средней части (12) комплексно сопряжены. Из формулы (2) находим

$$A_\theta := \operatorname{Re}\Phi(1-\mathrm{e}^{i\theta}) = \beta(1-\cos\theta) + \int_0^\infty \bigl(1-\mathrm{e}^{-x(1-\cos\theta)}\cos(x\sin\theta)\bigr)\Lambda(dx),$$

$$B_\theta := \operatorname{Im}\Phi(1-\mathrm{e}^{i\theta}) = -\beta\sin\theta - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(1-\cos\theta)}\sin(x\sin\theta)\Lambda(dx).$$

Заметим, что оба интеграла сходятся, даже если Λ имеет допустимую для меры Леви особенность в нуле. Отсюда находим общий вид ковариационной функции $r(t)$ для ПСИ-процесса, когда ведомая последовательность имеет спектральную меру $F(dy) = \frac{1}{2}\bigl(\delta_\theta(dy) + \delta_{-\theta}(dy)\bigr)$:

$$r(t) = \mathrm{e}^{-|t|A_\theta}\cos(tB_\theta), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим теперь противоположный предыдущему примеру случай, когда спектральная мера имеет плотность $f(y)$. Дополнительно предположим, что плотность разлагается в равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi] \ni y$ ряд Фурье

$$f(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{iny}. \tag{13}$$

Коэффициенты Фурье удовлетворяют равенству $f_{-n} = f_n$, поскольку спектральная плотность вещественна и чётна. Подставляя представление (13) в формулу (11) (где $F(dy) = f(y)dy$) и делая замену переменной $z = \mathrm{e}^{iy}$, получаем представление ковариационной функции $r(t)$ при $t \in \mathbb{R}$ в виде контурного интеграла

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{i}\oint_\gamma \exp(-|t|\Phi(1-z)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \oint_\gamma \exp(-|t|\Phi(1-z)) z^{n-1}\,dz, \end{aligned} \tag{14}$$

где γ – единичная окружность с центром в нуле в комплексной плоскости. Заметим, что $\exp(-|t|\Phi(1-z))$ есть аналитическая функция от z внутри единичного круга $|z| < 1$ и непрерывна на его границе. Поэтому при $n > 0$ подынтегральное выражение в правой части (14) как функция от z есть аналитическая функция внутри единичного круга

$|z| < 1$, а при $n \leqslant 0$ оно аналитически продолжается внутрь единичного круга с выколотым нулём, и его особая точка $z = 0$ представляет собой полюс порядка $1 - n$. По теореме о вычетах получаем, что

$$r(t) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{-n} m_n(t)}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где $m_n(t) = \frac{d^n}{dz^n} \exp(-|t|\Phi(1-z))\big|_{z=0}$. Заметим, что ряд (15) сходится, поскольку ряд $\sum_{n\geqslant 0} m_n(t) z^n/n! = \exp(-|t|\Phi(1-z))$ сходится при $|z| \leqslant 1$ и, в частности, при $z = 1$, а $f_{-n} \to 0$ при $n \to \infty$ в силу сделанных предположений о равномерной сходимости ряда Фурье. Используя формулу (7), можно найти явное, хотя и редко пригодное для вычислений выражение

$$m_n(t) = \mathrm{e}^{-|t|\Phi(1)} \sum_{k=1}^{n} |t|^k \sum_{j_1+\cdots+j_k=n} \prod_{\ell=1}^{k} M(\{j_\ell\}), \quad n \geqslant 1, \tag{16}$$

где внутренняя сумма берётся по всем представлениям числа n в виде суммы k целых положительных слагаемых.

Пример 2 (Скользящие средние)**.** Пусть (η_n), $n \in \mathbb{Z}$, – двусторонняя последовательность некоррелированных случайных величин, про которую мы предположим, что $\mathbb{E}\eta_n = 0$, $\mathbb{E}\eta_n^2 = 1$. Фиксируем натуральное m и рассмотрим последовательность скользящих m-средних $\boldsymbol{\xi}$, задаваемую равенствами $\xi_n = (\eta_n + \eta_{n-1} + \cdots + \eta_{n-m+1})/m$, $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$R(n) = \mathbb{E}\xi_0\xi_n = \max\bigl\{\tfrac{m-|n|}{m^2}, 0\bigr\} \quad \text{и} \quad f_n = \max\bigl\{\tfrac{m-|n|}{2\pi m^2}, 0\bigr\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому, комбинируя (15) и (16), получаем при $m = 2$

$$r(t) = \mathrm{e}^{-|t|\Phi(1)} \Bigl(\frac{1}{2} + \frac{|t|}{4}\Bigl(\beta + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx)\Bigr)\Bigr),$$

и при $m = 3$

$$r(t) = \mathrm{e}^{-|t|\Phi(1)} \Bigl(\frac{1}{3} + \frac{|t|}{9}\Bigl(2\beta + \int_0^\infty (2x+x^2)\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx)\Bigr) + \frac{t^2}{18}\Bigl(\beta + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\Lambda(dx)\Bigr)^2\Bigr).$$

Можно выписывать подобные формулы и дальше, но они сильно усложняются. Отсюда, в частности, видна довольно сложная зависимость ковариационной функции от сноса β.

Замечание 2. Предположим, что у процесса $\psi(t)$ имеется спектральная плотность, то есть вещественная неотрицательная функция g такая, что $\mathbb{E}\psi(0)\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{its} g(s)\, ds$. Из формулы (7) видно, что $\operatorname{Re}\Phi(1-z) \geqslant 0$ при $|z| = 1$ и обращается в ноль только при $z = 1$. Поэтому при $|z| = 1$, но $z \neq 1$, вещественная часть $\Phi(1-z)$ положительна, и для $\mathrm{e}^{-|t|\Phi(1-z)}$ имеется представление[1]

$$\mathrm{e}^{-|t|\Phi(1-z)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2 + s^2}\, \mathrm{e}^{its}\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Обозначая $z = \mathrm{e}^{iy}$ и подставляя это выражение в (11), получаем

$$\mathbb{E}\psi(0)\psi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})^2 + s^2}\, \mathrm{e}^{its}\, ds F(dy), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Формально переставляя порядок интегрирования, получаем формулу для спектральной плотности процесса $\psi(t)$:

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})^2 + s^2}\, F(dy), \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Заметим, однако, что перестановка интегралов не всегда обоснована. Скажем, если мера $F(dx)$ имеет атом в нуле (что происходит, если $\mathbb{E}\xi_0\xi_n \to \alpha > 0$ при $n \to \infty$), то даже равенство (17) не выполняется на множестве положительной меры. Если атома в нуле нет, но мера F придаёт маленьким окрестностям нуля достаточно большой вес, то a priori двойной интеграл по мере $F(dy)ds$ может расходится в точке $y = s = 0$, и теорема Фубини неприменима. Можно пытаться исследовать сходимость этого интеграла, однако это не столь просто, поскольку функция Φ сама задаётся как интеграл по некоторой, возможно бесконечной, мере.

Рассмотрим переход от спектральной меры последовательности $\boldsymbol{\xi}$ к спектральной мере процесса ψ более аккуратно. Хотя в выражении (11) интегрируемая функция, как функция от t, экспоненциально

[1]При вещественном положительном $\Phi(1-z)$ выражение $\frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2+s^2}$ – это спектральная плотность процесса Орнштейна–Уленбека с вязкостью $\Phi(1-z)^{-1}$.

убывает при $|t| \to \infty$, неясно, сохранится ли это свойство после интегрирования по y. Поэтому мы не будем предполагать существования спектральной плотности, а рассмотрим спектральную меру G на борелевских подмножествах вещественной прямой такую, что

$$r(t) = \mathbb{E}\psi(0)\psi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{its} G(ds), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Спектральная мера непрерывного в среднем квадратическом (каким очевидно является ψ) стационарного в широком смысле процесса всегда существует и единственна, см. [11, гл. VII, §11], кроме того, это конечная мера. Поэтому её можно описывать с помощью “функции распределения” $G(s) := G((-\infty, s])$, которую называют спектральной функцией.

Теорема 3. *Пусть двусторонняя ведомая вещественная последовательность* $\boldsymbol{\xi}$ *стационарна в широком смысле и имеет спектральную меру* F *на* $[-\pi, \pi]$*; ведущий процесс представляет собой двусторонний сложный пуассоновский процесс* $\Pi(S(t))$*,* $t \in \mathbb{R}$*, распределение которого определяется преобразованием Лапласа* (3) *при* $t \geqslant 0$*. Тогда спектральная функция* G *задаваемого формулой* (4) *процесса* ψ *определяется равенством*

$$G(s) = \begin{cases} \dfrac{F[-\pi,\pi]}{2} - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{|s|}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})} F(dy), & s < 0, \\ \dfrac{F[-\pi,\pi]}{2} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{s}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})} F(dy), & s \geqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

где $\Phi(u)$ *– экспонента Лапласа* (2) *субординатора* S*, и* arctg *обозначает главную ветвь арктангенса, для которой вещественная часть лежит в* $[-\pi/2, \pi/2]$.

Доказательство. Поскольку мы рассматриваем вещественные процессы, то мера G будет симметричной относительно нуля: $G(B) = G(-B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$. Поэтому достаточно рассматривать её значения на симметричных интервалах $G([-s, s])$; по ним можно восстановить спектральную функцию $G(s)$.

По формуле обращения характеристических функций получаем, что при $s > 0$, если $G(\{s\}) = 0$, то

$$
\begin{aligned}
G([-s,s]) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{its} - \mathrm{e}^{-its}}{it} r(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin st}{t} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\bigl(-|t|\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})\bigr) F(dy)\,dt.
\end{aligned}
$$

При конечном T по теореме Фубини можно переставить порядок интегрирования, поэтому

$$
G([-s,s]) = \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin st}{t} \exp\bigl(-|t|\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})\bigr)\,dtF(dy).
$$

Обозначим внутренний интеграл

$$
A_T(y) := \int_{-T}^{T} \frac{\sin st}{t} \exp\bigl(-|t|\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})\bigr)\,dt.
$$

Поскольку $\bigl|\exp\bigl(-|t|\Phi(1-e^{iy})\bigr)\bigr| \leqslant 1$ (так как $\operatorname{Re}\Phi(1-\mathrm{e}^{iy}) \geqslant 0$ в силу формулы (7)), то предел

$$
\lim_{T\to\infty} A_T(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin st}{t} \exp\bigl(-|t|\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})\bigr)\,dt = 2\operatorname{arctg} \frac{s}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})} =: A_\infty(y)
$$

существует равномерно по $y \in [-\pi,\pi]$ (при $y = 0$, то есть когда $\Phi(1-\mathrm{e}^{iy}) = 0$ предел будет равен π, и предельная функция $A_\infty(y)$ непрерывна). Значит, можно переставлять предел и интеграл, что даёт

$$
G([-s,s]) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \frac{s}{\Phi(1-\mathrm{e}^{iy})} F(dy), \qquad s > 0. \tag{21}
$$

для всех таких $s > 0$, для которых $G(\{s\}) = 0$. Однако равенство (21) задаёт непрерывную по $s > 0$ функцию, а значит, условие $G(\{s\}) = 0$ можно отбросить.

Поскольку, очевидно, $R(0) = \mathbb{E}\xi_0^2 = r(0)$, подставляя $n = 0$ в (10) и $t = 0$ в (19), получаем равенство

$$G((-\infty, \infty)) = F([-\pi, \pi]).$$

Симметрия меры G относительно нуля и отсутствие атомов (кроме, возможно, атома в нуле) показывает, что $G((-\infty, -s]) = G((s, \infty)) = \big(F([-\pi, \pi]) - G([-s, s])\big)/2$ при $s > 0$, откуда следует формула (20). $\square$

Следствие 4. *В условиях теоремы* 3, *если* $F(\{0\}) = 0$, *то спектральная мера* G *процесса* $\psi(t)$ *абсолютно непрерывна и имеет плотность* (18) *при* $s \neq 0$. *Если же* $F(\{0\}) > 0$, *то мера* G *представляется как сумма меры* $F(\{0\})\delta_0$ *и абсолютно непрерывной меры с плотностью, задаваемой формулой* (18).

Заметим, что атом в нуле у меры F, если он присутствует, не даёт никакого вклада в интеграл (18).

§3. Процесс авторегрессии

В качестве примера мы рассмотрим одну из моделей, приводящих к стационарному процессу – модель авторегрессии конечного порядка AR(k), на которую мы наложим дополнительные ограничения, чтобы не усложнять обозначения. Пусть η_n, $n \in \mathbb{Z}$, – двусторонняя стационарная в широком смысле последовательность некоррелированных случайных величин. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\mathbb{E}\eta_n = 0$ и $\mathbb{E}\eta_n^2 = 1$. Говорят, что процесс ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ описывается моделью AR(k), если он удовлетворяет соотношению

$$\xi_n + a_1\xi_{n-1} + a_2\xi_{n-2} + \cdots + a_k\xi_{n-k} = \eta_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ – заданные числа, причём $a_k \neq 0$; поскольку мы работаем с вещественными процессами, будем предполагать, что они вещественны. Хорошо известно (см., например, [7, §3.5]), что для того, чтобы ковариационная функция $R(n) = \mathbb{E}\xi_0\xi_n$ стремилась к нулю при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ характеристического многочлена

$$A(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_k z^k \tag{23}$$

лежали вне единичного круга, то есть что $|\alpha_j| > 1$.

При сделанных предположениях AR-процесс $\boldsymbol{\xi}$ будет иметь спектральную плотность, и известен её общий вид (см. [7, §4.12.4]):

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|A(\mathrm{e}^{-iy})|^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{A(\mathrm{e}^{iy})A(\mathrm{e}^{-iy})}, \qquad y \in [-\pi, \pi]. \tag{24}$$

Предложение 5. *Пусть спектральная плотность последовательности $\boldsymbol{\xi}$ задаётся равенством* (24), *и корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ характеристического многочлена $A(z)$ различны и лежат вне единичного круга. Тогда определяемый формулой* (4) *ПСИ-процесс ψ имеет спектральную плотность*

$$g(s) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k} \frac{\Phi(1-\alpha_j^{-1})}{\Phi(1-\alpha_j^{-1})^2 + s^2}\,\frac{\alpha_j^{k+1}}{\alpha_j^2 - 1}\prod_{\ell\neq j}\frac{\alpha_\ell^2}{(\alpha_\ell - \alpha_j)(\alpha_\ell\alpha_j - 1)}, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Замечание 3. При $k > 1$ не все коэффициенты при плотностях распределения Коши, входящих в (25), положительны. Если предположить, что корни α_j вещественны и упорядочены по возрастанию ($\alpha_1 < \dots < \alpha_k$), то знаки будут чередоваться, начиная с положительного.

Доказательство. Согласно следствию 4 ПСИ-процесс ψ также будет иметь спектральную плотность, задаваемую формулой (18), где $F(dy) = f(y)dy$. Подставляя выражение (24) в (18) и делая замену переменной $z = \mathrm{e}^{iy}$, приходим к представлению спектральной плотности ПСИ-процесса в виде контурного интеграла по контуру γ – единичной окружности в $\mathbb{C}$ с центром в нуле:

$$g(s) = \frac{1}{2\pi^2 i}\oint_\gamma \frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2 + s^2}\,\frac{1}{A(z)A(z^{-1})}\,\frac{dz}{z}, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

При $s \neq 0$ первая дробь представляет собой аналитическую функцию внутри единичного круга и непрерывна на его границе (единственная точка кривой γ, в которой может нарушиться аналитичность – это точка $z = 1$, поскольку $\Phi(1-z)$ определена как минимум при $\operatorname{Re} z \leqslant 1$). А во второй дроби в знаменателе стоит многочлен Лорана, который имеет корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_k^{-1}$; по предположению все они различны. Первые k корней лежат вне единичного круга, а последние k – внутри него. Точка $z = 0$ также может показаться особой, но таковой не является, поскольку $A(0) = 1$, а $A(z^{-1}) \to \infty$ при $z \to 0$, и значит дробь $1/(zA(z)A(z^{-1}))$ стремится к конечной константе при $k = 1$ и к нулю при $k > 1$.

По теореме о вычетах контурный интеграл выражается через сумму вычетов подынтегральной функции в корнях $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_k^{-1}$. Найдём вычет в точке α_j^{-1}. Знаменатель можно записать как $A(z)A(z^{-1}) = \prod_{\ell=1}^{k}(1 - z/\alpha_\ell)(1 - 1/(z\alpha_\ell))$. Сгруппировав два сомножителя в знаменателе с корнями α_ℓ и α_ℓ^{-1}, находим

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha_j^{-1}} \frac{1}{(1 - z/\alpha_j)(1 - 1/(z\alpha_j))} = \frac{\alpha_j}{\alpha_j^2 - 1},$$

$$\frac{1}{(1 - z/\alpha_\ell)(1 - 1/(z\alpha_\ell))}\bigg|_{z=\alpha_j^{-1}} = \frac{\alpha_j\alpha_\ell^2}{(\alpha_\ell - \alpha_j)(\alpha_\ell\alpha_j - 1)} \quad (\ell \neq j).$$

Поэтому

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha_j^{-1}} \frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2 + s^2} \frac{1}{zA(z)A(z^{-1})} = \frac{\Phi(1-\alpha_j^{-1})}{\Phi(1-\alpha_j^{-1})^2 + s^2} \frac{\alpha_j^{k+1}}{\alpha_j^2 - 1} \prod_{\ell \neq j} \frac{\alpha_\ell^2}{(\alpha_\ell - \alpha_j)(\alpha_\ell\alpha_j - 1)}.$$

Отсюда и из (26) находим общее выражение (25) для плотности $g(s)$, пока при ограничении $s \neq 0$. Но поскольку $\operatorname{Re}\Phi(1 - \alpha_j^{-1}) > 0$ при всех j, выражение (25) непрерывно при $s = 0$, поэтому условие $s \neq 0$ можно отбросить. □

Пример 3. Рассмотрим авторегрессию первого порядка,

$$\xi_n = a\xi_{n-1} + \eta_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $|a| < 1$. В этом случае $A(z) = 1 - az$ имеет корень $\alpha_1 = 1/a$. Равенство (25) принимает вид

$$g(s) = \frac{1}{1-a^2} \frac{\Phi(1-a)}{\pi(\Phi(1-a)^2 + s^2)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Интегрируя по $s \in \mathbb{R}$, восстанавливаем хорошо известный результат

$$\mathbb{E}\xi_0^2 = \mathbb{E}\psi(0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,ds = \frac{1}{1-a^2}.$$

Пример 4. Рассмотрим теперь авторегрессию второго порядка, которую можно записать в виде

$$\xi_n = (a+b)\xi_{n-1} - ab\xi_{n-2} + \eta_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Многочлен $A(z) = 1 - (a+b)z + abz^2$ имеет корни $\alpha_1 = 1/a$, $\alpha_2 = 1/b$, которые мы предполагаем лежащими вне единичного круга, то есть $|a| < 1$, $|b| < 1$. Предположим, что они различны (но, возможно, комплексно сопряжены). Тогда мы можем переписать выражение для спектральной плотности (25):

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{\Phi(1-a)}{\pi(\Phi(1-a)^2+s^2)}\,\frac{a}{(1-a^2)(a-b)(1-ab)} \\ &\quad + \frac{\Phi(1-b)}{\pi(\Phi(1-b)^2+s^2)}\,\frac{b}{(1-b^2)(b-a)(1-ab)} \\ &= \frac{1}{\pi(a-b)(1-ab)}\Big(\frac{a}{1-a^2}\,\frac{\Phi(1-a)}{\Phi(1-a)^2+s^2} - \frac{b}{1-b^2}\,\frac{\Phi(1-b)}{\Phi(1-b)^2+s^2}\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

Эта формула верна как для различных вещественных, так и для комплексно-сопряжённых корней. Для комплексно-сопряжённого случая можно переписать её в другом виде, однако существенно она не упрощается.

Рассмотрим теперь случай, когда имеется кратный корень, то есть $a = b \in (-1, 1)$. Мы должны начинать с формулы (26), при получении которой мы не использовали предположение о различности корней. У подынтегрального выражения внутри единичного круга будет полюс второго порядка в точке $z = a$, возникающий за счёт множителя $A(z^{-1}) = (1 - \frac{a}{z})^2$ в знаменателе. Поэтому вычет в этом полюсе будет равен

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2+s^2}\,\frac{1}{zA(z)A(z^{-1})} = \frac{d}{dz}\Big[\frac{\Phi(1-z)}{\Phi(1-z)^2+s^2}\,\frac{z}{(1-az)^2}\Big]\Big|_{z=a}.$$

Явное выражение для этой производной достаточно громоздко и не приводится. После деления на π оно даёт выражение для плотности g в точке s. Как и для случая различных корней, при $s \to \pm\infty$ плотность будет убывать пропорционально s^{-2}.

На первый взгляд может показаться, что подобная техника будет работать и в модели ARMA, когда к авторегрессии добавляются ещё и скользящие средние. Аналог формулы (24) в этом случае хорошо известен: в числитель добавляется многочлен Лорана от e^{iy}. Это приводит к дополнительной особой точке $z = 0$ в подынтегральном выражении в (26), которая является полюсом порядка, вообще говоря, больше 1. Чтобы найти вычет, нужно записывать разложение остальных множителей в этой точке, что в общем виде представляется сложным.

Однако для конкретных примеров ARMA возможен прямой подсчёт при помощи аналогичной техники.

Список литературы

1. S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability,* Berkeley, University of California Press, 1955.
2. K. Buchak, L. Sakhno, *Properties of Poisson processes directed by compound Poisson-Gamma subordinators.* — Modern Stoch. Theory Appl. **5**, No. 2 (2018), 167–189.
3. R. Garra, E. Orsingher, M. Scavino, *Some probabilistic properties of fractional point processes.* — Stoch. Anal. Appl. **35**, No. 4 (2017), 701–718.
4. N. Gupta, A. Kumar, N. Leonenko, *Tempered fractional Poisson processes and fractional equations with Z-transform.* — Stoch. Anal. Appl. **38**, No. 5 (2020), 939–957.
5. E. Orsingher, F. Polito, *The space-fractional Poisson process.* — Statist. Probab. Lett. **82** (2012), 852–858.
6. E. Orsingher, B. Toaldo, *Counting processes with Bernštein intertimes and random jumps.* — J. Appl. Probab. **52**, No. 4, (2015), 1028–1044.
7. M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series. Vol.* 1. *Univariate Series,* London, Academic Press, 1981.
8. O. V. Rusakov, Yu. V. Yakubovich, *Poisson processes directed by subordinators, stuttering Poisson and pseudo-Poisson processes, with applications to actuarial mathematics,* to appear.
9. K.-I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions,* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
10. Yu. Yakubovich, *A simple proof of the Levy–Khintchine formula for subordinators.* — Statist. Probab. Lett., **176** (2021).
11. А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов,* М., ФИЗМАТЛИТ, 2005. 408 с.
12. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы,* М.: Изд-во МЦНМО, 2007. 133 с.
13. О. В. Русаков, *Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **442** (2015), 122–132.
14. О. В. Русаков, *Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна–Уленбека.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **4**, No. 2 (2017), 247–257.
15. О. В. Русаков, Ю. В. Якубович, М. Б. Ласкин, *Стохастическая модель информационных каналов со случайной интенсивностью и случайной нагрузкой, основанная на случайных процессах псевдо-пуассоновского типа.* Применение технологий виртуальной реальности и смежных информационных систем в междисциплинарных задачах FIT-M 2020: Сборник тезисов международной научной конференции, 220–225, 2020.
16. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.* 2, М., Мир, 1967. 702 с.

17. А. Н. Ширяев, *Вероятность*–2, М., Изд-во МЦНМО, 2007. 416 с.

Yakubovich Yu. V., Rusakov O. V. On spectral properties of stationary random processes connected by a special random time change.

We consider three independent objects: a two-sided stationary random sequence $\boldsymbol{\xi} := (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots)$ with zero mean and finite variance, a standard Poisson process Π and a subordinator S, that is a non-decreasing Lévy process. By means of reflection about zero we extend Π and S to the negative semi-axis and define a random time change $\Pi(S(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Then we define a so-called PSI-process $\psi(t) := \xi_{\Pi(S(t))}$, $t \in \mathbb{R}$, which is wide-sense stationary. Notice that PSI-processes generalize pseudo-Poisson processes. The main aim of the paper is to express spectral properties of the process ψ in terms of spectral characteristics of the sequence ξ and the Lévy measure of the subordinator S. Using complex analytic techniques we derive a general formula for the spectral measure G of the process ψ. We also determine exact spectral characteristics of ψ for the following examples of $\boldsymbol{\xi}$: almost periodic sequence; finite order moving average; finite order autoregression. These results can find their applications in all areas where L^2-theory of stationary processes is used.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург, 199034, Россия

Поступило 24 июня 2021 г.