Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Е. Симарова

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЕТА ПОЛИТОПЫ

§1. Введение

1.1. Бета политопы. Пусть дана последовательность $U_1, \dots, U_n$ случайных точек в $\mathbb{R}^d$, выбранных независимо в соответствии с бета распределением с параметром $\beta > -1$. Плотность данного распределения имеет вид

$$p_{d,\beta}(x) = c_{d,\beta} \cdot (1 - \|x\|^2)^\beta \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{B}^d}(x), \quad \text{где} \quad c_{d,\beta} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1 + \beta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\beta + 1)},$$

$\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leqslant 1\}$ – единичный шар и $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^d$. Их выпуклая оболочка $[U_1, \dots, U_n]$ называется *случайным бета политопом.*

В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению различных средних характеристик бета политопов, например, внутренние объемы, число граней всех размерностей, внутренние и внешние углы и др., см. [8–10].

В нашей работе, вместо рассмотрения средних, мы задаемся целью изучать экстремальные характеристики. Для этого рассмотрим некоторое большое число $N > n$ и пусть $U_1, \dots, U_N \in \mathbb{R}^d$ являются независимыми бета распределенными случайными векторами, определенными так же, как и выше. По ним мы можем построить $\binom{N}{n}$ случайных бета политопов вида $[U_{i_1}, \dots, U_{i_n}]$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant N$. Теперь рассмотрим какую-нибудь геометрическую характеристику, например, m-й внутренний объем $v_m(\cdot)$, и возьмем бета политоп, который его максимизирует:

$$v_m([U_{i_1}, \dots, U_{i_n}]) \mapsto \max.$$

Ключевые слова: бета-распределение, U-max статистики, случайный многоугольник, распределение Вейбулла, пуассоновская аппроксимация, случайный периметр, случайная площадь.

Теорема 1 доказана при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2019-1619, теорема 2 доказана при поддержке РФФИ-ННИО в рамках научного проекта No. 20-51-12004.

Нетрудно видеть, что при $N \to \infty$ данный максимум сходится по вероятности к m-му внутреннему объему многогранника, у которого он максимальный среди всех многогранников, лежащих внутри единичного шара $\mathbb{B}^d$, являюшегося носителем бета распределения:

$$\max_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant N} v_m([U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}]) \xrightarrow[N\to\infty]{P} \max_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}^d} v_m([x_1, \ldots, x_n]). \quad (1)$$

Хотя, очевидным образом, данный многогранник существует и его вершины лежат на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, его явная форма известна только для очень немногих значений d и n даже в случае $m = d$, см. [2, 6].

Нашей целью является получить уточнение сходимости в (1): мы считаем, что справедливо следующее утверждение.

Гипотеза. *Для произвольных фиксированных* $d, n \in \mathbb{N}$, $\beta > -1$ *и* $m \in \{0, 1, \ldots, d\}$ *существуют положительные числа*

$$A = A(d, m, n, \beta), \quad B = B(d, m, n, \beta), \quad C = C(d, m, n, \beta),$$

такие что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big[N^A \cdot \Big(\max_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}^d} v_m([x_1, \ldots, x_n]) - \max_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant N} v_m([U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}])\Big) \leqslant t\Big] = 1 - e^{-B \cdot t^C}.$$

Наша первая теорема решает данную гипотезу в размерности $d = 2$ и находит явные значения A, B, C. В этом случае, первый внутренний объем совпадает с полупериметром, а второй – с площадью. Заметим, что среди всех n-угольников с вершинами внутри единичного круга правильный n-угольник, вписанный в единичную окружность, имеет максимальные периметр и площадь, которые равны $2n \sin \frac{\pi}{n}$ и $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$.

С этого момента мы всегда предполагаем, что $d = 2$. В этом случае плотность бета распределения имеет вид

$$p_{2,\beta}(x) = \frac{\beta + 1}{\pi} \cdot (1 - \|x\|^2)^\beta \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{B}^2}(x). \quad (2)$$

Теорема 1. *Пусть* $U_1, \ldots, U_N \in \mathbb{R}^2$ *являются независимыми бета распределенными случайными векторами с параметром* $\beta > -1$. *Тогда для любого* $t > 0$ *выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big[N^{\frac{n}{n(\beta+3/2)-1/2}} \Big(2n \sin\frac{\pi}{n} - \max_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N} \operatorname{per}([U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}])\Big) \leqslant t\Big] \tag{3}$$
$$= 1 - \exp\bigg[-K_n \frac{(n-1)!}{\sqrt{n}\,\big(\sin\frac{\pi}{n}\big)^{(\beta+3/2)n-1/2}\, 2^{(\beta+1/2)n+1/2}} \cdot t^{(\beta+3/2)n-1/2}\bigg],$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big[N^{\frac{n}{n(\beta+3/2)-1/2}} \Big(\frac{n}{2} \sin\frac{2\pi}{n} - \max_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N} \operatorname{area}([U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}])\Big) \leqslant t\Big] \tag{4}$$
$$= 1 - \exp\bigg[-K_n \frac{(n-1)!\, 2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,\big(\sin\frac{2\pi}{n}\big)^{(\beta+3/2)n-1/2}} \cdot t^{(\beta+3/2)n-1/2}\bigg],$$

где

$$K_n = \frac{2^{(\beta+1/2)n+1/2}\,\big(\Gamma(\beta+2)\big)^n}{\pi^{\frac{n-1}{2}} n! \quad \Gamma\big((\beta+\frac{3}{2})n+\frac{1}{2}\big)}, \tag{5}$$

$\operatorname{per}(\cdot), \operatorname{area}(\cdot)$ *обозначают периметр и площадь, и скорость сходимости имеет порядок* $O(N^{-\frac{1}{(2\beta+3)n-1}})$.

Теорема 1 является следствием более общей и технически сложной теоремы 2 из раздела 2. Для ее формулировки нам сначала потребуется ввести некоторые величины, которые обобщают характеристику из левой части (1) и называются U-max статистики.

1.2. U-max **статистики.** Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных элементов, принимающих значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$. Рассмотрим некоторую борелевскую функцию

$$f : \mathfrak{X}^n \mapsto \mathbb{R}^1,$$

инвариантную относительно перестановок ее аргументов. Такую функцию мы будем называть ядром степени n. Теперь для $N \geqslant n$ определим U-max статистику с ядром f как

$$\max_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N} f(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}).$$

U-min статистики определяются аналогично.

Изначально U-max статистики были введены в рассмотрение Лао и Мейером [12, 13, 16] в качестве экстремальных аналогов обычных U-статистик, которые, в свою очередь, детально изучались многими авторами (см., например, [3, 5, 14]).

Существует очень мало результатов об асимптотическом поведении U-max статистик, заданных на $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ произвольной размерности d. Одно из исключений, которое нам известно, это работа [13], где изучаются некоторые ядра степени 2, заданные на множестве точек из единичного шара $\mathbb{B}^d$. Также стоит отметить, что такой популярный объект стохастической геометрии, как диаметр множества случайных точек (см. [4, 7, 15, 17]), по сути является U-max статистикой с ядром $f(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$.

Во всех этих результатах ядра имеют степень 2. Более сложные результаты возникают в случае, когда $\mathfrak{X}$ является единичной окружностью $\mathbb{S}^1$. Так, Лао и Мейер [13] рассмотрели периметр и площадь случайных треугольников. Королева и Никитин [11] изучали U-max статистики более сложной природы. В частности, они рассмотрели максимальный периметр среди всех периметров выпуклых n-угольников, вершины которых выбираются из N точек, независимо и равномерно распределенных на единичной окружности. Данное исследование было обобщено в [21] и [22] в другом направлении: был рассмотрен обобщенный периметр случайных выпуклых многоугольников. Периметр и площадь вписанных многоугольников при более слабых ограничениях на распределение вершин были изучены в [18]. Работа [19] обобщает предыдущие результаты и содержит общие формулы о предельном поведении U-max статистик для более общего класса распределений точек на единичной окружности с ядрами из более широкого класса.

В следующем разделе мы сформулируем результат, в котором по сути рассматривается тот же широкий класс ядер, что и в [19], и из которого мы выведем Теорему 1. Разделы 3 и 4 содержат доказательства наших результатов.

§2. Главный результат

В этом разделе мы дадим обобщение Теоремы 1 на значительно более широкий класс ядер. Для этого сначала введем несколько обозначений и условий.

Так как носителем бета распределения является единичный шар, мы рассматриваем ядра, действующие следующим образом:

$$f : \left(\mathbb{B}^2\right)^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Чтобы избежать рассмотрения тривиальных случаев, с этого момента мы будем считать, что $n \geqslant 2$.

Как и в [19], обозначим φ_i угол между векторами OU_1 и OU_i (взятый против часовой стрелки), где O обозначает начало координат:

$$\varphi_i = \angle U_1 O U_i, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Такие углы мы называем центральными. Все углы, рассматриваемые нами, а также алгебраические операции между ними мы рассматриваем по модулю 2π, если не оговорено обратное.

Также обозначим r_i расстояние между O и U_i :

$$r_i = \|OU_i\|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Другими словами, мы рассматриваем полярную систему координат, в которой точка U_1 имеет координаты $(0, r_1)$, а при $i = 2, \ldots, n$, точка U_i имеет координаты (φ_i, r_i).

Теперь наложим некоторые условия на ядро f. Они аналогичны условиям из [19] с мелкими изменениями.

Условия на ядро f:

A1 f инвариантно относительно вращений, т.е. существует функция

$$h(x_1, \ldots, x_{2n-1}) : [0, 2\pi)^{n-1} \times (0, 1]^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

такая что

$$f(U_1, \ldots, U_n) = h(\varphi_2, \ldots, \varphi_n, r_1, \ldots, r_n),$$

где φ_i и r_i определены в (6) и (7);

A2 f инвариантно относительно перестановок его аргументов;

A3 h непрерывна и может быть непрерывно продолжена до $h : [0, 2\pi]^{n-1} \times [0, 1]^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;

A4 h достигает своего максимума M в конечном числе точек V_1, …, V_k, и мы дополнительно предполагаем, что $V_1, \ldots, V_k \in (0, 2\pi)^{n-1} \times \{1\}^n$, т.е. аргументы, в которых f достигает максимума, различны и лежат на единичной окружности $\mathbb{S}^2$;

A5 существует $\delta > 0$, такое что h три раза непрерывно дифференцируема в δ-окрестности любой точки максимума $V_1, \ldots, V_k$;

A6 для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ субгессиан h в V_i, соответствующий первым $n-1$ аргументам,

$$G_i := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_2 \partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

является невырожденным: $\det G_i \neq 0$;

A7 для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ все частные производные h в V_i по последним n аргументам ненулевые:

$$\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j} \neq 0 \quad \text{при} \quad j = n, \dots, 2n-1.$$

Мы готовы сформулировать наш основной результат.

Теорема 2. *Предположим, что ядро* $f : (\mathbb{B}^2)^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *удовлетворяет условиям* **A1**–**A7**, *и пусть* $U_1, \dots, U_N \in \mathbb{R}^2$ *являются независимыми бета распределенными случайными векторами с плотностью распределения, заданной в* (2). *Тогда для любого* $t > 0$ *при* $N \to \infty$ *выполнено*

$$\mathbb{P}\left[N^{\frac{n}{n(\beta+3/2)-1/2}} \left(\max_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{B}^2} f(x_1, \dots, x_n) - \max_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant N} f(U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) \right) \leqslant t\right]$$
$$= \left(1 - \exp\left[-K_n \cdot I[V_1, \dots, V_k] \cdot t^{n(\beta+3/2)-1/2}\right]\right)\left(1 + O(N^{-\frac{1}{(2\beta+3)n-1}})\right),$$

где

$$I[V_1, \dots, V_k] := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\det(-G_i)} \prod\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\right)^{\beta+1}}, \tag{8}$$

$V_1, \dots, V_k$ *– точки из условия* **A5**, h *– функция из* **A1**, G_i *– матрицы из* **A6** *и константа* K_n *определена* (5).

Можно показать, что Теорему 2 возможно обобщить на случай, когда $U_1, \dots, U_n$ независимо и одинаково распределены с общей плотностью распределения

$$p(\varphi, r) \cdot \|1 - r^2\|^\beta, \tag{9}$$

где p является непрерывной внутри $S^1 \times (\delta, 1]$ для некоторого $\delta < 1$ функцией с носителем внутри $\mathbb{B}^2$. В этом случае K_n нужно поделить на константу $\left(\frac{\beta+1}{\pi}\right)^n$, нормирующую совместную плотность независимых бета распределенных точек, и домножить на

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varphi_1, 1)\prod_{j=1}^{n-1} p(\varphi_1 + V_i^j, 1)\, d\varphi_1.$$

Прямым вычислением проверяется, что распределение на единичной окружности с плотностью $p(\varphi, 1)$, рассматриваемой в [19], является слабым пределом распределения с плотностью (9) при β стремящимся к -1. Поэтому если обосновать предельный переход, то в качестве следствия можно получить соответствующий результат из [19]. Мы опускаем детали.

§3. Доказательства теорем 1, 2

3.1. Доказательство теоремы 1. Сначала выведем теорему 1 из теоремы 2. Пусть сначала $f(U_1, \ldots, U_n)$ является периметром выпуклой оболочки точек $U_1, \ldots, U_n$. Точки максимума функции f соответствуют правильному n-угольнику с вершинами на единичной окружности $\mathbb{S}^1$. Поэтому у функции h всего $(n-1)!$ точек максимума. Заметим, что

$$h(\varphi_2, \ldots, \varphi_n, r_1, \ldots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{r_{j_{i+1}}^2 + r_{j_i}^2 - 2r_{j_i} r_{j_{i+1}} \cos\left(\varphi_{j_{i+1}} - \varphi_{j_i}\right)},$$

где $(j_2, \ldots, j_n)$ является перестановкой $(2, \ldots, n)$, такой что

$$0 = \varphi_{j_1} \leqslant \varphi_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant \varphi_{j_n} \leqslant \varphi_{j_{n+1}} = 2\pi, r_{j_{n+1}} = r_{j_1} = r_1.$$

Функция h три раза дифференцируема в некоторой окрестности точки

$$\left(\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2\pi(n-1)}{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}\right),$$

а также всех других точках, которые получаются из этой перестановкой углов. Определители всех матриц G_i равны $2^{1-n} n \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}$ (см. [19]). Также $\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} = 2\sin\frac{\pi}{n}$ для всех $i \in \{1, \ldots, (n-1)!\}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Из теоремы 2 получаем (3).

Теперь пусть $f(U_1,\ldots,U_n)$ площадью выпуклой оболочки точек U_1, …, U_n. Как и для периметра, точки максимума функции f соответствуют правильному n-угольнику с вершинами на единичной окружности $\mathbb{S}^1$ и у функции h всего $(n-1)!$ точек максимума. Заметим, что

$$h(\varphi_2,\ldots,\varphi_n,r_1,\ldots,r_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{j_i}r_{j_{i+1}}\sin\left(\varphi_{j_{i+1}}-\varphi_{j_i}\right)}{2},$$

где $(j_2,\ldots,j_n)$ является перестановкой $(2,\ldots,n)$, такой что

$$0=\varphi_{j_1}\leqslant\varphi_{j_2}\leqslant\ldots\leqslant\varphi_{j_n}\leqslant\varphi_{j_{n+1}}=2\pi, r_{j_{n+1}}=r_{j_1}=r_1.$$

Как и выше, эта функция три раза дифференцируема в некоторых окрестностях всех точек максимума. Определители всех матриц G_i равны $2^{1-n}n\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}$ (см. [19]). Также $\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}=\sin\frac{2\pi}{n}$ при всех $i\in\{1,\ldots,(n-1)!\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Из теоремы 2 получаем (4).

3.2. Доказательство теоремы 2. Сначала мы упомянем 2 теоремы, играющие ключевую роль в доказательстве теоремы 2. Первая теорема была получена Лао и Мейером, которые для этого воспользовались модификацией некоторого утверждения о пуассоновской сходимости из [1].

Теорема 3. [13] *Рассмотрим последовательность $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ независимых одинаково распределенных элементов, принимающих значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$, и борелевскую функцию $f:\mathfrak{X}^n\to\mathbb{R}$, инвариантную относительно перестановок ее аргументов. Рассмотрим U-max статистику*

$$H_N=\max_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n\leqslant N}f(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_n})$$

и для всех $z\in\mathbb{R}$ определим следующие величины:

$$p_{N,z}=\mathbb{P}\left[f(\xi_1,\ldots,\xi_n)>z\right],\quad \lambda_{N,z}=\binom{N}{n}p_{N,z},$$
$$\tau_{N,z}(r)=\frac{\mathbb{P}\left[f(\xi_1,\ldots,\xi_n)>z,f(\xi_{1+n-r},\xi_{2+n-r},\ldots,\xi_{2n-r})>z\right]}{p_{N,z}},$$

где $r \in \{1, \dots, n-1\}$. *Тогда для всех* $N \geqslant n$ *и для всех* $z \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$|\mathbb{P}\left[H_N \leqslant z\right] - e^{-\lambda_{N,z}}|$$
$$\leqslant \left(1-e^{-\lambda_{N,z}}\right) \cdot \left[p_{N,z}\left(\binom{N}{n} - \binom{N-n}{n}\right) + \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\binom{N-n}{n-r}\tau_{N,z}(r)\right]. \tag{10}$$

Замечание 1. [13] Если размер выборки N стремится к бесконечности, то правая часть в (10) имеет порядок

$$O\left(p_{N,z}N^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1}\tau_{N,z}(r)N^{n-r}\right),$$

причем при $n > 1$ первый член является бесконечно малой величиной по отношению к сумме.

Следующая теорема, полученная Сильверманом и Брауном [20], при дополнительных ограничениях в пределе устанавливает невырожденное распределение Вейбулла.

Теорема 4. [20] *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Если для некоторого* $T \subset \mathbb{R}$, *некоторой последовательности преобразований* $z_N : T \to \mathbb{R}$ *и для всех* $t \in T$ *верно*

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{N,z_N(t)} = \lambda_t > 0, \tag{11}$$

$$\lim_{N\to\infty} N^{2n-1}p_{N,z_N(t)}\tau_{N,z_N(t)}(n-1) = 0, \tag{12}$$

тогда при всех $t \in T$ *выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[H_N \leqslant z_N(t)\right] = e^{-\lambda_t}. \tag{13}$$

Замечание 2. [13] Условие (11) влечет $p_{N,z} = O(N^{-n})$. Поэтому, согласно замечанию 1, скорость сходимости в (13) оценивается как

$$O\left(N^{-1} + \sum_{r=1}^{n-1} N^{2n-r}p_{N,z}\tau_{N,z}(r) + \left|e^{-\lambda_{N,z}} - e^{-\lambda_t}\right|\right).$$

Таким образом, при $n \geqslant 2$ условие (12) может быть заменено условием

$$\lim_{N\to\infty} N^{2n-r}p_{N,z}\tau_{N,z}(r) = 0 \text{ при всех } r \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{14}$$

Чтобы применить эти два результата к доказательству теоремы, рассмотрим следующее преобразование:

$$z_N(t) = M - tN^{-\frac{n}{(\beta+3/2)n-1/2}}, \quad t > 0.$$

Наиболее технически сложная часть доказательства вынесена в следующие два предложения, а их доказательства отложены до раздела 4.

Предложение 1. *В условиях теоремы* 2, *при* $\varepsilon \to 0+$ *выполнено*

$$\mathbb{P}\big[f(U_1,\dots,U_n) \geqslant M-\varepsilon\big] = n!\cdot K_n \cdot I[V_1,\dots,V_k]\cdot \varepsilon^{(\beta+3/2)n-1/2}(1+O(\varepsilon)),$$

где K_n *определено в* (5) *и* $I[V_1,\dots,V_k]$ *определено в* (8).

Предложение 2. *При всех* $r \in \{1,\dots,n-1\}$ *выполнено следующее соотношение:*

$$N^{2n-r}\mathbb{P}\big[f(U_1,\dots,U_n) > z_N(t), f(U_{1+n-r},\dots,U_{2n-r}) > z_N(t)\big] = O(N^{\frac{-1}{(2\beta+3)n-1}})$$

при $N \to +\infty$.

Воспользуемся этими двумя предложениями вместе с теоремами 3, 4 для завершения доказательства теоремы 2. Рассмотрим $\lambda_{N,z_N(t)}$, введенное в теореме 3:

$$\lambda_{N,z_N(t)} = \frac{N!}{n!(N-n)!}\mathbb{P}\left[f(U_1,\dots,U_n) > z_N(t)\right].$$

Для краткости до конца этого подраздела мы будем использовать обозначение

$$a\,(\beta,n) = (\beta+3/2)\,n - 1/2.$$

Если мы положим $\varepsilon = tN^{-\frac{n}{a(\beta,n)}}$, то будет выполнено $N^n\varepsilon^{a(\beta,n)} = t^{a(\beta,n)}$. Проверим выполнение предположения (11) теоремы 4. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\lambda_{N,z_N(t)} = \lim_{N\to\infty}\frac{N!}{m!(N-n)!}\mathbb{P}\left[f(U_1,\dots,U_n) > z_N(t)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{N^n(N-n)!}N^n\varepsilon^{a(\beta,n)}\varepsilon^{-a(\beta,n)}\mathbb{P}\left[f(U_1,\dots,U_n) > M-\varepsilon\right]\\
&= \frac{t^{a(\beta,n)}}{n!}\lim_{N\to\infty}\left(tN^{-\frac{n}{a(\beta,n))}}\right)^{-a(\beta,n)}\mathbb{P}\left[f(U_1,\dots,U_n) > M - tN^{-\frac{n}{a(\beta,n)}}\right]\\
&= t^{a(\beta,n)}K_nI[V_1,\dots,V_k] =: \lambda_t > 0,
\end{aligned}$$

где в последнем переходе мы использовали предложение 1. Далее, согласно замечанию 2, предположение (12) можно заменить на (14), которое эквивалентно соотношению

$$\lim_{N\to\infty} N^{2n-r} p_{z_N(t)} \tau_{z_N(t)}(r) = 0 \text{ при всех } r \in \{1, \dots, n-1\},$$

а оно, в свою очередь, следует из предложения 2. Тем самым, мы можем воспользоваться теоремой 4, так как все ее предположения выполнены. Согласно (13), получаем

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[H_N \leqslant z_N(t)\right] = e^{-\lambda_t}$$

для любого $t \in T$. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[H_N \leqslant M - tN^{-\frac{n}{a(\beta,n)}}\right] = \exp\left[-t^{a(\beta,n)} K_n I[V_1, \dots, V_k]\right].$$

Поэтому получаем, что для любого $t > 0$ выполнено

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[N^{\frac{n}{a(\beta,n)}}(M - H_N) \leqslant t)\right] = 1 - \exp\left[-t^{a(\beta,n)} K_n I[V_1, \dots, V_k]\right],$$

причем скорость сходимости, согласно замечанию 2, оценивается как

$$O\left(N^{-1} + \sum_{r=1}^{n-1} p_{N, z_N(t)} \tau_{N, z_N(t)}(r) N^{2n-r}\right) + O\left(\left|e^{-\lambda_{N, z_N(t)}} - e^{-\lambda_t}\right|\right).$$

Из предложения 2 вытекает, что первая часть выражения имеет порядок $O(N^{-\frac{1}{(2\beta+3)n-1}})$. Также заметим, что

$$\left|e^{-\lambda_{N, z_N(t)}} - e^{-\lambda_t}\right| = O\left(\left|\lambda_{N, z_N(t)} - \lambda_t\right|\right) =$$
$$O\left(\frac{N!}{N^n (N-n)!} \varepsilon^{-a(\beta,n)} \mathbb{P}\big[f(U_1, \dots, U_n) > M - \varepsilon\big] - n! K_n I[V_1, \dots, V_k]\right),$$

где ε определено выше. Из предложения 1 вытекает, что порядок последнего выражения равен

$$O\left(n! K_n I[V_1, \dots, V_k] \left((1 + O(N^{-1}))(1 + O(\varepsilon)) - 1\right)\right)$$
$$= O(N^{-1}) + O\left(N^{-\frac{n}{((\beta+3/2)n-1/2)}}\right) = o(N^{-\frac{1}{(2\beta+3)n-1}}).$$

Теорема 2 доказана.

§4. Доказательства предложений 1, 2

4.1. Доказательство предложения 1. Иногда для краткости мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\Phi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n, r_1, \dots, r_n) \in [0, 2\pi)^{n-1} \times (0, 1]^n; \qquad (15)\\&\varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n) \in [0, 2\pi)^{n-1};\\&r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, 1]^n;\\&(\varphi_2, \dots, \varphi_n, r_1, \dots, r_n) = (\varphi, r) = \Phi.\end{aligned}$$

Для точек $V_1, \dots, V_k \in [0, 2\pi]^{n-1} \times [0, 1]^n$, в которых достигается максимум M функции h, обозначим V_i^j j-ю координату точки V_i. Из второй части условия A4 вытекает, что для каждого i выполнено

$$V_i^j \in (0, 2\pi) \quad \text{при всех} \quad j \in \{1, \dots, n-1\}$$

и

$$V_i^j = 1 \quad \text{при всех} \quad j \in \{n, \dots, 2n-1\}. \qquad (16)$$

Также мы введем обозначение

$$V_i^\varphi = (V_i^1, \dots, V_i^{n-1}) \in (0, 2\pi)^{n-1}, \qquad V_i^r = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n}. \qquad (17)$$

Очевидно, что

$$\mathbb{P}\left[f(U_1, \dots, U_n) > z\right] = \mathbb{P}\left[h(\varphi_2, \dots, \varphi_n, r_1, \dots, r_n\}) > z\right],$$

где φ_i определено в (6) и r_i определено в (7). В дальнейшем мы будем иметь дело только с функцией h.

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим

$$\begin{aligned}S(\varepsilon) = \min\{\, s \geqslant 0 \mid \forall x \in [0, 2\pi]^{n-1} \times [0, 1]^n : M - h(x) \leqslant \varepsilon\\ \Rightarrow \exists i : \|x - V_i\| \leqslant s \,\} + \varepsilon^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Аналогично [19], легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} S(\varepsilon) = 0. \qquad (18)$$

Из этого следует, что для достаточно малых ε выполнено

$$\mathbb{P}\left[h(\Phi) \geqslant M - \varepsilon\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left[h(\Phi) \geqslant M - \varepsilon, \|V_i - \Phi\| \leqslant S(\varepsilon)\right], \qquad (19)$$

где $\Phi \in [0,2\pi]^{n-1} \times [0,1]^n$.

Зафиксируем некоторое $i \in \{1,\ldots,k\}$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ произошло следующее событие:

$$h(\Phi) = h(\varphi_2,\ldots,\varphi_n, r_1,\ldots,r_n) \geqslant M - \varepsilon,\ \|V_i - \Phi\| \leqslant S(\varepsilon). \tag{20}$$

Из (18) вытекает, что существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что $S(\varepsilon_0) < \min\left(\frac{\delta}{2}, 1\right)$, где δ определено условием A5. Функция $S(\varepsilon)$ не убывает, поэтому для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ верно

$$S(\varepsilon) < \min\left(\frac{\delta}{2}, 1\right). \tag{21}$$

Далее мы всегда предполагаем, что $\varepsilon < \varepsilon_0$. Так как h три раза непрерывно дифференцируема в δ-окрестности любой точки максимума, можно рассмотреть разложение в ряд Тейлора функции h в окрестности точки V_i с остаточным членом третьего порядка. Для этого обозначим

$$\begin{aligned} &\alpha_j = \varphi_j - V_i^{j+1} \text{ и } \alpha = (\alpha_2,\ldots,\alpha_n), \\ &\rho_j = 1 - r_j \text{ и } \rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n). \end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, что

$$\|(\alpha,\rho)\| = \|\Phi - V_i\| < \frac{\delta}{2}.$$

Здесь мы рассматриваем $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$ как разницу двух элементов из $\mathbb{R}^{n-1}$, а не как разницу двух наборов углов. Из (18) и условия A4 следует, что оно одно и то же для всех достаточно малых ε.

Напишем разложение в ряд Тейлора функции h в точке V_i. Из (16) вытекает

$$\begin{aligned} &h(\varphi_2,\ldots,\varphi_n, r_1,\ldots,r_n) = h\left(V_i^1 + \alpha_2,\ldots,V_i^{n-1} + \alpha_n, 1-\rho_1,\ldots,1-\rho_n\right) \\ &= h(V_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j}\alpha_{j+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\rho_j + \sum_{1\leqslant l,s\leqslant n-1} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_l \partial x_s}\alpha_{l+1}\alpha_{s+1} \\ &- \sum_{1\leqslant l\leqslant n-1, 1\leqslant s\leqslant n} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_l \partial x_{n-1+s}}\alpha_{l+1}\rho_s + \sum_{1\leqslant l,s\leqslant n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1+l}\partial x_{n-1+s}}\rho_l\rho_s \\ &+ \sum_{1\leqslant l,s,t\leqslant 2n-1} \frac{1}{6}\frac{\partial^3 h\left(V_i + r_{(l,s,t)}\right)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} y_l y_s y_t, \end{aligned} \tag{23}$$

где $r_{(l,s,t)} = c_{(l,s,t)} \cdot (\alpha_2,\ldots,\alpha_n,-\rho_1,\ldots,-\rho_n)$, и $c_{(l,s,t)} \in (0,1)$ являются некоторыми константами, зависящими только от индексов l,s,t и от функции h. Также мы воспользовались обозначениями $y_i = \alpha_{i+1}$ при $i < n$ и $y_i = -\rho_{i-n+1}$ при $i \geqslant n$. Из (17) мы заключаем, что V_i^φ не лежит на границе области определения непрерывной функции h, поэтому $\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j} = 0$ при всех $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Рассмотрим матрицу

$$A^i = \frac{1}{2} G_i, \tag{24}$$

где G_i определены в условии A6. Очевидно, что коэффициент перед $\alpha_l \alpha_s$ в (23) равен $a^i_{l,s}$ (элемент матрицы A^i). Таким образом,

$$\begin{aligned} h(\Phi) &= M - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} \rho_j + \sum_{1 \leqslant l,s \leqslant n} a^i_{l,s} \alpha_{l+1} \alpha_{s+1} \\ &- \sum_{1 \leqslant l \leqslant n-1, 1 \leqslant s \leqslant n} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_l \partial x_{n-1+s}} \alpha_{l+1} \rho_s + \sum_{1 \leqslant l,s \leqslant n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1+l} \partial x_{n-1+s}} \rho_l \rho_s \\ &+ \sum_{1 \leqslant l,s,t \leqslant 2n-1} \frac{1}{6} \frac{\partial^3 h\left(V_i + r_{(l,s,t)}\right)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} y_l y_s y_t. \end{aligned}$$

Поэтому условие (20) эквивалентно

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} \rho_j - \sum_{1 \leqslant l,s \leqslant n-1} a^i_{l,s} \alpha_{l+1} \alpha_{s+1} - \sum_{1 \leqslant l,s \leqslant n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1+l} \partial x_{n-1+s}} \rho_l \rho_s \\ &+ \sum_{1 \leqslant l \leqslant n-1, 1 \leqslant s \leqslant n} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_l \partial x_{n-1+s}} \alpha_{l+1} \rho_s - \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant l,s,t \leqslant 2n-1} \frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} y_l y_s y_t \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{25}$$

Предполагая условия (20) и (21) выполненными, оценим некоторые члены второго порядка и все члены третьего порядка в этой формуле. Заметим, что $\|\alpha\|, \|\rho\| \leqslant S(\varepsilon)$, поэтому существует константа $M_1 > 0$, такая что

$$\left| \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_l \partial x_{n-1+s}} \alpha_{l+1} \rho_s \right| \leqslant M_1 S(\varepsilon) \rho_s, \quad \left| \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{n-1+l} \partial x_{n-1+s}} \rho_l \rho_s \right| \leqslant M_1 S(\varepsilon) \rho_l.$$

Так как функции $\frac{\partial h(V_i+r)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t}$ непрерывны при $|r| \leqslant \frac{\delta}{2}$, существует константа M_2, такая что $\left|\frac{\partial h(V_i+r)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t}\right|$ не превышает M_2 при всех $|r| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Оценим члены третьего порядка в разложении Тейлора. Для членов с

$l \geqslant n$ выполнено

$$\left|\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} y_l y_s y_t\right| \leqslant M_2 y_l y_s y_t \leqslant M_2 S(\varepsilon)^2 \rho_{l-n+1} \leqslant M_2 S(\varepsilon) \rho_{l-n+1}. \tag{26}$$

Аналогичные оценки верны для членов с $s \geqslant n, t \geqslant n$.

Для членов с $l, s, t < n$ выполнено

$$\left|\frac{\partial h\left(V_i + r_{(l,s,t)}\right)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} y_l y_s y_t\right| = \left|\frac{\partial h\left(V_i + r_{(l,s,t)}\right)}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t} \alpha_{l+1} \alpha_{s+1} \alpha_{t+1}\right| \leqslant M_2 \left|\alpha_{l+1} \alpha_{s+1} \alpha_{t+1}\right| \tag{27}$$

$$\leqslant M_2 \frac{\left|\alpha_{l+1}\right|^3 + \left|\alpha_{s+1}\right|^3 + \left|\alpha_{t+1}\right|^3}{3} \leqslant M_2 \frac{\alpha_{l+1}^2 + \alpha_{s+1}^2 + \alpha_{t+1}^2}{3} S(\varepsilon).$$

Из (25) мы получаем следующее неравенство для всех $\|\rho\|, \|\alpha\| < S(\varepsilon), \rho_j \geqslant 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} \rho_j + \sum_{j=1}^{n} \widehat{C_j} S(\varepsilon) \rho_j + M_3 S\left(\varepsilon\right) \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{s+1}^2 - \sum_{1 \leqslant l, s \leqslant n} a_{l,s}^i\, \alpha_{l+1} \alpha_{s+1}$$
$$\geqslant M - h\left(V_i + \alpha\right)$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} \rho_j - \sum_{j=1}^{n} \widehat{C_j} S(\varepsilon) \rho_j - M_3 S\left(\varepsilon\right) \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{s+1}^2 - \sum_{\substack{1 \leqslant l, \\ s \leqslant n}} a_{l,s}^i \alpha_{l+1} \alpha_{s+1},$$

где $M_3, \widehat{C_j}, j \in \{1, \ldots, n\}$ являются некоторыми константами, полученными суммированием оценок (26), (27) по всем тройкам (l, s, t). Из условия A7 и (16) мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} > 0 \text{при всех } i \in \{1, \ldots, k\},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{28}$$

Следовательно, существует константа C_j, для которой верно

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1+C_jS(\varepsilon))\,\rho_j + M_3S\,(\varepsilon)\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_{s+1}^2 \\ -\sum_{1\leqslant l,s\leqslant n} a_{l,s}^i\,\alpha_{l+1}\alpha_{s+1} \geqslant M - h\,(V_i+\alpha) \\ \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1-C_jS(\varepsilon))\,\rho_j - M_3S\,(\varepsilon)\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_{s+1}^2 \\ -\sum_{\substack{1\leqslant l,\\ s\leqslant n}} a_{l,s}^i\,\alpha_{l+1}\alpha_{s+1}.\end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим

$$A^i\,(\varepsilon) = \begin{cases} A^i + M_3S\,(\varepsilon)\,I_{n-1}, \text{ если } \varepsilon \geqslant 0, \\ A^i - M_3S\,(-\varepsilon)\,I_{n-1}, \text{ если } \varepsilon \leqslant 0, \end{cases}$$

где A^i то же, что и в (24), и I_{n-1} обозначает единичную матрицу размера $(n-1)\times(n-1)$. Тогда неравенство (29) может быть переписано с использованием скалярного произведения $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\,(1+C_jS\,(\varepsilon))\,\rho_j - \langle A^i\,(-\varepsilon)\,\alpha,\alpha\rangle \leqslant \varepsilon, \|\alpha\|, \|\rho\| \leqslant S(\varepsilon), \\ \rho_j \geqslant 0 \text{ при всех } j\in\{1,\ldots,n\}\,\big] \geqslant \mathbb{P}\big[h\,(\Phi)\geqslant M-\varepsilon, \|V_i-\Phi\|\leqslant S\,(\varepsilon)\big] \\ \geqslant \mathbb{P}\big[\,\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1-C_jS(\varepsilon))\rho_j - \langle A^i\,(\varepsilon)\,\alpha,\alpha\rangle \leqslant \varepsilon, \|\alpha\|, \|\rho\| \leqslant S(\varepsilon), \\ \rho_j \geqslant 0 \text{ при всех } j\in\{1,\ldots,n\}\,\big].\end{aligned} \tag{30}$$

Нам понадобится следующая лемма технического характера.

Лемма 1. *Существуют константы $\bar{C}$ и $\bar{D}$, такие что для любого ε, удовлетворяющего $0<\varepsilon<\bar{C}$, $f(U_1,\ldots,U_n)\geqslant M-\varepsilon$, существует индекс $i\in\{1,\ldots,k\}$, такой что $\|V_i^{\varphi}-\varphi\|\leqslant \bar{D}\sqrt{\varepsilon}$, $\|V_i^r - r\|\leqslant \bar{D}\varepsilon$, где φ, r определены в* (6), (7) *и V_i определены в условии* **A4** *и в* (17).

Доказательство. Как было показано в [19], матрицы $A^i(\varepsilon)$ отрицательно определены для всех достаточно малых ε и $-\langle A^i\,(\varepsilon)\,\alpha,\alpha\rangle \geqslant 0$.

Поэтому неравенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1 - C_j S(\varepsilon))\rho_j - \langle A^i(\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle \leqslant \varepsilon$ вместе с условием $\rho_j \geqslant 0$ при всех $j \in \{1, \dots, n\}$, а также (28) влекут следующие два неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1 - C_j S(\varepsilon))\rho_j \leqslant \varepsilon, \tag{31}$$

$$-\langle A^i\,(\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle \leqslant \varepsilon. \tag{32}$$

Как и в [19], существуют константы $\bar{C}_1, \bar{D}_1 > 0$, такие что неравенство (32) влечет $\|\alpha\| < \bar{D}_1\sqrt{\varepsilon}$ при всех $0 \leqslant \varepsilon < \bar{C}_1$ (см. [19, Следствие 7.1]). Из (18),(28) следует, что существуют константы $\bar{C}_2, \bar{D}_2 > 0$, такие что неравенство (31) влечет $\|\rho\| < \bar{D}_2\varepsilon$ при всех $0 \leqslant \varepsilon < \bar{C}_2$. Следовательно, мы можем выбрать $\bar{C} = \min\left(\bar{C}_1, \bar{C}_2\right), \bar{D} = \min\left(\bar{D}_1, \bar{D}_2\right)$, и лемма 1 доказана. □

Из леммы 1 мы можем заключить, что при достаточно малых ε условия$\|\alpha\|$, $\|\rho\| < S(\varepsilon)$ в (30) можно убрать без изменения соответствующих вероятностей.

Доказательсто предложения 1 будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 2. *Для некоторых вещественных констант $D_1, \dots, D_n$ при $\varepsilon \to +0$ выполнено*

$$\mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\,(1{+}D_j S\,(\varepsilon))\,\rho_j - \langle A^i\,(\pm\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle {\leqslant} \varepsilon, \rho_j {\geqslant} 0 \textit{ for } j {\in} \{1, \dots, n\}\right] \tag{33}$$

$$= n! \cdot K_n \cdot I[V_1, \dots, V_k] \cdot \varepsilon^{(\beta+3/2)n-1/2}(1 + O(\varepsilon)),$$

где K_n определено в (5) *и $I[V_1, \dots, V_k]$ определено в* (8).

Доказательство. Плотность бета распределения в полярных координатах имеет вид $p(\phi, r) = \frac{(\beta+1)}{\pi} r\left(1 - r^2\right)^{\beta} \mathbf{1}\{r \in (0,1)\}$. Поэтому

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\,(1{+}D_j S\,(\varepsilon))\,\rho_j {-} \langle A^i\,(\pm\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle {\leqslant} \varepsilon, \rho_j {\geqslant} 0 \text{ for } 1 {\leqslant} j {\leqslant} n\Big]$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} \underbrace{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{n} \mathbf{1}\Big\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\,(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\,(1 + D_j S\,(\varepsilon))\,\rho_j - \langle A^i\,(\,\pm\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle \leqslant \varepsilon\Big\}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{(\beta+1)}{\pi} r_j (1-r_j^2)^{\beta} \right) dr_1 \dots dr_n \, d\phi_1 \dots d\phi_n,$$

где ρ_j, α_j определены в (22) и удовлетворяют $\rho_j = 1 - r_j, j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_j = \phi_j - V_i^{j+1} - \phi_1, j \in \{2, \dots, n\}$. Сделаем замену переменных $(r_i, \phi_i) \to (\rho_i, \alpha_i)$. Тогда последний интеграл будет равен

$$\underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} \int_0^{2\pi} \int_{-V_i^1}^{2\pi - V_i^1} \dots \int_{-V_i^{n-1}}^{2\pi - V_i^{n-1}} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} (1 + D_j S(\varepsilon)) \rho_j - \langle A^i (\pm\varepsilon) \alpha, \alpha \rangle \leqslant \varepsilon \Big\}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{(\beta+1)}{\pi} (1-\rho_j) \left(\rho_j (2-\rho_j)\right)^{\beta} \right) d\alpha_n \dots d\alpha_1 \, d\rho_1 \dots d\rho_n$$

$$= \frac{2(\beta+1)^n}{\pi^{n-1}} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} \int_{-V_i^1}^{2\pi - V_i^1} \dots \int_{-V_i^{n-1}}^{2\pi - V_i^{n-1}} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} (1 + D_j S(\varepsilon)) \rho_j$$

$$- \langle A^i (\pm\varepsilon) \alpha, \alpha \rangle \leqslant \varepsilon \Big\} \times \prod_{j=1}^{n} \left((1-\rho_j) \left(\rho_j (2-\rho_j)\right)^{\beta} \right) d\alpha_n \dots d\alpha_2 d\rho_1 \dots d\rho_n$$

По лемме 1, неравенство $\sum_{j=1}^{n} (1 + D_j S(\varepsilon)) \rho_i - \langle A^i (\pm\varepsilon) \alpha, \alpha \rangle \leqslant \varepsilon$ влечет $\rho_j < \bar{C}_3 \varepsilon$. Поэтому $(2-\rho_j)^{\beta} (1-\rho_i) = 2^{\beta}(1 + O(\varepsilon))$ для всех ρ, для которых подынтегральное выражение больше, чем 0. Поэтому последнее выражение равно

$$\frac{2^{n\beta+1} (\beta+1)^n}{\pi^{n-1}} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} \int_{-V_i^1}^{2\pi - V_i^1} \dots \int_{-V_i^{n-1}}^{2\pi - V_i^{n-1}} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}} (1 + D_j S(\varepsilon)) \rho_j$$

$$- \langle A^i (\pm\varepsilon) \alpha, \alpha \rangle \leqslant \varepsilon \Big\} \times \prod_{j=1}^{n} \rho_j^{\beta} d\alpha_n \dots d\alpha_2 \, d\rho_1 \dots d\rho_n \cdot (1 + O(\varepsilon)) \tag{34}$$

$$=\frac{2^{n\beta+1}(\beta+1)^n}{\pi^{n-1}}(1+O(\varepsilon))\int\limits_0^\varepsilon \underbrace{\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1}_{n}\mathbf{1}\Big\{\sum_{j=1}^n\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}(1+D_jS(\varepsilon))\rho_j=x\Big\}\prod_{j=1}^n\rho_j^\beta$$

$$\times\int\limits_{-V_i^1}^{2\pi-V_i^1}\dots\int\limits_{-V_i^{n-1}}^{2\pi-V_i^{n-1}}\mathbf{1}\Big\{-\langle A^i(\pm\varepsilon)\,\alpha,\alpha\rangle\leqslant\varepsilon-x\Big\}\;d\alpha_n\dots d\alpha_2\,d\rho_1\dots d\rho_n\;dx.$$

Рассмотрим интеграл по переменным $\alpha_2,\dots\alpha_n$. Из леммы 1 вытекает $\|\alpha\|<\bar{D}_1\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому данное выражение можно интегрировать по $\mathbb{R}^{n-1}$ при достаточно малых ε. В [19] было показано, что данный интеграл равен

$$\frac{(\varepsilon\pi(1-x/\varepsilon))^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\det\left(-A^i(\pm\varepsilon)\right)}}.$$

Из (18), (24) и (32) следует, что это равно

$$\frac{(\varepsilon\pi(1-x/\varepsilon))^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\det\left(-A^i\right)}}\left(1+O\left(\varepsilon\right)\right)=\frac{(2\varepsilon\pi)^{\frac{n-1}{2}}\;(1-x/\varepsilon)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\det\left(-G^i\right)}}\left(1+O\left(\varepsilon\right)\right).$$

Поэтому интеграл из (34) равен следующему:

$$\begin{aligned}&=\frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}2^{(\beta+1/2)n+1/2}(\beta+1)^n}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\det\left(-G^i\right)}}\\&\times\int\limits_0^\varepsilon\underbrace{\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1}_{n}\mathbf{1}\Big\{\sum_{j=1}^n\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_{n-1+j}}\left(1+D_jS\left(\varepsilon\right)\right)\rho_j=x\Big\}\\&\times(1-x/\varepsilon)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{j=1}^n\rho_j^\beta\;\;d\rho_1\dots d\rho_n\;\;dx\;\;\cdot\left(1+O\left(\varepsilon\right)\right).\end{aligned}\tag{35}$$

Из (18) и (28) следует, что мы можем интегрировать по $[0,+\infty)^n$. Пусть

$$y=\frac{x}{\varepsilon},\qquad\qquad z_j=\frac{\rho_j}{\varepsilon}\text{ при всех }j\in\{1,\dots,n\}.$$

Заменим переменные $x, \rho_1, \ldots, \rho_n$ на $y, z_1, \ldots, z_n$. Интеграл из (35) может быть записан в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^{(\beta+3/2)n-1/2}\, 2^{(\beta+1/2)n+1/2}\, (\beta+1)^n}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\det\left(-G^i\right)}} \\
&\times \int_0^1 \underbrace{\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} \left(1 + D_j S\left(\varepsilon\right)\right) z_j = y \Big\} \\
&\times (1-y)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n} z_j^{\beta}\, dz_1 \ldots dz_n\, dy \cdot \left(1 + O\left(\varepsilon\right)\right) \qquad (36) \\
&= \frac{\varepsilon^{(\beta+3/2)n-1/2}\, 2^{(\beta+1/2)n+1/2}\, (\beta+1)^n}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\det\left(-G^i\right)}} \\
&\times \underbrace{\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} \left(1 + D_j S\left(\varepsilon\right)\right) z_j < 1 \Big\} \\
&\times \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h\left(V_i\right)}{\partial x_{n-1+j}} \left(1 + D_j S(\varepsilon)\right) z_j \right)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n} z_j^{\beta} dz_1 \ldots dz_n \cdot \left(1 + O\left(\varepsilon\right)\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство (33) будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 3. *предположим, что $a_j > 0$ при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда выполнено*

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_j z_j < 1 \Big\} \quad \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j z_j\right)^{\frac{n-1}{2}} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{n} z_j^{\beta}\, dz_1 \ldots dz_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\Gamma\left(\beta+1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + n(\beta+1) + 1\right)} \prod_{j=1}^{n} a_j^{-1-\beta}.
\end{aligned}
\qquad (37)
$$

Доказательство. Обозначим $t_j = a_j z_j$ новые переменные в интеграле из (37). Получим, что (37) равно

$$\prod_{j=1}^{n} a_j^{-1-\beta} \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} t_j\right)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\beta} dt_1 \dots dt_n. \quad (38)$$

Покажем, что следующее равенство выполняется при всех $l \in \{1, \dots, n\}$:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} t_j\right)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\beta}\, dt_1 \dots dt_n$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\beta+1\right)^l}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + l(\beta+1) + 1\right)} \times \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{n-l} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n-l} t_j < 1 \Big\} \quad (39)$$
$$\left(1 - \sum_{j=1}^{n-l} t_j\right)^{\frac{n-1}{2} + l(\beta+1)} \prod_{j=1}^{n-l} t_j^{\beta}\, dt_{n-l} \dots dt_1.$$

Докажем сначала (39) для $l = 1$. Имеем:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{n} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} t_j\right)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\beta}\, dt_n \dots dt_1$$
$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{n-1} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n-1} t_j < 1 \Big\} \prod_{j=1}^{n-1} t_j^{\beta} \int_0^{1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} t_j\right)^{\frac{n-1}{2}} t_n^{\beta}\, dt_n \dots dt_1.$$

Заменим переменную t_n на $x_n = \frac{t_n}{1-\sum\limits_{j=1}^{n-1} t_j}$. Тогда последнее выражение будет равно

$$= \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \dots \int\limits_0^{+\infty}}_{n-1} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n-1} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right)^{\frac{n-1}{2}+\beta}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} t_j^{\beta} \int\limits_0^1 (1-x_n)^{\frac{n-1}{2}} x_n^{\beta}\, dx_n dt_{n-1} \dots dt_1. \quad (40)$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^1 (1-x_n)^{\frac{n-1}{2}} x_n^{\beta} dx_n = B\left(\frac{n-1}{2} + 1, \beta+1 \right) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+\beta+2\right)}. \quad (41)$$

Подставив (41) в (40), получим (39) с $l = 1$.

Предположим теперь, что (39) верно для некоторого l. Докажем, что (39) верно также и для $l + 1$. Аналогично случаю $l = 1$, заменим переменную t_{n-l} на $x_{n-l} = t_{n-l} \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{n-l-l} t_j \right)^{-1}$ и напишем

$$\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \dots \int\limits_0^{+\infty}}_{n-l} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n-l} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-l} t_j \right)^{\frac{n-1}{2}+l(\beta+1)} \prod_{j=1}^{n-l} t_j^{\beta}\, dt_{n-l} \dots dt_1$$

$$(42)$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \dots \int\limits_0^{+\infty}}_{n-l-1} \mathbf{1}\Big\{ \sum_{j=1}^{n-l-1} t_j < 1 \Big\} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-l-1} t_j \right)^{\frac{n-1}{2}+l(\beta+1)+\beta+1} \prod_{j=1}^{n-l-1} t_j^{\beta}$$

$$\int\limits_0^1 (1-x_{n-l})^{\frac{n-1}{2}+l(\beta+1)} x_{n-l}^{\beta}\, dx_{n-l}\, dt_{n-l-1} \dots dt_1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\int_0^1 &(1-x_{n-l})^{\frac{n-1}{2}+l(\beta+1)}\, x_{n-l}^{\beta}\, dx_{n-l} \\ &= B\left(\frac{n-1}{2}+l\,(\beta+1)+1, \beta+1\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+l\,(\beta+1)+1\right)\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+(l+1)\,(\beta+1)+1\right)}.\end{aligned} \tag{43}$$

Подставляя (43) в (42), получим, что (39) выполнено для $l+1$. Таким образом, формула (39) доказана. Подставляя (39) в (38), получаем (37). □

Из леммы 3, (18) и (36) получаем (33), что заканчивает доказательство леммы 2. □

Из (19) и леммы 2 вытекает предложение 1.

4.2. Доказательство предложения 2. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\varphi_i = \angle U_1 O U_i \text{ при всех } i \in \{2,\ldots,2n-r-1\},\\ &\gamma_i = \angle U_{n-r+1} O U_i \text{ при всех } i \in \{n-r+1,\ldots,2n-r\},\\ &\rho_i = 1-\|OU_i\| \text{ при всех } i \in \{1,\ldots,2n-r\}.\end{aligned}$$

Данные обозначения соответствуют (6) и (15) для всех $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Очевидно, что $\gamma_i = (\varphi_i - \varphi_{n-r}) \mod 2\pi$ при всех $i \geqslant n$. Рассмотрим событие

$$\begin{aligned}Q_{i,j} = &\{\|V_i^{\varphi} - (\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\| \leqslant \bar{D}\sqrt{\varepsilon}, \|(\rho_1,\ldots,\rho_n)\| \leqslant \bar{D}\varepsilon,\\ &\|V_j^{\varphi} - (\gamma_{n-r+1},\ldots,\gamma_{2n-r})\| \leqslant \bar{D}\sqrt{\varepsilon}, \|(\rho_{n-r+1},\ldots,\rho_{2n-r})\| \leqslant \bar{D}\varepsilon\},\end{aligned}$$

где V_i^{φ} такое же, как и в (17) и константа $\bar{D}$ введена в лемме 1. По лемме 1, для достаточно малых $z_N(t)$ выполнено

$$\begin{aligned}&\{h(U_1,\ldots,U_n) \geqslant z_N(t) \cap h(U_{1+n-r},\ldots,U_{2n-r}) \geqslant z_N(t)\}\\ &\quad = \bigcup_{1\leqslant i,j\leqslant k} ([h(U_1,\ldots,U_n) \geqslant z_N(t) \cap h(U_{1+n-r},\ldots,U_{2n-r})\\ &\quad \geqslant z_N(t)] \cap Q_{i,j}).\end{aligned} \tag{44}$$

Далее, оценим вероятность

$$\mathbb{P}\left[(f(U_1,\dots,U_n) \geqslant z_N(t) \cap f(U_{1+n-r},\dots,U_{2n-r}) \geqslant z_N(t)) \cap Q_{i,j}\right]. \quad (45)$$

По определению, для всех V_i из $Q_{i,j}$ верны следующие оценки на φ_i, γ_i и ρ_i : $\|\varphi_{l+1} - V_i^l\| \leqslant \bar{D}\sqrt{\varepsilon}$ при $i \leqslant n$, $\|\gamma_{l+1} - V_j^{l-n+r}\| \leqslant \bar{D}\sqrt{\varepsilon}$, и $\rho_i < \bar{D}\varepsilon$ при $i \leqslant 2n-r$. При $l \geqslant n$ получаем

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{l+1}-V_i^{n-r} - V_j^{l-n+r}\right\| \leqslant \left\|\varphi_{l+1} - \varphi_{n-r+1}-V_j^{l-n+r}\right\| \\ + \left\|\varphi_{n-r+1}-V_i^{n-r}\right\| \leqslant 2\bar{D}\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Применяя свойства распределения φ_{l+1}, мы можем оценить сверху вероятность (45) следующим образом.

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_{-2\bar{D}\sqrt{\varepsilon}}^{2\bar{D}\sqrt{\varepsilon}} \cdots \int_{2\bar{D}\sqrt{\varepsilon}}^{2\bar{D}\sqrt{\varepsilon}}}_{2n-r-1} \underbrace{\int_0^{\bar{D}\varepsilon} \cdots \int_0^{\bar{D}\varepsilon}}_{2n-r} \prod_{j=1}^{2n-r} \left(\frac{(\beta+1)}{\pi} r_j^{\beta}(1-r_j)(2-r_j)^{\beta}\right) dr_1 \dots dr_{2n-r} d\phi_2 \dots d\phi_{2n-r} \\ &\leqslant \left(4\sqrt{\varepsilon}\right)^{2n-r-1} \left(\frac{2^{\beta}(\beta+1)}{\pi}\int_0^{\bar{D}\varepsilon} x^{\beta}\, dx\right)^{2n-r} = O\left(\varepsilon^{\frac{2n-r-1}{2}+(2n-r)(\beta+1))}\right).\end{aligned}$$

Используя (44) и подставляя $\varepsilon = tN^{-\frac{n}{(\beta+3/2)n-1/2}}$ в оценку на (45), получаем

$$\begin{aligned}&N^{2n-r}\mathbb{P}\left[f(U_1,\dots,U_n) \geqslant z_N(t), f(U_{1+n-r},\dots,U_{2n-r}) \geqslant z_N(t)\right] \\ &\leqslant N^{2n-r}k^2 O\left(\left(tN^{-\frac{n}{((\beta+3/2)n-1/2)}}\right)^{\frac{2n-r-1}{2}+(2n-r)(\beta+1))}\right) \\ &= O(N^{\frac{r-n}{(2\beta+3)n-1}}) = O(N^{\frac{-1}{(2\beta+3)n-1}}).\end{aligned}$$

Автор благодарит Д. Н. Запорожца за его неоценимую помощь при подготовке статьи.

Список литературы

1. A. D. Barbour, L. Holst, S. Janson, *Poisson Approximation.* Oxford University Press, London (1992).
2. J. Berman, K. Hanes, *Volumes of polyhedra inscribed in the unit sphere in* E^3. — Mathematische Annalen. **188**, No. 1 (1970), 78–84.
3. P. R. Halmos, *The theory of unbiased estimation.* — Ann. Math. Statist., **17** (1946), 34–43.
4. N. Henze, T. Klein, *The limit distribution of the largest interpoint distance from a symmetric Kotz sample.* — J. Multivariate Anal. **57** (1996), 228–239.

5. W. Hoeffding, *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* — Ann. Math. Statist. **19** (1948), 293–325.
6. Á. Horváth, Z. Lángi, *Maximum volume polytopes inscribed in the unit sphere.* — Monatshefte für Mathematik. **281**, No. 2 (2016), 341–354.
7. S. R. Jammalamadaka, S. Janson, *Asymptotic distribution of the maximum interpoint distance in a sample of random vectors with a spherically symmetric distribution.* — Ann. Appl. Probab. **25**, No. 6 (2015), 3571 – 3591.
8. Z. Kabluchko, *Angles of random simplices and face numbers of random polytopes.* — Adv. Math. **380** (2021), article 107612.
9. Z. Kabluchko, D. Temesvari, C. Thäle, *Expected intrinsic volumes and facet numbers of random beta-polytopes.* — Math. Nachr. **292** (2019), 79—105.
10. Z. Kabluchko, C. Thäle, D. Zaporozhets, *Beta polytopes and Poisson polyhedra: f-vectors and angles.* — Adv. Math. **374** (2020), article 107333.
11. E. V. Koroleva, Ya. Yu. Nikitin, *U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons.* — J. Multivariate Anal. **127** (2014), 99–111.
12. W. Lao, *Some weak limit laws for the diameter of random point sets in bounded regions.* Ph.D. Thesis, Karlsruhe, 2010.
13. W. Lao, M. Mayer, *U-max-statistics.* — J. Multivariate Anal. **99** (2008), 2039–2052.
14. A. J. Lee, *U-statistics: Theory and Practice.* Routledge, 2019.
15. P. C. Matthews, A. L. Rukhin, *Asymptotic distribution of the normal sample range.* — Ann. Appl. Probab. **3** (1993), 454–466.
16. M. Mayer, *Random Diameters and Other U-max-Statistics.* Ph.D. Thesis, Bern University, 2008.
17. M. Mayer, I. Molchanov, *Limit theorems for the diameter of a random sample in the unit ball.* — Extremes **10** (2007),151–174.
18. Я. Ю. Никитин, Т. А. Полевая, *Предельные теоремы для площадей и периметров случайных вписанных и описанных многоугольников.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 200–213.
19. Ya. Yu. Nikitin, E. N. Simarova, *Generalized Limit Theorems For U-max Statistics.* — preprint.
20. F. B. Silverman, T. Brown, *Short distances, flat triangles, and Poisson limits.* — J. Appl. Probab. **15** (1978), 815–825.
21. Е. Н. Симарова, *Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. I.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **7 (65)** , No. 4 (2020), 678–687.
22. Е. Н. Симарова, *Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. II.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **8 (66)** , No. 1 (2021), 78–85.

Simarova E. N. Extremal random beta polytopes.

The convex hull of several i.i.d. beta distributed random vectors in $\mathbb{R}^d$ is called the random beta polytope. Recently, the expected values of their intrinsic volumes, number of faces, normal and tangent angles and other quantities have been calculated, explicitly and asymptotically. In this paper, we aim to investigate the asymptotic behavior of the beta polytopes with extremal intrinsic volumes. We suggest a conjecture and solve it in dimension 2. To this end, we obtain some general limit relation for a wide class of U-max statistics whose kernels include the perimeter and the area of the convex hull of the arguments.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
198504 Санкт-Петербург, Россия;
С.-Петербургский международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера (подразделение СПбГУ),
14 линия В.о. 29Б,
199178, С.-Петербург, Россия
E-mail: `katerina.1.14@mail.ru`

Поступило 8 августа 2021 г.