Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Л. В. Розовский

О скорости сходимости в "точных асимптотиках" для случайных величин с устойчивым распределением

§1. Результаты

Настоящая заметка является прямым продолжением работ [1] и [2], в связи с чем позволим себе предложить заинтересованному читателю обратиться к упомянутым работам для ознакомления с историей вопроса, и сразу перейдем к изложению результатов.

Начнем с довольно общего результата, который дополняет аналогичные утверждения из [1, предложение 1] и [2, предложение 1].

Введем обозначения.

В дальнейшем, положительная дважды дифференцируемая не убывающая функция $g(u)$, $u \geqslant k$ (целое $k \geqslant 1$) удовлетворяет условиям

$$g(\infty) = \infty, \quad g''(\infty) = 0, \quad \int\limits_k^\infty |dg''(u)| < \infty \tag{1.1}$$

и

$$g'^2(u)/g(u) + |g''(u)| \leqslant C\, g^{-\rho}(u),\ u \geqslant k, \tag{1.2}$$

где $C > 0$ и $\rho > 0$ – некоторые постоянные; кроме того, дважды дифференцируемая функция $f(u)$ строго возрастает на $(0, \infty)$, причем $f(0+) = 0$ и $f(\infty) = \infty$.

Замечание 1.1. Условие (1.2) вытекает из

$$g(y) \leqslant C\, y^{2/(1+\rho)}, \quad g'(y) \leqslant C\, g(y)/y, \quad |g''(u)| \leqslant C\, g(y)/y^2 \tag{1.3}$$

При этом, второе и третье неравенства в (1.3) имеют место, если $g(y) = y^s\, l(y)$, где $s > 0$ и $y\, l'(y)/l(y) \to 0, \quad y^2\, l''(y)/l(y) \to 0,\ y \to \infty$ $\big($выражаясь точнее, в этом случае

$$g'(y) = (s + o\,(1))\, g(y)/y, \quad g''(y) = \big(s(s-1) + o\,(1)\big)\, g(y)/y^2,\ y \to \infty\big).$$

В частности, (1.3) выполняется, если $g(y) = y^{s+1}$, где $|s| < 1$.

Ключевые слова: скорость сходимости, устойчивое распределение, точная асимптотика, полная сходимость.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00356.

Предложение 1. *Пусть случайная величина Y имеет распределение G с плотностью q, монотонной в некоторой положительной окрестности нуля и ограниченной вариации на положительной полуоси, причем*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\, f'(\varepsilon)\, q(f(\varepsilon)) = 0, \tag{1.4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2\, f''(\varepsilon)\, q(f(\varepsilon)) = 0. \tag{1.5}$$

и $\big(\bar G(x) = 1 - G(x)\big)$

$$\text{функция}\ \ \bar G(f(y))\ \text{выпукла на}\ \ (y_0,\infty), \tag{1.6}$$

$$\int\limits_1^\infty \bar G(f(t))\, dt < \infty\ \big(\text{или, равносильно,}\ \ \mathbf{E} f^{-1}(Y^+) < \infty\big). \tag{1.7}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant k} g'(n)\, \mathbf{P}\,(Y \geqslant f(\varepsilon\, g(n))) - \varepsilon^{-1}\, \mathbf{E} f^{-1}(Y^+) \right) = \bar G(0+)\, \gamma_g(k), \tag{1.8}$$

где конечная постоянная

$$\gamma_g(k) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=k}^{N} g'(n) - g(N) - \frac{1}{2}\, g'(N) \right). \tag{1.9}$$

Скажем сразу, что предложение 1 представляет основной интерес в случае, когда веса $g'(n)$ в (1.8) не стремятся к нулю (например, $g(u) = u^{s+1}$, $0 \leqslant s < 1$), поскольку аналогичные утверждения (при более слабых предположениях) в противоположной ситуации вытекают из результатов работ [1] и [2].

Замечание 1.2 ([1, лемма 1] или [2, лемма 1]). Пусть последовательность функций распределения F_n, удовлетворяет условию

$$\sum_{n\geqslant k} g'(n)\, \sup_{x>0} |F_n(x) - G(x)| < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geqslant k} g'(n)\bigl(F_n(f(\varepsilon\, g(n))) - G(f(\varepsilon\, g(n)))\bigr)$$
$$= \sum_{n\geqslant k} g'(n)\bigl(F_n(0+) - G(0+)\bigr). \tag{1.10}$$

Таким образом, комбинируя предложение 1 и замечание 1.2, можно найти асимптотику суммы $\sum\limits_{n\geqslant k} g'(n)\bigl(1 - F_n(f(\varepsilon\, g(n)))\bigr)$ при $\varepsilon\to 0$.

Перейдем к изложению основных результатов работы. Введем дополнительные обозначения.

Пусть случайная величина Y_α имеет устойчивое распределение G_α с показателем α, $0<\alpha\leqslant 2$, плотностью g_α и характеристической функцией ψ, предполагая, без потери общности, что

$$-\log\psi(t) = t^2/2,\ \alpha=2, \quad \text{и при } 0<\alpha<2$$
$$-\log\psi(t) = \lambda\,|t|^\alpha \begin{cases} 1 - i\,\beta\,\mathrm{sgn(t)}\ \mathrm{tg}(\alpha\pi/2),\ \alpha\neq 1,\\ 1 + i\,\beta\,\mathrm{sgn(t)}\,\frac{2}{\pi}\ \log|t|,\ \alpha=1,\end{cases} \tag{1.11}$$

где

$$\lambda = \frac{(c_1+c_2)\,\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\,\sin(\alpha\pi/2)}, \quad \beta = \frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}, \quad c_1,\,c_2\geqslant 0, \quad c_1+c_2>0$$

(в этом случае $\bar G_\alpha(x) = 1 - G_\alpha(x) = (c_1 + o\,(1))\,x^{-\alpha},\ G_\alpha(-x) = (c_2 + o\,(1))\,x^{-\alpha},\ x\to\infty$).

Исследуем условия выполнения условий (1.6) и (1.7) при $\bar G = \bar G_\alpha$.

Замечание 1.3.

1) Если $\alpha=2$, то (1.7) и (1.6) равносильны соответственно

$$\int_1^\infty \bigl(f(u)\,e^{f^2(u)/2}\bigr)^{-1}\,du<\infty \tag{1.12}$$

и

$$\frac{f''(u)}{f(u)f'^2(u)}\leqslant 1,\ u>u_0. \tag{1.13}$$

2) Если $\alpha < 2$ и постоянная $c_1 > 0$, то (1.7) равносильно

$$\int\limits_1^\infty f^{-\alpha}(u)\,du < \infty, \tag{1.14}$$

а (1.6) вытекает из условия

$$\limsup_{u\to\infty} f(u)\,f''(u)/f'^2(u) < 1+\alpha. \tag{1.15}$$

3) Если $1 < \alpha < 2$ и $c_1 = 0$, т.е. $\beta = -1$, то (1.7) равносильно

$$\int\limits_1^\infty \omega^{-1/2}(u)\,e^{-a\,\omega(u)}\,du < \infty, \tag{1.16}$$

где $\omega(u) = (f(u))^{\alpha/(\alpha-1)}$, $\quad a = \left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha\Gamma(2-\alpha)c_2}\right)^{1/(\alpha-1)}$, а (1.6) вытекает из

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{f''(u)}{f'^2(u)\,\omega(u)} < a. \tag{1.17}$$

4) Если $\alpha = 1$ и $c_1 = 0$, то (1.7) равносильно

$$\int\limits_1^\infty \exp\big(-\nu(u)/2 - e^{\nu(u)-1}\big)\,du < \infty, \quad \nu(u) = f(u)/c_2 \tag{1.18}$$

а (1.6) вытекает из

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{f''(u)}{f'^2(u)\,e^{\nu(u)-1}} < 1/c_2. \tag{1.19}$$

5) Если $\alpha < 1$ и $c_1 = 0$, то $\bar G_\alpha(x) = 0$, $x \geqslant 0$.

Прокомментируем замечание 1.3. Пункт 5 следует из [9, (2.2.33)].

Условие (1.6) равносильно предположению

$$f''(y)/f'^2(y) + \left.(\log g_\alpha(u))'\right|_{u=f(y)} \leqslant 0,\ y > y_0,$$

причем $g'_\alpha(u) < 0,\ u > u_0$ (это следует из [9, теорема 2.7.6]).

С учетом сказанного пункт 1 в особых комментариях не нуждается, а пункт 2 несложно проверяется с помощью [9, (2.4.8),(2.5.4), $\alpha \neq 1$] и [9, (2.5.25), $\alpha = 1$].

В случае $\beta = -1\,(c_1 = 0)$, в соответствии с [9, теоремы B.2, B.3 и (B.18), (B.19)], можно установить, что $Y_\alpha = c\,X_\alpha$ по распределению, где случайная величина X_α имеет плотность распределения $g(x,\alpha,-1)$ (см. [9, (2.2.1a) и (2.2.1b)]), а постоянная $c = a^{(\alpha-)1/\alpha}$ (см. (1.17)) при $1 < \alpha < 2$ и $c = 1/c_2$ при $\alpha = 1$. Утверждения пунктов 3 и 4 теперь несложно проверяются с помощью [9, теоремы 2.5.2 и 2.5.3].

Напомним, что условие (1.7) при $\bar G = \bar G_\alpha$ равносильно $\mathbf{E} f^{-1}(Y_\alpha^+) < \infty$, а также отметим, что условия (1.13), (1.15), (1.17), (1.19) заведомо выполняются, если функция f является степенью.

Замечание 1.4. Пользуясь случаем, отметим, что в некоторых формулировках из [1] имеются неточности. Для их исправления в замечании 2.1 и теореме 2 из [1] постоянную a и функцию $\nu(u)$ следует взять из Замечания 1.3 настоящей работы, а текст между Теоремой 3 и Замечанием 2.3 заменить на “Отметим, что замечание 2.1 при $\alpha < 1$ *в части условия* $c_1 > 0$ выполняется *(при* $c_1 = 0$ *интеграл в (2.3) равен нулю)*, а замечание 2.3 модифицируется следующим образом:”.

Помимо этого, в [1, предложение 1] и [2, предложение 1] предполагается, что $g(\infty) = \infty$, а в [1, предложение 1] равенство $\int\limits_0^\infty \bar F(f(t))\,\frac{dt}{t} = \widetilde A_f$ следует заменить на $\int\limits_0^\infty \log t\, dF(f(t)) = \widetilde A_f$.

Теперь сформулируем главный результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть функция f при соответствующих α удовлетворяет условиям* (1.12) − −(1.19)*, а также*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\, f'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2 f''(\varepsilon) = 0. \tag{1.20}$$

Тогда при любом $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant k} g'(n)\,\mathbf{P}\,(Y_\alpha \geqslant b + f(\varepsilon\, g(n))) - \varepsilon^{-1}\,\mathbf{E} f^{-1}\big((Y_\alpha - b)^+\big)\right)$$
$$= \bar G_\alpha(b)\,\gamma_g(k). \tag{1.21}$$

Напоминаем, что теорема 1 представляет основной интерес в случае, когда веса $g'(n)$ из соотношения (1.21) не стремятся к нулю.

Следствие 1. *Пусть функции g и f такие, как в предложении 1 и, кроме того, функция f удовлетворяет условиям (1.13) при $\alpha = 2$ и (1.15) при $\alpha < 2$. Если $\mathbf{E} f^{-1}\big(|Y_\alpha|\big) < \infty$, то при любом $b \in \mathcal{R}$*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n \geqslant k} g'(n)\, \mathbf{P}\left(|Y_\alpha - b| \geqslant f(\varepsilon\, g(n))\right) - \varepsilon^{-1}\, \mathbf{E} f^{-1}\big(|Y_\alpha - b|\big) \right) = \gamma_g(k).$$

Из теоремы 1 и следствия 1 при $g(u) = u^s$ и $f(u) = u^{t/(1+s)}$, где $|s| < 1$ и $t > 0$, получим:

Следствие 2. *Если*

$$\mathbf{E}(Y_\alpha^+)^{(s+1)/t} < \infty, \tag{1.22}$$

то при любом $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n \geqslant 1} n^s\, \mathbf{P}\left(Y_\alpha \geqslant b + \varepsilon\, n^t\right) - \varepsilon^{-(s+1)/t}\, (s+1)^{-1}\, \mathbf{E}((Y_\alpha - b)^+)^{(s+1)/t} \right)$$
$$= \bar{G}_\alpha(b)\, \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \lim\limits_{N \to \infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} n^s - \dfrac{N^{s+1}}{s+1} - \dfrac{1}{2}\, N^s \right)$.

В частности, если

$$\mathbf{E}|Y_\alpha|^{(s+1)/t} < \infty, \tag{1.23}$$

то

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n \geqslant 1} n^s\, \mathbf{P}(|Y_\alpha - b| \geqslant \varepsilon\, n^t) - \varepsilon^{-(s+1)/t}\, (s+1)^{-1} \mathbf{E}|Y_\alpha - b|^{(s+1)/t} \right) = \gamma_s. \tag{1.24}$$

Заметим, что условия (1.22) и (1.23) выполняются, если $\alpha = 2$. Если же $\alpha < 2$, то (1.22) справедливо в случае $c_1 = 0$ (см. (1.11)), а при $c_1 > 0$, также как и условие (1.23), равносильно предположению $(s + 1)/t < \alpha$.

Соотношение (1.24) при $b = 0$, $s = r/p - 2$, $t = (2 - p)/2p$ и $\alpha > 1$ включает, как частный случай, [4, предложения 2.3, 2.4], попутно ослабляя ограничения на r и p, сделанные в этой работе. При $\alpha = 2$ уточняется также [3, предложение 1.1(iii)]. Случай $\alpha \leqslant 1$ является новым.

Далее приведем некоторые следствия теоремы 1 ($\alpha = 2$), вытекающие из замечания 1.2 и результатов работы [6]. Введем дополнительные обозначения.

Пусть X, X_n, $n \geqslant 1$, – последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения V, $S_n = X_1 + \cdots X_n$. Будем предполагать, что $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}X^2 = 1$.

Пусть функция h задана на промежутке $[1, \infty)$ и при некотором $y_0 > 1$ обладает в интервале $y \geqslant y_0$ следующими свойствами:

$$h(y) > 0, \quad h(y) \uparrow, \quad h(y)/y \downarrow, \quad \int\limits_{y_0}^{\infty} h(y)/y^2\, dy < \infty. \tag{1.25}$$

Для целого числа $k \geqslant 0$ введем условия

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} \frac{h(y)}{y} \left\{ \left| \int\limits_{|x|>y} x^{k+2}\, V(dx) \right| + \frac{1}{y} \left| \int\limits_{|x|\leqslant y} x^{k+3}\, V(dx) \right| \right\} dy < \infty \tag{1.26}$$

(из (1.26), в частности, следует, что распределение V имеет конечный абсолютный момент порядка $k+2$) и

$$\mathbf{E}X^j = \mathbf{E}\mathcal{N}^j, \ 2 \leqslant j \leqslant k+2, \tag{1.27}$$

где $\mathcal{N}$ является стандартной нормальной случайной величиной. Так, нечетные моменты случайной величины X обязаны равняться нулю, а $\mathbf{E}X^4 = 3$.

Замечание 1.5. Если при некотором $0 < \delta < 1$

$$y^{\delta}\, h(y) \uparrow, \quad y^{1-\delta}\, h(y) \downarrow, \ y \geqslant y_0,$$

то условия (1.26) и $\mathbf{E}|X|^{k+2}\, h(|X| < \infty$ равносильны (так, если $h(x) = x^{\delta}, \ 0 < \delta < 1$, то (1.26) совпадает с условием $\mathbf{E}|X|^{k+2+\delta} < \infty$).

Если же $h(x) = 1$, то (1.26) равносильно

$$\mathbf{E}|X|^{k+2} < \infty, \quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{y} \left| \int\limits_{|x|>y} x^{k+2}\, V(dx) \right| dy < \infty. \tag{1.28}$$

При этом, в случае четного k последнее условие эквивалентно

$$\mathbf{E}|X|^{k+2}\, \log|X| < \infty.$$

Обозначим $h_k(y) = y^{k-2}\, h(y)$ и пусть

$$g_k(y) = c + \int\limits_1^y h_k(\sqrt{y})\, dy,\ y \geqslant 1,\ c \geqslant 0.$$

Так, если

$$h_k(y) = \frac{k+\delta}{2}\, y^{k-2+\delta},\ 0 \leqslant \delta < 1,\ k+\delta > 0,$$

то можно положить $g_k(y) = y^{(k+\delta)/2}$, а в случае $k+\delta = 0$ (т.е. при $k = \delta = 0$) взять $g_0(y) = \ln y$.

Теорема 2. *Пусть характеристическая функция* $v(t) = \mathbf{E}\, e^{itX}$ *удовлетворяет условию* (C) *Г. Крамера* $\limsup\limits_{t\to\infty} |v(t)| < 1$, *постоянная* $k = 0,\, 1,\, 2$ *или* 3.

Будем предполагать, что функция f *удовлетворяет условиям* (1.12), (1.13), (1.20) (*например, является степенной*), *и в интервале* $y \geqslant y_0$ *выполняются условия* (1.25) *и* $h'(y) \downarrow 0$, *а также* $h(y) \leqslant a\, y^{\delta}$, $\delta < 1$ *при* $k = 3$.

Если выполнены условия (1.26) *и* (1.27), *то при любом* $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant 1} h_k(\sqrt{n})\, \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant b + f(\varepsilon\, g_k(n)) \right) - \varepsilon^{-1}\, \mathbf{E} f^{-1}\big((\mathcal{N} - b)^+\big) \right)$$
$$= \bar{G}_2(b)\, \beta_k - V_k(b) \tag{1.29}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant 1} h_k(\sqrt{n})\, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}} - b\right| \geqslant f(\varepsilon\, g_k(n)) \right) - \varepsilon^{-1}\, \mathbf{E} f^{-1}\big(|\mathcal{N} - b|\big) \right)$$
$$= \beta_k - \widetilde{V}_k(b), \tag{1.30}$$

где $\beta_k = \gamma_{g_k}(1)$ (*см.* (1.9) *при* $g(\cdot) = g_k(\cdot)$), *а конечные постоянные* $V_k(b)$, $\widetilde{V}_k(b)$ *определены формулами*

$$V_k(b) = \sum_{n\geqslant 1} h_k(\sqrt{n})\, \big(\mathbf{P}\big(S_n \leqslant b\,\sqrt{n}\big) - G_2(b)\big)$$

и

$$\widetilde{V}_k(b) = \sum_{n\geqslant 1} h_k(\sqrt{n})\,\mathbf{P}\big(S_n = b\sqrt{n}\big).$$

Замечание 1.6. При $k = 0$ из формулировки теоремы 2 можно исключить условие (C) Г. Крамера, а также предположение $h'(y) \downarrow 0$.

Следствие 3. *Пусть* $0 \leqslant \delta < 1$, $t > 0$, *целое* k *удовлетворяет условию* $0 < k+\delta < 4$, $h_k(y) = y^{(k-2+\delta)/2}$. *Предположим, что при* $0 < \delta < 1$ *выполнено условие* $\mathbf{E}|X|^{k+2+\delta} < \infty$, *а при* $\delta = 0$, *если* $k = 1$ *или* $k = 3$, *то* (1.28), *и, если* $k = 2$, *то* $\mathbf{E}X^4 \log|X| < \infty$. *Пусть также выполняются условия* (C) *и* (1.27). *Тогда* (*см. следствие* 2) *при любом* $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Bigg(\sum_{n\geqslant 1} n^{(k-2+\delta)/2}\,\mathbf{P}\Big(|S_n - b\sqrt{n}| \geqslant \varepsilon\, n^{(1+t)/2}\Big) - \frac{2}{k+\delta}\,\varepsilon^{-(k+\delta)/t}\,\mathbf{E}|\mathcal{N} - b|^{(k+\delta)/t}\Bigg) = \gamma_{(k-2+\delta)/2} - \widetilde{V}_k(b).$$

При $k = 2$, $t = 1$ и $\delta = 0$ отсюда получим:

Если $\mathbf{E}X^4 \log|X| < \infty$, $\mathbf{E}X^3 = 0$, $\mathbf{E}X^4 = 3$, а также выполнено условие (C), то при любом $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Bigg(\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}\Big(|S_n - b\sqrt{n}| \geqslant \varepsilon\, n\Big) - \varepsilon^{-2}(1+b^2)\Bigg) = -1/2 - \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}\big(S_n = b\sqrt{n}\big). \tag{1.31}$$

Оценка (1.31) дополняет известный результат из [7].

В заключение заметим, что применяя теорему 1 при $\alpha < 2$, замечание 1.2 и [8, теорема 4], можно получить соответствующий аналог следствия 3.

2. Доказательства.

Пусть положительная функция $b(u,\varepsilon)$, определенная при $u \geqslant k$, где целое $k \geqslant 1$, и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, дважды дифференцируема по u (можно ограничиться предположением, что $b(u,\varepsilon)$ дифференцируема и ее производная непрерывна слева и ограниченной вариации при $u \geqslant k$).

Будем также предполагать, что $\dfrac{\partial b(u,\varepsilon)}{\partial u} \geqslant 0$ при каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to+0} b(u,\varepsilon) = 0 \tag{2.1}$$

при каждом $u \geqslant k$.

Пусть неотрицательная дифференцируемая функция $r(u)$, $u \geqslant k$, имеет производную $r'(u)$ ограниченной вариации, такую, что

$$\int_k^\infty |dr'(u)| < \infty.$$

Заметим, принимая во внимание равенство

$$r'(u) = r'(k) + \int_k^u dr'(u),\ u \geqslant k,$$

что $\sup\limits_{u\geqslant k} |r'(u)| < \infty$ и $\lim\limits_{u\to\infty} r'(u) = C \in (-\infty,\infty)$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lim_{u\to\infty} r'(u) = 0, \tag{2.2}$$

например, $r(u) = u^s,\ s < 1$.

Положим

$$U_N = \sum_{n=k}^N r(n) - \int_k^N r(u)\,du - \frac{1}{2}\,r(N),\ N \geqslant k.$$

Применяя формулу суммирования Эйлера - Маклорена, несложно показать, что последовательность U_N имеет конечный предел $U_\infty = \lim\limits_{N\to\infty} U_N$.

Пусть функция ограниченной вариации $q(u)$, $u > 0$, абсолютно интегрируема на $(0, \infty)$, т.е. $\int\limits_{0+}^{\infty} |q(u)|\, du < \infty$. Обозначим

$$Q(y) = \int\limits_{y}^{\infty} q(u)\, du,\ y > 0; \quad h(u,\varepsilon) = r(u)\, Q(b(u,\varepsilon)). \tag{2.3}$$

Следующее утверждение является аналогом [1, лемма 2] или [2, лемма 2].

Лемма 1. *Если (см.* (2.1) − −(2.3))

$$\textit{интеграл} \quad \int\limits_{k}^{\infty} h(u,\varepsilon)\, du \ \textit{сходится}, \ \lim_{n\to\infty} h(n,\varepsilon) = 0 \ (0 < \varepsilon < \varepsilon_0) \tag{2.4}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{k}^{\infty} r(u)\, \big|d\big(Q'_u(b(u,\varepsilon))\big)\big| = 0, \tag{2.5}$$

то ряд $\sum\limits_{n\geqslant k} h(n,\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ *также сходится и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\sum_{n\geqslant k} h(n,\varepsilon) - \int\limits_{k}^{\infty} h(u,\varepsilon)\, du \right) = Q(0+)\, U_\infty. \tag{2.6}$$

Отметим, что если ряд $\sum\limits_{n\geqslant k} r(n)$ или интеграл $\int\limits_{k}^{\infty} r(u)\, du$ сходятся, то (2.6) заведомо (по теореме мажорируемой сходимости) выполняется.

Доказательство леммы 1. Используя формулу суммирования Эйлера–Маклорена (например, [2, лемма 2, (2.9)]) и учитывая (2.4), находим

$$\sum_{n\geqslant k} h(n,\varepsilon) - \int_{k}^{\infty} h(u,\varepsilon)\, du - \frac{1}{2}\, h(k,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant k} \int\limits_{0}^{1} \frac{2u-1}{2} h'(u+j,\varepsilon)\, du$$

$$= \sum_{j\geqslant k} \int\limits_{0}^{1} \frac{u-u^2}{2}\, dh'(u+j,\varepsilon) = \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon) + \Delta_3(\varepsilon), \tag{2.7}$$

где, опуская для краткости аргумент $b(\cdot,\varepsilon)$ у функции Q,

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant k} \int\limits_0^1 \frac{u-u^2}{2}\, Q\, dr'(u+j),\\
\Delta_2(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant k} \int\limits_0^1 \frac{u-u^2}{2}\, 2\, r'(u+j)\, Q'_u\, du, \qquad (2.8)\\
\Delta_3(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant k} \int\limits_0^1 \frac{u-u^2}{2}\, r(u+j)\, Q''_{u\,u}\, du.
\end{aligned}
$$

При этом,

$$
|\Delta_3(\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{8} \int\limits_k^\infty r(u)\, |d\big(Q(b(u,\varepsilon))\big)'_u|; \qquad (2.9)
$$

для любого фиксированного $N > k$

$$
\begin{aligned}
|\Delta_2(\varepsilon)| &\leqslant \left(\int\limits_k^N + \int\limits_N^\infty\right) |r'(u)\, Q'_u|\, du\\
&\leqslant c_1(N) \int\limits_{b(k,\varepsilon)}^{b(N,\varepsilon)} |q(u)|\, du + c_2(N) \int\limits_{0+}^\infty |q(u)|\, du
\end{aligned}
$$

где $c_1(N) = \sup\limits_{u\in[k,N]} |r'(u)| \leqslant |r'(k)| + \int\limits_k^\infty |dr'(u)|$, $\quad c_2(N) = \sup\limits_{u\geqslant N} |r'(u)|$.

Отсюда (см. ((2.1), (2.2) и (2.5)), с учетом того, что N может быть выбрано сколь угодно большим, следует

$$
\lim_{\varepsilon\to 0+} (|\Delta_2(\varepsilon)| + |\Delta_3(\varepsilon)|) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} h(k,\varepsilon) = r(k)\, Q(0+). \qquad (2.10)
$$

Далее,

$$
|\Delta_1(\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{8}\, Q(0+) \int\limits_k^\infty |dr'(u)|,
$$

что позволяет по теореме мажорируемой сходимости, оценивая $\Delta_1(\varepsilon)$, перейти к пределу при $\varepsilon \to 0+$ под знаком интеграла, и затем, снова обращаясь к формуле Эйлера-Маклорена, получить (см. (2.3))

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_1(\varepsilon)=Q(0+)\,(U_\infty-\frac{1}{2}\,r(k)). \qquad (2.11)$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Замечание 2.1.

1) Второе условие в (2.4) является необходимым для сходимости ряда в левой части (2.6).

2) Пусть первое условие в (2.4) выполняется при

$$b(u,\varepsilon)=f(\varepsilon\, g(u)) \;\text{ и }\; r(u)=g'(u), \qquad (2.12)$$

где функция $f(t)$ не убывает на $(0,\infty)$, причем $\lim\limits_{t\searrow 0} f(t)=0$, а положительная неубывающая дифференцируемая функция $g(u)$ определена при $u\geqslant k$. Положим $\mu(u)=Q(f(u))$, $A_f=\int\limits_{0+}^{\infty}\mu(u)\,du$.

Тогда (см. [2, (2.16)])

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_k^\infty h(u,\varepsilon)\,du-\varepsilon^{-1}A_f\right)=g(k)\,\mu(0+). \qquad (2.13)$$

Далее исследуем условия выполнения соотношения (2.5) в предположениях (2.12).

Поскольку $r(u)=g'(u)$, функция $g(u)$ должна быть дважды дифференцируемой ($g'(u)\geqslant 0$) при $u\geqslant k$, $\lim\limits_{u\to\infty} g''(u)=0$, причем $g''(u)$ - функция ограниченной вариации, такая что $\int\limits_k^\infty |dg''(u)|<\infty$ (например, $g''(u)$ монотонна на бесконечности). Будем также предполагать, что дважды дифференцируемая функция $f(t)$ не убывает на $(0,\infty)$, причем $f(0+)=0$ и $f(\infty)=\infty$.

Положим $A=\int\limits_k^\infty g'(u)\,|d\big(\mu'_u(\varepsilon\, g(u))\big)|$.

Очевидно,

$$A\leqslant\int\limits_k^\infty \varepsilon\, g'^2(u)\,|d\mu'(\varepsilon\, g(u))|+\int\limits_k^\infty g'(u)\,|\mu'(\varepsilon\, g(u))\,\varepsilon\, g''(u)|\,du.$$

При условии (1.2)

$$A \leqslant C\,\varepsilon^{\rho} \left(\int\limits_{\varepsilon g(k)}^{\infty} y^{1-\rho}\,|d\mu'(y)| + \int\limits_{\varepsilon g(k)}^{\infty} |\mu'(y)|)y^{-\rho}\,dy \right)$$

и, следовательно, условие (2.5) выполняется, когда

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} |\mu'(y)|)y^{-\rho}\,dy, < \infty \tag{2.14}$$

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} y^{1-\rho}\,|d\mu'(y)| + < \infty \tag{2.15}$$

при некотором y_0 и

$$\varepsilon^{\rho} \int\limits_{\varepsilon}^{y_1} |\mu'(y)|)y^{-\rho}\,dy \to 0,\, \varepsilon \to 0, \tag{2.16}$$

$$\varepsilon^{\rho} \int\limits_{\varepsilon}^{y_1} y^{1-\rho}\,|d\mu'(y)| \to 0,\, \varepsilon \to 0, \tag{2.17}$$

при некотором y_1.

При этом, условие (2.14) выполняется, поскольку

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} y^{-\rho}\,|\mu'(y)|\;dy \leqslant y_0^{-\rho} \int\limits_{0+}^{\infty} |q(y)|\;dy < \infty. \tag{2.18}$$

Обратимся к соотношению (2.15).

Замечание 2.2. Условие (2.15) выполняется, если $q(u) \geqslant 0$, $u > u_0$ (например, $q(u)$ является плотностью) и

$$d\mu'(y) \geqslant 0,\; y > y_0,$$

т.е. $0 \leqslant q(f(y))\,f'(y) = -\mu'(y)$, $y > y_0$, монотонно убывает, причем к нулю (замена нуля некоторой положительной постоянной противоречит интегрируемости функции $q(u)$), или, говоря по другому, функция $\mu(y)$ выпукла вниз на (y_0, ∞).

В самом деле, при сделанных предположениях

$$\int\limits_{y/2}^{y} q(f(u))\, f'(u)\, du \geqslant q(f(y))\, f'(y)\, y/2$$

и, следовательно,

$$\lim_{y\to\infty} y\, q(f(y))\, f'(y) = 0;$$

кроме того, $|d\mu'(y)| = d\mu'(y)$. Поэтому (см. также (2.18)),

$$0 \leqslant \int\limits_{y_0}^{\infty} y^{1-\rho}\, |d\mu'(y)| = \int\limits_{y_0}^{\infty} y^{1-\rho}\, d\mu'(y)$$

$$= -y^{1-\rho}\, \mu'(y_0) - (1-\rho) \int\limits_{y_0}^{\infty} y^{-\rho}\, \mu'(y)\, dy < \infty.$$

Теперь рассмотрим условия (2.16) и (2.17).

Замечание 2.3. Условие (2.16) выполняется, если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\, \mu'(\varepsilon) = 0$, или

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\, f'(\varepsilon)\, q(f(\varepsilon)) = 0. \tag{2.19}$$

Принимая в расчет соотношение

$$d\mu'(y) = -\big(f''(y)\, q(f(y))\, dy + f'(y)\, dq(f(y))\big),$$

несложно показать, что условие (2.17) выполняется, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2\, f''(\varepsilon)\, q(f(\varepsilon)) = 0 \tag{2.20}$$

и

$$\varepsilon^{\rho} \int\limits_{\varepsilon}^{y_1} y^{1-\rho}\, f'(y)\, |dq(f(y))| \to 0,\ \varepsilon \to 0, \tag{2.21}$$

В частности, если $|q(0+)| + |q'(0+)| < \infty$(например, q является плотностью устойчивого распределения), то условия (2.19) и (2.20) следуют из

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\, f'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2\, f''(\varepsilon) = 0, \tag{2.22}$$

причем (учитывая правило Лопиталя) при $f'(0+) = \infty$ в (2.22)достаточно проверить лишь часть, связанную с f''.

Обратимся к условию (2.21).

В случае, когда функция $q(y)$ дифференцируема в некоторой положительной окрестности нуля, условие (2.21) выполняется, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}(\varepsilon\, f'(\varepsilon))^2\, q'(f(\varepsilon)) = 0,$$

т.е. в предположениях $|q'(0+)| < \infty$ и (2.22) оно имеет место.

Если же функция $q(y)$ монотонна в некоторой положительной окрестности нуля, интегрируя в (2.21) по частям, найдем, что (2.21) вытекает из (2.20).

Пусть интеграл $\int\limits_{u_0}^{\infty}\mu(u)\,du$ сходится. Тогда, если $q(u)\geqslant 0$ при $u > f(u_0)$, то $-\mu'(u)\geqslant 0$, $u>u_0$, и, следовательно,

$$\int\limits_{u_0}^{\infty}\mu(u)\,du = \int\limits_{u_0}^{\infty}(u-u_0)\,(-\mu'(u))\,du < \infty,$$

т.е.

$$\int\limits_{u_0}^{\infty}u\,(-\mu'(u))\,du < \infty.$$

Отсюда и из (2.14) получим

$$\begin{aligned} g'(u)\,\mu(\varepsilon\, g(u)) &\leqslant C\,\varepsilon^{-(1-\rho)/2}\,(\varepsilon\, g(u))^{(1-\rho)/2}\,\mu(\varepsilon\, g(u)) \\ &\leqslant C\,\varepsilon^{-(1-\rho)/2}\int\limits_{\varepsilon\, g(u)}^{\infty}u^{(1-\rho)/2}\,(-\mu'(u))\,du \to 0,\ u\to\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, при наших предположениях второе условие в (2.3) выполняется.

Также (при $u_0 = 0+$), если $f(u)$ строго возрастает при $u>0$ (например, $f(u)=u^t,\ t>0$), то (см. (2.13)) $A_f = \int\limits_{0+}^{\infty}f^{-1}(u)\,q(u)\,du$.

Предложение 1 настоящей работы вытекает из леммы 1, замечаний 2.1–2.3 и комментариев к ним. Теорема 1, в свою очередь, является следствием предложения 1 и замечания 1.3.

Список литературы

1. Л. В. Розовский, *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 250–266.
2. L. V. Rozovsky, *One more on the convergence rates in precise asymptotics.* — Statist. Probab. Lett., **171** (2021).
3. A. Gut, J. Steinebach, *Convergence rates in precise asymptotics.* — J. Math. Anal. Appl. **390** (2012), 1–14. (www2.math,uu.se/ allan/90correction.pdf).
4. A. Gut, J. Steinebach, *Convergence rates in precise asymptotics II.* — Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **39** (2013), 95–110.
5. A. Gut, J. Steinebach, *Precise asymptotics — a general approach.* — Acta Math. Hung. **138(4)** (2013), 365–385.
6. Б. А. Лифшиц, *О точности аппроксимации в центральной предельной теореме.* — Теория вероятн. и ее примен., **21**, No. 1 (1976), 107–122.
7. O. I. Klesov, *On the convergence rate in a theorem of Heyde.* — Theory Probab. Math. Stat. **49** (1994), 83–87.
8. J. Dubinskaite, *О точности приближения сумм независимых случайных величин устойчивым распределением.* — Литов. матем. сб. (Liet. Mat. Rinkinys), **23**, No. 1 (1983), 74–91.
9. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М. (1983).

Rozovsky L. V. On the convergence rate in “the exact asymptotics” for random variables with a stable distribution.

In the note we present the conditions under which relations of the type

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} r(n)\,\mathbf{P}(Y_\alpha \geqslant f(\varepsilon\, g(n))) - \nu(\varepsilon)\right) = C$$

hold, where a random variable Y_α has a stable distribution, C is a constant, and non-negative functions r, f and g satisfy certain conditions. The obtained results allow to make more precise and to complement results, related to the convergence rate in the so called “exact asymptotics.”

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
“С.-П. гос. химико-фармацевтический университет”
Министерства здравоохранения Российской Федерации
(ФГБОУ ВО СПХФУ Минздрава России),
ул. Проф. Попова, д. 14
С.-Петербург, 197376, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 21 июня 2021 г.