Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Ю. П. Петрова

АСИМПТОТИКИ L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Теория малых уклонений в различных нормах активно изучается в последние десятилетия (см., например, обзоры [1–3]; актуальную литературу по теме можно найти в [4]). Пусть $X(t)$ – случайный процесс. Асимптотическое поведение вероятности $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ называется *точной* асимптотикой малых уклонений случайного процесса $X(t)$. Отметим, что точную асимптотку удается найти только в исключительных случаях, поэтому часто рассматривают так называемую *логарифмическую* асимптотику $\ln(\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\})$. Но даже на логарифмическом уровне к задаче нет общего подхода, что делает задачу актуальной и по сей день.

В работе Г. Н. Сытой [5] задача малых уклонениях решена в неявном виде. Начиная с работ [6–8], многие авторы упрощали асимптотические выражения для вероятностей малых уклонений при различных предположениях.

Пусть $\mathcal{O}$ ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$; $\bar{\mathcal{O}}$ – замыкание $\mathcal{O}$. Пусть $X_0(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}}$, центрированная гауссовская случайная функция с функцией ковариации $G_0(x,y) := \mathbb{E}X_0(x)X_0(y)$. Обозначим за $\mathbb{G}_0$ соответствующий ковариационный оператор в $L_2(\mathcal{O})$:

$$(\mathbb{G}_0 u)(x) = \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(x,y)u(y)\,dy.$$

Согласно разложению Кархунена–Лоэва (см. напр. [9, раздел, 12]) задача малых уклонений может быть записана следующим образом

Ключевые слова: малые уклонения, гауссовские процессы, спектральные асимптотики, L_2-норма.

Исследование поддержано грантом РНФ 21-11-00047.

$$\mathbb{P}\Big(\|X_0\|_2 < \varepsilon\Big) := \mathbb{P}\Big(\int\limits_{\mathcal{O}} (X_0(x))^2\, dx < \varepsilon^2\Big) \\ = \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1}$$

Здесь ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, – независимые стандартные нормальные случайные величины (с.в.), μ_k^0 – собственные числа соответствующего ковариационного оператора $\mathbb{G}_0$. Более того, благодаря разложению Кархунена–Лоэва мы имеем $\sum\limits_k \mu_k^0 < \infty$. Это условие означает, что $\|X_0\|_2$ конечна.

Поэтому, зная собственные числа μ_k^0, можно получить информацию о распределении $\|X_0\|_2$. В работе Дункера, Лифшица и Линде [10] найдена точная асимптотика (1) при достаточно слабых ограничениях. В частности, точную асимптотику удалось найти в случаях $\mu_k^0 = k^{-A}$ и $\mu_k^0 = \exp(-Ak)$. Основная сложность заключается в том, что явные формулы для собственных чисел удается найти в редких случаях. Если известна достаточно точная асимптотика для μ_k^0, то тогда можно узнать асимптотику малых клонений с точностью до константы, используя известный принцип сравнения Венбо Ли:

Предложение 1 ([11, 12])**.** *Пусть ξ_k – последовательность независимых стандартных нормальных с.в.; μ_k^0 и μ_k – две невозрастающие суммируемые последовательности такие, что $\prod \mu_k/\mu_k^0 < \infty$. Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu_k^0}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

В работах А. И. Назарова, Я. Ю. Никитина [13, 14] было введено понятие *гриновского гауссовского процесса.* Для таких процессов функция ковариации $G_0(x, y)$ является функцией Грина обыкновенного дифференциального оператора (ОДО). Это позволяет изучать асимптотики для μ_k^0 используя методы спектральной теории ОДО, восходящие к классическим работам Дж. Биркгофа [15, 16] и Я. Д. Тамаркина [17, 18] (дальнейшее развитие этой теории можно найти у А. А. Шкаликова [19, 20]). Многие процессы, такие как винеровский процесс, броуновский мост, процесс Орнштейна–Уленбека и их проингрированные аналоги являются гриновскими процессами. Отметим также важную серию работ П. Чиганского, М. Клепциной, Д. Марушкевича [21–23], в которых впервые получены точные асимптотики для некоторых негриновских процессов.

В данной работе мы рассматриваем случай конечномерных возмущений гауссовских процессов. Известно, что логарифмическая асимптотика не изменяется при конечномерном возмущении (в более общих терминах доказано Ф. Гао, В. Ли [24] и А. И. Назаровым [25]). Поэтому нас в первую очередь интересует точная асимптотика.

Впервые задача для одномерного возмущения была рассмотрена П. Деовельсом [26]. В работе А. И. Назарова [27] были введены понятия критического и некритического возмущений, а также найдена асимптотика малых уклонений для широкого класса одномерных возмущений.

В данной статье мы обобщаем эти результаты на случай конечномерных возмущений, определенных по формуле (4). Основная мотивация – процессы Дурбина. Эти процессы возникают как предельные в статистике при построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке. Например, при рассмотрении теста на нормальность (с оцененным средним и/или дисперсией) возникают процессы Каца–Кифера–Вольфовица (см. [28]). Точная асимптотика L_2-малых уклонений найдена в [29] и для некоторых других важных процессов Дурбина в [30].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы описываем семейство конечномерных возмущений гауссовских случайных функций и определяем понятия некритического, частично-критического и критического возмущений. В разделе 3 мы доказываем общие теоремы об асимптотике L_2-малых уклонений в некритическом и критическом случаях (см. теоремы 1 и 2). В разделе 4 мы применяем эти результаты в случае гриновского процесса (теорема 3). В разделе 5 мы рассматриваем процессы Дурбина и доказываем, что они являются критическими возмущениями броуновского моста (теорема 4). В разделе 6 (приложение) мы доказываем вспомогательную лемму о “дифференцируемости” асимптотики малых уклонений. Эта лемма используется для доказательства теоремы 3, однако представляет интерес сама по себе.

Мы используем букву C для обозначения различных констант, чьи точные значения нам не важны. Обозначим E_m – единичная матрица порядка m.

§2. Семейство конечномерных возмущений гауссовских функций

Рассмотрим $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$, где $\varphi_j(x)$ – локально суммируемые функции при $x \in \bar{\mathcal{O}}$, $j = 1 \dots m$. Предположим, что вектор-функция

$$\vec{\psi}(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))^T = \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(x,y)\vec{\varphi}(y)\,dy$$

определена п.в. в $\mathcal{O}$, $\psi_j \not\equiv 0$, $j = 1, \dots, m$, и определена матрица $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^m$

$$Q_{ij} = \int\limits_{\mathcal{O}} \psi_i(x)\varphi_j(x)\,dx < \infty, \quad \text{что равносильно} \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2}). \tag{3}$$

Замечание 1. Не умаляя общности, можно считать, что функции $\varphi_j(x)$, $j = 1 \dots m$, линейно независимы.

Замечание 2. Формула (3) задает скалярное произведение на двойственном пространстве к $\mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2})$. Поэтому матрица Q является матрицей Грама, а следовательно, симметрична и невырождена.

Определим семейство гауссовских функций

$$X_A(x) := X_0(x) - \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)\,dy. \tag{4}$$

Здесь A – это матрица параметров возмущения ($A_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, m$). Ясно, что $\mathbb{E}X_A = 0$.

Лемма 1. *Функция $X_A(x)$ имеет ковариацию*

$$G_A(x,y) = G_0(x,y) + \vec{\psi}(x)^T \cdot D \cdot \vec{\psi}(y), \tag{5}$$

где $D = -A - A^T + AQA^T$. Заметим, что D симметрична.

Доказательство. Формула (5) проверяется прямым вычислением, используя (3). □

Следствие 1. *Для функций* (4) *выполняется следующее равенство по распределению*

$$X_A(x) \stackrel{d}{=} X_{2Q^{-1}-A}(x).$$

Следствие 2. *Пусть* $A = Q^{-1}$. *Тогда верно следующее*:

(1) *Имеет место тождество п.н.* ($j = 1, \ldots, m$)

$$\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\varphi_j(x)\,dx = 0.$$

(2) *Функция* $X_A(x)$ *и случайная величина* $\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\varphi_j(y)\,dy$, $j = 1, \ldots, m$, *независимы.*

(3) *Если* $\varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, *то интегральные оператор с ядром* $G_A(x, y)$ *имеет нулевое собственное число кратности* m, *соответствующее собственным функциям* φ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Все утверждения следуют из следующих тождеств:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\vec{\varphi}(x)^T\,dx = \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(x)\vec{\varphi}(x)^T\,dx\,(E_m - AQ)\,;$$

$$\mathbb{E}X_A(x)\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)^T\,dy = \vec{\psi}(x)^T(E_m - AQ),$$

которые легко проверяются. □

Определение 1. Будем говорить, что X_A – некритическое возмущение процесса X_0, если выполнены следующие равносильные условия:

(1) $\det(E_m - A^TQ) \neq 0$;

(2) $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\varphi_j(x)\,dx$, $j = 1, \ldots, m$, линейно независимы п.в.

Определение 2. Будем говорить, что X_A – частично критическое возмущение порядка s процесса X_0, $0 < s < m$, если выполнены следующие равносильные условия:

(1) $\operatorname{rank}(E_m - A^TQ) = m - s$;

(2) $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\varphi_j(x)\,dx$, $j = 1, \ldots, m$, образуют векторное пространство размерности $m - s$ п.в.

Определение 3. Будем говорить, что X_A – критическое возмущение процесса X_0, если выполнены следующие равносильные условия:

(1) $A = Q^{-1}$;
(2) $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\varphi_j(x)\,dx = 0$, $j = 1, \ldots, m$ п.в.

Замечание 3. Для одномерного случая понятия критического и некритического возмущений были введены в [27].

§3. Основной результат (некритический и критический случай)

Пусть μ_k^0 и $u_k^0(x)$ – собственные числа и соотвествующие собственные функции (нормализованные в $L_2(\mathcal{O})$) ковариационного оператора $\mathbb{G}_0$, т.е.

$$\mu_k^0 u_k^0(x) = \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(x,y) u_k^0(y)\,dy.$$

Т.к. $\|X_0\|_2 < \infty$ п.в., оператор $\mathbb{G}_0$ принадлежит ядерному классу, т.е. $\sum\limits_k \mu_k^0 < \infty$. Пусть μ_k и $u_k(x)$ – собственные числа и соответствующие собственные функции интегрального оператора с ядром $G_A(x,y)$. Заметим, что согласно минимаксимальному принципу (см., напр., [31, раздел 10.2]), последовательности μ_k^0 и μ_k перемежаются. В частности, из этого следует сходимость ряда $\sum\limits_k \mu_k$ и $\|X_A\|_2 < \infty$ п.н. По определению, мы полагаем $\lambda_k^0 := (\mu_k^0)^{-1}$, $\lambda_k := \mu_k^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть X_A – некритическое возмущение функции X_0. При $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathbb{P}\left\{\|X_A\|_2 < \varepsilon\right\} \sim \frac{\mathbb{P}\left\{\|X_0\|_2 < \varepsilon\right\}}{\det\left(E_m - QA\right)}.$$

Доказательство. По теореме сравнения Ли (предложение 1) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbb{P}\left\{\|X_A\|_2 < \varepsilon\right\} \sim \mathbb{P}\left\{\|X_0\|_2 < \varepsilon\right\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^0}{\mu_k}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим определители Фредгольма для ядер G_0 и G_A, соответственно:

$$\mathcal{F}^0(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k^0}\right); \qquad \mathcal{F}(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

В силу сходимости рядов $\sum\limits_k (\lambda_k^0)^{-1}$ и $\sum\limits_k \lambda_k^{-1}$ эти канонические произведения Адамара сходятся при всех $z \in \mathbb{C}$. Теорема Йенсена (см. [32, §3.6]) дает

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} \right| d\arg(z) \right). \tag{6}$$

Ввиду формулы для преобразования определителя Фредгольма при конечномерном возмущении оператора (см. [33], [34, теорема 2.2], или более общая формула [35, Глава 2, §4.6]) имеем

$$\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} = \det(L(z)), \tag{7}$$

где матрица $L(z)$ определяется из соотношения

$$L(z) = E_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T}{1 - \frac{\lambda_n^0}{z}} \cdot D. \tag{8}$$

Здесь $\vec{a}_n = \int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\psi}(x) u_n^0(x)\, dx$ – n-ый коэффициент Фурье вектор-функции $\vec{\psi}(x)$ в разложении по ортогональному базису $\{u_k^0\}$.

Для обоснования предельного перехода в (6) будем рассуждать аналогично лемме 5.1 из статьи [27]. А именно, при $|z| \to \infty$ элементы матрицы $L(z)$ сходятся к элементам матрицы $\left(E_m + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T \cdot D\right)$ равномерно при $\arg(z) \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. В окрестности положительной вещественной оси у подынтегрального выражения имеется суммируемая мажоранта, поэтому по теореме Лебега предел (6) равен

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = \det\left(E_m + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T \cdot D \right). \tag{9}$$

Заметим, что

$$\vec{\psi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{a}_n u_n^0(x); \qquad \vec{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n u_n^0(x).$$

Из ортогональности u_n^0 имеем

$$Q = \int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(x)\vec{\psi}^{\,T}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}. \tag{10}$$

Поэтому формула (9) принимает вид:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} &= \det\left(E_m + Q\cdot D\right) = \det\big(E_m + Q\cdot[-A - A^T + A^T\cdot Q\cdot A)]\big)\\ &= \det\big(E_m - Q\cdot A^T\big)\cdot\det\left(E_m - Q\cdot A\right)\\ &= \det\left(E_m - A\cdot Q\right)\cdot\det\left(E_m - Q\cdot A\right) = \left(\det\left(E_m - Q\cdot A\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Ясно, что в некритическом случае $\det(E_m - QA) \neq 0$ и $\det(E_m - AQ) \neq 0$, откуда следует утверждение теоремы 1. □

Теорема 2. *Пусть X_A – критическое возмущение функции X_0. Если $\forall j = 1,\ldots,m : \varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, что равносильно $\psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$,* **(условие A)**, *то асимптотика вероятностей малых уклонений примет вид (при $r \to 0$)*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\|X_A\|_2 < \sqrt{r}\right\} \sim &\sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m\\ &\times \int\limits_0^r \int\limits_0^{r_1} \cdots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m}\mathbb{P}\big\{\|X_0\|_2 < \sqrt{r_m}\big\}\frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r-r_1)(r_1-r_2)\ldots(r_{m-1}-r_m)}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Введем три функции распределения:

$$\begin{aligned}F_0(r) &:= \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < r\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\|X_0\|_2 < \sqrt{r}\Big\};\\ F(r) &:= \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < r\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\|X_A\|_2 < \sqrt{r}\Big\};\\ F_m(r) &:= \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < r\Big\}, \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Покажем, что при $r \to 0$

$$F(r) \sim F_m(r) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^0_{k+m}}{\mu_k} \right)^{1/2}. \tag{12}$$

Теорема Йенсена дает

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu^0_{k+m}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^0_{k+m}}{\lambda_k} \\ &= \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} \cdot \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\lambda^0_l}\right) \right| d\arg(z) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что в критическом случае $E_m = -QD$. Поэтому с помощью (10) матрица (8) может быть переписана следующим образом:

$$L = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^0_n \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T} \cdot D + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^0_n \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}}{1 - \frac{\lambda^0_n}{z}} \cdot D = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^0_n)^2 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}}{1 - \frac{\lambda^0_n}{z}} \cdot D. \tag{14}$$

Тогда подлогарифмическое выражение в формуле (13) можно привести к более удобному виду (используя формулы (7) и (14)):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} \cdot \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\lambda^0_l}\right) \right| &= \left| \det(L_{ij})^m_{i,j=1} \cdot \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\lambda^0_l}\right) \right| \\ &= \left| \det \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^0_n)^2 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}}{1 - \frac{\lambda^0_n}{z}} \cdot D \cdot \prod_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\lambda^0_l} \right) \right|. \end{aligned}$$

По лемме 5.1 из статьи [27] в правой части формулы Йенсена можно перейти к пределу, получим:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu^0_{k+m}} = \left| \det \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^0_n)^2 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T} \cdot D \right) \right| \cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{1}{\lambda^0_l}. \tag{15}$$

Рассмотрим матрицу, все компоненты которой существуют и конечны по условию теоремы:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(x)\vec{\varphi}^{\,T}(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{\mathcal{O}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^0 \vec{a}_k u_k(x)\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n u_n(x)\right)^T dx = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^0)^2 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu_{k+m}^0} = \det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(x)\vec{\varphi}^{\,T}(x)\,dx\right) \cdot \frac{1}{\det(Q)} \cdot \prod_{l=1}^{m} \frac{1}{\lambda_l^0}.$$

Формулы (12) и (15) дают следующее соотношение:

$$F(r) \sim F_m(r) \cdot \sqrt{\frac{\det(Q)\cdot \lambda_1^0 \cdot \dots \cdot \lambda_m^0}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(x)\vec{\varphi}^{\,T}(x)\,dx\right)}}. \tag{16}$$

Далее, ясно, что $F_0(r_m) = (F_m * f_1 * \dots * f_m)(r_m)$, где

$$f_j(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{\mu_j^0 \xi_j^2 \leqslant x\} = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\frac{x}{2\mu_j^0}\right)}{\sqrt{2\pi\mu_j^0 x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad j = 1\dots m.$$

Отметим, что выполнено следующее соотношение

$$(F_m * f_m)(r) = F_{m-1}(r).$$

С помощью преобразования Лапласа получим решение сверточного уравнения:

$$F_m(z) = \sqrt{\frac{2\mu_m^0}{\pi}} \int\limits_0^z \left(F'_{m-1}(r_1) + \frac{1}{2\mu_m^0} F_{m-1}(r_1)\right) \exp\left(-\frac{z-r_1}{2\mu_m^0}\right) \frac{dr_1}{\sqrt{z-r_1}}.$$

По лемме 3 из приложения имеем, что $F_{m-1}(r_1) = o(F'_{m-1}(r_1))$, $r_1 \to +0$. Поэтому при $z \to +0$ получаем

$$F_m(z) \sim \sqrt{\frac{2\mu_m^0}{\pi}} \int\limits_0^z F'_{m-1}(r_1) \frac{dr_1}{\sqrt{z-r_1}}.$$

Аналогично, выразим F_{m-1} через F_{m-2}, получим

$$F_{m-1}(r_1)$$
$$= \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int_0^{r_1} \left(F'_{m-2}(r_2) + \frac{1}{2\mu_{m-1}^0} F_{m-2}(r_2) \right) \exp\left(-\frac{r_1 - r_2}{2\mu_{m-1}^0} \right) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1 - r_2}};$$
$$F'_{m-1}(r_1)$$
$$= \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int_0^{r_1} \left(F''_{m-2}(r_2) + \frac{1}{2\mu_{m-1}^0} F'_{m-2}(r_2) \right) \exp\left(-\frac{r_1 - r_2}{2\mu_{m-1}^0} \right) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1 - r_2}}.$$

По лемме 3 из приложения имеем $F'_{m-1}(r_2) = o(F''_{m-1}(r_2))$, $r_2 \to +0$. Поэтому при $r_1 \to +0$ получаем

$$F'_{m-1}(r_1) \sim \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int_0^{r_1} F''_{m-2}(r_2) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1 - r_2}}.$$

Следовательно,

$$F_m(z) \sim \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 \sqrt{\mu_m^0 \mu_{m-1}^0} \int_0^z \int_0^{r_1} F''_{m-2}(r_2) \frac{dr_2\, dr_1}{\sqrt{(z - r_1)(r_1 - r_2)}}.$$

Проделывая эту процедуру еще $m - 2$ раза, получаем $z \to +0$

$$F_m(z) \sim \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^m \prod_{l=1}^m \sqrt{\mu_l^0} \int_0^z \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_{m-1}} \frac{F_0^{(m)}(r_m)\, dr_m \dots dr_1}{\sqrt{(z - r_1)(r_1 - r_2) \dots (r_{m-1} - r_m)}}. \tag{17}$$

Тогда из (16) и (17) получаем утверждение теоремы. □

Замечание 4. Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2 для одномерных возмущений, были получены в [27].

Замечание 5. В случае частично критичексих возмущений, если условие A выполнено, то асимптотика малых уклононений может быть найдена, комбинируя теоремы 1 и 2.

§4. Асимптотика малых уклонений для гриновских процессов

Будем предполагать, что $\mathcal{O} = (0,1)$, и функция ковариации $G_0(t,s)$, $t,s \in [0,1]$, есть функция Грина самосопряженного оператора L_0 в пространстве $L_2(0,1)$, заданного дифференциальным выражением порядка $2l$:

$$L_0 u := (-1)^l u^{(2l)} + (p_{l-1} u^{(l-1)})^{(l-1)} + \cdots + p_0 u, \tag{18}$$

и $2l$ граничными условиями. Напомним, что по определению это означает, что G_0 для любого $s \in (0,1)$ удовлетворяет уравнению $L_0 G_0 = \delta(t-s)$, в смысле распределений, и удовлетворяет краевым условиям.

Будем обозначать $\mathcal{D}(L_0)$ – образ интегрального оператора с ядром $G_0(s,t)$. Тогда обратный оператор это L_0 с областью определения $\mathcal{D}(L_0)$. В частности, если $\varphi \in L_2(0,1)$, то $\psi \in \mathcal{D}(L_0)$, и $L_0\psi = \varphi$. Предположим для простоты, что $p_j \in C^j[0,1]$. Тогда $\mathcal{D}(L_0)$ совпадает с множеством функций, принадлежащих $W_2^l(0,1)$ и удовлетворяющих граничным условиям.

Теорема 3. *Пусть $A = Q^{-1}$. Если $\varphi_i(x) \in L_2(\mathcal{O})$, $i = 1, \ldots, m$, тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\|X_A\|_2 \leqslant \varepsilon\} \\ &\sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\Big(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\Big)}} \cdot (2l\sin(\pi/(2l))\varepsilon^2)^{-\frac{lm}{2l-1}} \cdot \mathbb{P}\{\|X_0\|_2 \leqslant \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. В [13] показано, что для процесса X_0 выполнено соотношение

$$F(r) = \mathbb{P}\{\|X_0\|_2 \leqslant \sqrt{r}\} \sim C \cdot r^{\beta} \exp(-\mathcal{D} r^{-d}), \qquad r \to 0, \tag{20}$$

где $d = \frac{1}{2l-1}$, $\mathcal{D} = \frac{1}{2d}(2l\sin(\pi/(2l)))^{-d-1}$. Используя лемму 2 (см. приложение), получаем

$$F^{(m)}(r) \sim C \cdot (\mathcal{D}d)^m \cdot r^{\beta - m(d+1)} \exp(-\mathcal{D} r^{-d}), \qquad r \to 0. \tag{21}$$

Это означает, что асимптотика (20) дифференцируема m раз по переменной r. Подставляя (21) в (11), мы получаем

$$\mathbb{P}\{\|X_A\|_2 \leqslant \sqrt{r}\} \sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\Bigl(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\Bigr)}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot C(\mathcal{D}d)^m$$

$$\times \int\limits_0^r \int\limits_0^{r_1} \cdots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{r_m^{\beta-m(d+1)} \exp(-\mathcal{D}r_m^{-d})\,dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r-r_1)(r_1-r_2)\ldots(r_{m-1}-r_m)}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{r_m^{\beta-m(d+1)} \exp(-\mathcal{D}r_m^{-d})\,dr_m}{\sqrt{r_{m-1}-r_m}}.$$

По [27, теорема 3] имеем

$$I \sim \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{D}d}} \cdot r_{m-1}^{\beta-m(d+1)+(d+1)/2} \exp(-\mathcal{D}r_{m-1}^{-d}), \qquad r_{m-1} \to 0.$$

Повторив эти шаги $(m-1)$ раз, получаем утверждение теоремы 3. $\square$

§5. Пример: процессы Дурбина

Процессы Дурбина возникают как предельные при построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке (см. [37]). Опишем их более подробно.

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ есть выборка с генеральной функцией распределения $F(x, \theta)$, $f(x, \theta)$ – плотность распределения, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $s \in \mathbb{N}$, – вектор параметров. Рассмотрим эмпирическую функцию распределения при фиксированных значениях параметров $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_s^0)$:

$$F_n^0(t) = \frac{\#\{x_i : F(x_i, \theta^0) \leqslant t,\ i = 1, \ldots, n\}}{n}, \quad t \in [0, 1].$$

Известно (см. [36, глава 3]), что процесс $n^{1/2}\bigl[F_n^0(t) - t\bigr]$ слабо сходится к броуновскому мосту $B(t)$ в $D[0,1]$. Здесь $D[0,1]$ – это пространство функций на $[0,1]$ непрерывных справа и имеющих разрывы только первого рода.

Допустим, что часть параметров распределения неизвестна (не умаляя общности, можно считать, что это первые m параметров). Оценим неизвестные параметры по выборке (например, методом максимального правдоподобия) и обозначим новый вектор параметров $\hat{\theta} := (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m, \theta^0_{m+1}, \dots, \theta^0_s)$. Тогда эмпирическая функция распределения примет вид:

$$\widehat{F}_n(t) = \frac{\#\{x_i\colon F(x_i, \hat{\theta}) \leqslant t,\, i = 1, \dots, n\}}{n}, \quad t \in [0, 1].$$

В статье [37] показано, что процесс $n^{1/2}\big[\hat{F}_n(t) - t\big]$ сходится слабо в $D[0, 1]$ к конечномерному возмущению броуновского моста, а именно, к гауссовскому процессу с нулевым средним и функцией ковариации:

$$G(s, t) = G_B(s, t) - \vec{\psi}^{\,T}(s)\, S^{-1}\, \vec{\psi}(t), \qquad s, t \in [0, 1], \tag{22}$$

где $G_B(s, t) = \min(s, t) - st$ – функция ковариации броуновского моста $B(t)$, S – матрица информации Фишера с элементами S_{ij}, $i, j = 1, \dots, m$:

$$S_{ij} = -\mathbb{E}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln(f(x, \theta))\Big)\Big|_{\theta=\theta_0} = \mathbb{E}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln(f(x, \theta)) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln(f(x, \theta))\Big)\Big|_{\theta=\theta_0}.$$

Вектор функций $\vec{\psi} = \big(\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)\big)$ задается соотношениями:

$$\psi_j(t) = \frac{\partial F(x, \theta)}{\partial\theta_j}\Big|_{\theta=\theta^0}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где x и t связаны равенством $t = F(x, \theta)$. Формула (22) показывает, что процессы Дурбина являются m-мерными возмущениями броуновского моста (типа (4)).

Замечание 6. Имеет место следующее равенство:

$$\psi'_j(t) = \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln(f(F^{-1}(t, \theta)))\Big|_{\theta=\theta_0}. \tag{23}$$

Формула (23) проверяется непосредственным вычислением. Поэтому из соотношения (23) мы получаем

$$S_{ij} = \int\limits_0^1 \psi'_i(t) \psi'_j(t)\, dt.$$

Теорема 4. *Процессы Дурбина с m оцененными параметрами являются критическими порядка m.*

Доказательство. Заметим, что если X – это броуновский мост, то выполнено соотношение $\varphi_i(s) = -\psi_i''(s)$, а значит

$$Q_{ij} = \int\limits_0^1 \psi_j(s)\varphi_i(s)\,ds = \int\limits_0^1 \psi_j(s)(-\psi_i''(s))\,ds = \int\limits_0^1 \psi_j'(s)\psi_i'(s)\,ds = S_{ij},$$

откуда из (3) и (22) немедленно следует утверждение теоремы. □

§6. Приложение

Докажем лемму о "дифференцируемости" асимптотики малых уклонений.

Лемма 2. *Пусть*

$$F(x) = \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < x\Big\},$$

где $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$, *и* ξ_k *– независимые стандартные нормальные случайные величины. Предположим, что функция* $F(x)$ *имеет следующую асимптотику в нуле*

$$F(x) \sim \mathcal{A}\, x^{\alpha} L(x) \exp(-\mathcal{D}x^{-\beta}),$$
$$\text{при } x \to +0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ C > 0,\ \beta > 0,\ \mathcal{D} > 0,$$

где $L(x) > 0$ *– это медленно-меняющаяся функция в нуле.*
Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ *при* $x \to +0$

$$F^{(m)}(x) \sim \mathcal{A}(\mathcal{D}\beta)^m\, x^{\alpha - m(\beta+1)} L(x) \exp(-\mathcal{D}x^{-\beta}).$$

Доказательство леммы 2 основано на некоторых свойствах функции $F(x)$ (лемма 3) и лемме тауберовского типа (лемма 4).

Лемма 3. *Пусть* $F(x)$ *удовлетворяет условиям леммы 2.*
Тогда $F^{(n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. *Также* $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x)),\ x \to +0.$

Доказательство. Шаг 1: Предположим, что в некоторой окрестности $x = 0$, $x > 0$, выполнено

$$F^{(n+2)}(x) > 0; \qquad F^{(n+1)}(x) \text{ ограничено} \quad \text{и} \quad F^{(n)}(0) = 0. \tag{24}$$

Мы утверждаем, что $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x))$, $x \to +0$. Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^x yF^{(n+2)}(y)\,dy = yF^{(n+1)}(y)\Big|_0^x - \int_0^x F^{(n+1)}(y)\,dy = xF^{(n+1)}(x) - F^{(n)}(x).$$

Рассмотрим x достаточно маленьким, что $F^{(n+2)}(y) > 0$ для всех $y \in (0,x)$, тогда интеграл будет положительным. Это означает, что $xF^{(n+1)}(x) - F^{(n)}(x) > 0$, и $xF^{(n+1)}(x) > F^{(n)}(x)$. Отсюда следует, что $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x))$, $x \to +0$.

Шаг 2: Докажем лемму 3 для функции распределения *конечной* суммы $\eta_m := \sum\limits_{j=1}^m \mu_j \xi_j^2$. А именно, рассмотрим

$$F_{\eta_m}(x) := \mathbb{P}\{\eta_m < x\} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{j=1}^m \mu_j \xi_j^2 < x\Big\}.$$

Мы утверждаем, что для любых натуральных n и m, таких что $n < m/2 - 1$, выполнено

$$F^{(n+1)}_{\eta_m}(0) = 0 \qquad \text{and} \qquad F^{(n)}_{\eta_m}(x) = o(F^{(n+1)}_{\eta_m}(x)), \qquad x \to +0. \tag{25}$$

Докажем это. Переходя к сферическим координатам в $F_{\eta_m}(x)$, получаем:

$$F_{\eta_m}(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \int_{S^{m-1}} d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-1} \cdot e^{-r^2 \cdot P(\sin(\varphi_1),\dots,\sin(\varphi_{m-1}))} \cdot |J| \frac{dr}{\sqrt{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m}},$$

где $P(y_1, \dots, y_{m-1})$ – многочлен, S^{m-1} – $(m-1)$-мерная сфера в $\mathbb{R}^m$, J – якобиан:

$$J = r^{m-1} \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin^2(\varphi_3) \cdot \dots \cdot \sin^{m-2}(\varphi_{m-1}).$$

Отсюда плотность $f_{\eta_m}(x) = F'_{\eta_m}(x)$ равна

$$\begin{aligned} f_{\eta_m}(x) = {} & x^{m/2-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{S^{m-1}} d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-1} \cdot e^{-x \cdot P(\sin(\varphi_1),\dots,\sin(\varphi_{m-1}))} \\ & \times |\sin(\varphi_2) \cdot \dots \cdot \sin^{m-2}(\varphi_{m-1})| \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_m}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Из (26) следует, что пока $n < m/2 - 1$ производная $f^{(n)}_{\eta_m}(x)$ определена в окрестности $x = 0$, и $f^{(n)}_{\eta_m}(0) = 0$. Более того, $f^{(n)}_{\eta_m}(x) \sim C \cdot x^{m/2-1-n}$

при $x \to +0$ для некоторой константы $C > 0$, поэтому выполнено (25). Отметим также, что при $n < m/2 - 1$ также верно $F^{(n+2)}_{\eta_m}(x) > 0$ в некоторой окрестности $x = 0$.

Шаг 3: Пусть η – случайная величина (независимая от $\xi_1, \ldots, \xi_m$) на положительной части вещественной оси $x \geqslant 0$, такая что $F_\eta(x) > 0$ для всех $x > 0$. Мы утверждаем, что для всех натуральных n и m, таких что $n < m/2 - 1$ выполняются следующие равенства

$$F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad F^{(n)}_{\eta_m+\eta}(x) = o(F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(x)), \quad x \to +0. \tag{27}$$

Это означает, что (25) остается верным после добавления η. Согласно шагу 1 достаточно доказать (24) для $F_{\eta_m+\eta}(x)$ при $n < m/2 - 1$. Отметим, что (24) выполнено для F_{η_m}. Рассмотрим

$$F^{(n+2)}_{\eta_m+\eta}(x) = \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta_m}(x-y)\, dF_\eta(y) = \int\limits_0^x F^{(n+2)}_{\eta_m}(x-y)\, dF_\eta(y). \tag{28}$$

Ясно, что $F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(0) = 0$. По теореме о среднем значении существует $x_0 \in (0, x)$ такой что

$$F^{(n+2)}_{\eta_m+\eta}(x) = F^{(n+2)}_{\eta_m}(x_0) \int\limits_0^x dF_\eta(y) = F^{(n+2)}_{\eta_m}(x_0)(F_\eta(x) - F_\eta(0)) > 0.$$

Шаг 4: Докажем лемму 3 для *бесконечной* суммы, т.е. для функции $F(x)$. Фиксируем n. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так что $m > 2(n+1)$. Запишем ξ в виде суммы

$$\xi = \eta_m + \sum_{p=m+1}^{\infty} \mu_p \xi_p^2 =: \eta_m + \eta.$$

Ясно, что у η положительная масса в любой окрестности нуля. Поэтому, применяем шаг 3 к ξ, что доказывает лемму 3. $\square$

Докажем следующую лемму тауберовского типа (о дифференцируемости асимптотики).

Лемма 4. *Пусть* $f(x)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x)$ *неубывающая и*

$$\begin{aligned} &f(x) \sim \mathcal{A}\, x^\alpha L(x) \exp(-\mathcal{D} x^{-\beta}), \\ &\text{\textit{при} } x \to +0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ C > 0,\ \beta > 0,\ \mathcal{D} > 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где $L(x) > 0$ *медленно меняющаяся функция в нуле. Тогда*

$$f'(x) \sim \mathcal{A}\mathcal{D}\beta x^{\alpha-\beta-1} L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta}), \qquad \text{при } x \to +0. \tag{30}$$

Доказательство. Достаточно доказать следующие неравенства

$$\limsup_{x\to+0} f'(x)/(x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})) \leqslant \mathcal{A}\mathcal{D}\beta; \tag{31}$$

$$\liminf_{x\to+0} f'(x)/(x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})) \geqslant \mathcal{A}\mathcal{D}\beta. \tag{32}$$

Докажем сначала (31). По теореме о среднем значении существует точка $\xi \in (x, x+h)$ такая, что $f(x+h) - f(x) = hf'(\xi) \geqslant hf'(x)$ для $h > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда если x достаточно маленький и $0 < h < x$, имеем

$$\begin{aligned}
&f'(x)\\
&\leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h)^{\alpha}L(x+h)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})(1+\varepsilon)-\mathcal{A}x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})(1-\varepsilon)}{h}\\
&= \frac{\mathcal{A}(x+h)^{\alpha}L(x+h)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta}) - \mathcal{A}x^{\alpha}L(x+h)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})}{h}\\
&+ \frac{\mathcal{A}x^{\alpha}L(x+h)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta}) - \mathcal{A}x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})}{h}\\
&+ \frac{\mathcal{A}x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta}) - \mathcal{A}x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})}{h}\\
&+ \frac{\varepsilon\mathcal{A}x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})}{h}\\
&+ \frac{\varepsilon\mathcal{A}(x+h)^{\alpha}L(x+h)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})}{h} =: B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5.
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Т.к. $((x+h)^{\alpha} - x^{\alpha})/h \leqslant \alpha x^{\alpha-1} + Chx^{\alpha-2}$, то

$$\frac{B_1}{x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})} \leqslant (\mathcal{A}\alpha x^{\beta} + h\mathcal{A}Cx^{\beta-1})\frac{L(x+h)}{L(x)}.$$

Не умаляя общности можем считать, что

$$L(x) = \exp\left(\int\limits_{B}^{x} \frac{\eta(y)}{y}\,dy\right),$$

где $\eta(y)$ измеримая функция на $[B,\infty)$ и $\eta(y)\to 0$ при $y\to\infty$. Это означает, что

$$\frac{xL'(x)}{L(x)}\to 0. \tag{33}$$

Далее,

$$\frac{B_2}{x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})} = \mathcal{A}\cdot\frac{x^{\beta+1}}{L(x)}\cdot\frac{(L(x+h)-L(x))}{h} = \mathcal{A}\cdot\frac{x^{\beta+1}L'(x+z)}{L(x)}$$

для некоторого $z\in(0,h)$. Оценим слагаемое B_3:

$$\frac{B_3}{x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})} = \frac{\mathcal{A}}{h}\bigl(\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta}+\mathcal{D}x^{-\beta})-1\bigr)$$
$$=\frac{\mathcal{A}}{h}\Bigl(\exp\Bigl(\mathcal{D}\frac{(1+h/x)^{\beta}-1}{(x+h)^{\beta}}\Bigr)-1\Bigr)\leqslant\frac{\mathcal{A}}{h}\Bigl(\exp\Bigl(\mathcal{D}\frac{(1+h/x)^{\beta}-1}{x^{\beta}}\Bigr)-1\Bigr).$$

Используя неравенства $(1+y)^{\beta}-1\leqslant y\beta+Cy^2$ и $\exp(y)-1\leqslant y+Cy^2$ для достаточно маленьких y, получаем

$$\frac{B_3}{x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})}\leqslant\frac{\mathcal{A}}{h}\left(\exp\left(\mathcal{D}\frac{\beta h/x+C(h/x)^2}{x^{\beta}}\right)-1\right)$$
$$\leqslant\frac{\mathcal{A}}{h}\left(\mathcal{D}\frac{\beta h/x+C(h/x)^2}{x^{\beta}}+C\frac{(h/x)^2}{x^{2\beta}}\right)$$
$$=\mathcal{A}\mathcal{D}\beta x^{-\beta-1}+\mathcal{A}Ch\mathcal{D}x^{-\beta-2}+\mathcal{A}Chx^{-2\beta-2}.$$

Аналогично получаем оценку на слагаемое B_5

$$\frac{B_5}{x^{\alpha}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})}\leqslant\frac{\varepsilon\mathcal{A}}{h}\frac{L(x+h)}{L(x)}\exp\left(\mathcal{D}\frac{\beta h/x+C(h/x)^2}{x^{\beta}}\right).$$

Пусть $h=\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1}$. Тогда

$$B_1\leqslant x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})\cdot(\mathcal{A}\alpha x^{\beta}+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}Cx^{2\beta})\cdot\frac{L(x+\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1})}{L(x)};$$

$$B_2\leqslant x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}(x+h)^{-\beta})\cdot\mathcal{A}\cdot\frac{x^{\beta+1}L'(x+z)}{L(x)},\ \ z\in(0,\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1});$$

$$B_3\leqslant x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})\cdot\bigl(\mathcal{A}\mathcal{D}\beta+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}C\mathcal{D}x^{\beta}+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}C\bigr);$$

$$B_4\leqslant x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})\cdot\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A};$$

$$B_5 \leqslant x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})\cdot\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}\exp(\mathcal{D}\beta\sqrt{\varepsilon}+\mathcal{D}Cx^{\beta}\varepsilon)\cdot\frac{L(x+\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1})}{L(x)}.$$

Заметим, что для медленно меняющейся функции $L(x)$ выполнено

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(x+\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1})}{L(x)} = 1.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(x+\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1})}{L(x)} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{L(x+\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1}) - L(x)}{L(x)}$$
$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1}L'(x+z)}{L(x)}$$
$$= 1 + \sqrt{\varepsilon}\lim_{x\to 0}\frac{x^{\beta/2}L(x+z)}{x^{-\beta/2}L(x)}\cdot\frac{x}{x+z}\cdot\frac{(x+z)L'(x+z)}{L(x+z)} = 1.$$

для некоторого $z \in (0, \sqrt{\varepsilon}x^{\beta+1})$. Последнее равенство выполняется благодаря (33) и факту, что $x^{\alpha}L(x) \to 0$ при $x \to 0$ для любого $\alpha > 0$.

Из этих оценок получаем

$$\frac{f'(x)}{x^{\alpha-\beta-1}L(x)\exp(-\mathcal{D}x^{-\beta})} \leqslant \mathcal{A}\,\mathcal{D}\beta + C(\sqrt{\varepsilon}+x^{\beta}).$$

Неравенство (31) доказано. Доказательство (32) проводится аналогично с использованием неравенства $f(x) - f(x-h) \leqslant hf'(x)$. $\square$

Доказательство леммы 2. Комбинируя леммы 3 и 4 мы немедленно получаем утверждение леммы 2.

Благодарности. Автор благодарит профессоров СПбГУ А. И. Назарова, М. А. Лифшица и Я. Ю. Никитина за стимулирующие дискуссии и ценные замечания по тексту.

Список литературы

1. M. A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities*, Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference, 1999, pp. 453–468.
2. W. V. Li and Q. M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications.* Stochastic processes: theory and methods, **19** (2001), 533–597.
3. В. Р. Фаталов, *Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей.* — Успехи математических наук, **58**, No. 4 (352) (2003), 89–134.
4. M. A. Lifshits, *Bibliography of small deviation probabilities*, 2019. `https://airtable.com/shrMGOnNxl9SiGxII/tbl7Xj1mZW2VuYurm`.

5. Г. Сытая, *О некоторых асимптотичеких представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве.* — Теория случайных процессов, **2**, No. 94 (1974), 93–104.
6. И. А. Ибрагимов, *О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, **85** (1979), 75–93.
7. V. M. Zolotarev, *Gaussian measure asymptotic in L_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero*," in: 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna, 1979, p. 254.
8. J. Hoffmann-Jorgensen, L. A. Shepp, and R. M. Dudley, *On the lower tail of Gaussian seminorms.* — Ann. Probab., **7** (1979), 319–342.
9. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам*, СПб, Лань, 2016.
10. T. Dunker, M. A. Lifshits, and W. Linde, *Small deviation probabilities of sums of independent random variables.* — Progress in Probability, **43** (1998), 59–74.
11. W. V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — J. Theor. Probab., **5**, No. 1 (1992), 1–31.
12. F. Gao, J. Hannig, and F. Torcaso, *Comparison theorems for small deviations of random series.* — Electron. J. Probab., **8**, No. 21 (2003), 1–17.
13. A. I. Nazarov and Y. Y. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems.* — Probab. Theory Related Fields, **129**, No. 4 (2004), 469–494.
14. A. I. Nazarov, *Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems.* — J. Theor. Probab., **22**, No. 3 (2009), 640–665.
15. G. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter.* —Transactions of AMS, **9**, No. 2 (1908), 219–231.
16. G. Birkhoff, *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations.* — Transactions of AMS, **9**, No. 4 (1908), 373–395.
17. J. Tamarkin, *Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier.* — Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **34**, No. 1 (1912), 345–382.
18. J. Tamarkin, *Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions.* — Mathematische Zeitschrift, **27**, No. 1 (1928), 1–54.
19. А. А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях.* — Функциональный анализ и приложения, **16**, No. 4 (1982), 92–93.
20. А. А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях.* — Труды семинара имени И.Г. Петровского. М: Изд-во Моск. ун-та, **9** (1983), 190–229.
21. P. Chigansky, M. Kleptsyna, and D. Marushkevych, *On the Karhunen–Loève expansion of Gaussian bridges.* `arXiv:1706.09298`, 2017.
22. P. Chigansky and M. Kleptsyna, *Exact asymptotics in eigenproblems for fractional Brownian covariance operators.* — Stochastic Processes and their Applications, **128**, No. 6 (2018), 2007–2059.

23. P. Chigansky, M. Kleptsyna, and D. Marushkevych, *Exact spectral asymptotics of fractional processes.* `arXiv:1802.09045`, 2018.
24. F. Gao and W. V. Li, *Logarithmic level comparison for small deviation probabilities.* — J. Theor. Probab., **20**, No. 1 (2007), 1–23.
25. A. I. Nazarov, *Log-level comparison principle for small ball probabilities.* — Statist. & Probab. Letters, **79**, No. 4 (2009), 481–486.
26. P. Deheuvels, *A Karhunen–Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge.* — Statist. & Probab. Letters, **77**, No. 12 (2007), 1190–1200.
27. А. И. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций.* — Теория вероятн. и ее примен., т. 54, No. 2 (2009), 209–225.
28. M. Kac, J. Kiefer, and J. Wolfowitz, *On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods.* — Ann. Math. Statist., **26**, No. 2 (1955), 189–211.
29. А. И. Назаров, Ю. П. Петрова, *Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца-Кифера-Вольфовица.* — Теория вероятн. и ее примен., т. 60, No. 3 (2016), 482–505.
30. Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина.* — Зап. Научн. Сем. ПОМИ, т. 466 (2017), 211–233. (in Russian).
31. М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Спетральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Учебное пособие*, Изд-во Лань, второе издание, Санкт-Петербург, 2010.
32. Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит, 1980.
33. H. Bateman, *A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind.* — Messenger Math., **37** (1908), 179–187.
34. S. Sukhatme, *Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application.* — Ann. Math. Statist. (1972), 1914–1926.
35. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа,* 1950.
36. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер,* Наука, 1977.
37. J. Durbin, *Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated.* — Ann. Statist., **1**, No. 2 (1973), 279–290.

Petrova Yu. P. L_2-small ball asymptotics for a family of finite-dimensional perturbations of Gaussian functions.

In this article we study the small ball probabilities in L_2-norm for a family of finite-dimensional perturbations of Gaussian functions. We define three types of perturba- tions: noncritical, partially critical and critical; and derive small ball asymptotics for the perturbated process in terms of the small ball asymptotics for the original process. The natural examples of such perturbations appear in statistics in the study of empirical processes with estimated parameters (the so-called Durbin's processes). We show that the Durbin's processes are critical perturbations of the Brownian bridge. Under some additional assumptions, general results can be simplified. As an example we find the exact L_2-small ball asymptotics for critical perturbations of the Green processes (the processes which covariance function is the Green function of the ordinary differential operator).

Лаборатория Чебышева, С.-Петербургский
государственный университет,
14 линия В.О., 29Б,
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: yu.pe.petrova@yandex.ru

Поступило 18 сентября 2021 г.